

PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY
W ROKU SZKOLNYM 2017-2018

MATEMATYKA
POZIOM ROZSZERZONY

ZASADY OCENIANIA ZADAŃ
KIELCE – MARZEC 2018

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Nr zadania	1	2	3	4
Liczba punktów	D	B	B	C

ZADANIE KODOWANEJ ODPOWIEDZI

Zadanie 5. (0-2)

Wyznacz wartość parametru a , dla którego reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = -3x^3 + a^2x + 3a - 5$ przez dwumian $x + 2$ osiąga największą wartość.

W poniższe kratki wpisz kolejno cyfrę jedności oraz dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Rozwiązanie:

Reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = -3x^3 + a^2x + 3a - 5$ przez dwumian $x + 2$ wynosi $W(-2)$

$$R = 24 - 2a^2 + 3a - 5$$

$$R = -2a^2 + 3a + 19$$

Wyrażenie $-2a^2 + 3a + 19$ osiąga największą wartość dla $a = \frac{-3}{-4} = 0,75$.

Nr zadania	5		
Rozwiązanie	0	7	5

ZADANIA OTWARTE Z ROZWIĄZANAMI I SCHEMATAMI PUNKTACJI

Zadanie 6. (0-3)

Wiadomo, że $\log_3 24 = m$. Wykaż, że $\log_{16} 36 = \frac{m+2}{2m-2}$

Rozwiązanie (I sposób):

Założmy, że $\log_3 24 = m$. Zauważmy, że $m \in (2, 3)$.

Korzystając z odpowiednich twierdzeń przekształćmy założenie

$$\log_3 24 = m$$

$$\log_3 3 + \log_3 8 = m$$

$$1 + 3\log_3 2 = m$$

$$\log_3 2 = \frac{m-1}{3}$$

$$\log_2 3 = \frac{3}{m-1}$$

Przekształćmy równoważnie tezę.

$$\log_{16} 36 = \frac{\log_2 36}{\log_2 16}$$

$$\log_{16} 36 = \frac{2\log_2 6}{4} = \frac{\log_2 2 + \log_2 3}{2}$$

Korzystając założenia otrzymujemy

$$\log_{16} 36 = \frac{1 + \frac{3}{m-1}}{2}$$

$$\log_{16} 36 = \frac{\frac{m-1+3}{m-1}}{2}$$

$$\log_{16} 36 = \frac{m+2}{2m-2}$$

Schemat punktowania I sposobu rozwiązania.

Zdający otrzymuje 1 p.

- gdy zapisze, że $\log_2 3 = \frac{3}{m-1}$ i na tym zakończy lub w dalszej części rozwiązania popełnia błędy,
albo
- gdy zapisze, że $\log_{16} 36 = \frac{1 + \log_2 3}{2}$ i na tym zakończy lub w dalszej części rozwiązania popełnia błędy.

Zdający otrzymuje 2 p.

- gdy zapisze, że $\log_{16} 36 = \frac{1 + \log_2 3}{2}$ oraz $\log_2 3 = \frac{3}{m-1}$ i na tym zakończy lub w dalszej części rozwiązania popełnia błędy.

Zdający otrzymuje 3 p.

gdy uzasadni, że $\log_{16} 36 = \frac{m+2}{2m-2}$.

Rozwiązanie (II sposób):

Założmy, że $\log_3 24 = m$. Zauważmy, że $m \in (2, 3)$.

Korzystając z założenia przekształćmy tezę.

$$\text{Zauważmy, że } \log_{16} 36 = \frac{\log_4 36}{\log_4 16} = \frac{1}{2} \log_4 36 = \log_4 6$$

Uzasadnimy, że $\frac{m+2}{2m-2} = \log_4 6$

$$\frac{m+2}{2m-2} = \frac{\log_3 24+2}{2\log_3 24-2} = \frac{\log_3 24+\log_3 9}{\log_3 576-\log_3 9} = \frac{\log_3 (24 \cdot 9)}{\log_3 \frac{576}{9}}$$

$$\frac{m+2}{2m-2} = \frac{\log_3 216}{\log_3 64} = \frac{\log_3 6^3}{\log_3 4^3} = \frac{3\log_3 6}{3\log_3 4} = \frac{\log_3 6}{\log_3 4} = \log_4 6$$

Co należało uzasadnić.

Schemat punktowania II sposobu rozwiązania.

Zdający otrzymuje 1 p.

- gdy zapisze, że $\log_{16} 36 = \log_4 6$ i na tym zakończy lub w dalszej części rozwiązania popełnia błędy,
albo
- gdy zapisze, że $\frac{m+2}{2m-2} = \frac{\log_3 (24 \cdot 9)}{\log_3 \frac{576}{9}}$ i na tym zakończy lub w dalszej części rozwiązania popełnia błędy.

Zdający otrzymuje 2 p.

- gdy zapisze, że $\log_{16} 36 = \log_4 6$ oraz $\frac{m+2}{2m-2} = \frac{\log_3 216}{\log_3 64}$ i na tym zakończy lub w dalszej części rozwiązania popełnia błędy.

Zdający otrzymuje 3 p.

gdy uzasadni, że $\log_{16} 36 = \frac{m+2}{2m-2}$.

Zadanie 7. (0-3)

Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x i dla każdej liczby rzeczywistej y prawdziwa jest nierówność $\frac{y(1-y)+x(6-y)}{x^2+2} < \frac{5}{2}$.

Rozwiązanie (I sposób rozwiązania)

Założmy, że $x \in \mathbb{R}$ oraz $y \in \mathbb{R}$.

Przekształćmy równoważnie nierówność w następujący sposób

$$\begin{aligned} \frac{y(1-y)+x(6-y)}{x^2+2} &< \frac{5}{2}, \\ 2(y-y^2+6x-xy) &< 5(x^2+2), \\ 2y-2y^2+12x-2xy &< 5x^2+10, \\ 5x^2+10-2y+2y^2-12x+2xy &> 0, \\ (4x^2-12x+9) + (x^2+2xy+y^2) + (y^2-2y+1) &> 0 \\ (2x-3)^2 + (x+y)^2 + (y-1)^2 &> 0 \end{aligned}$$

Lewa strona tej nierówności jest sumą składników nieujemnych, więc suma ta jest nieujemna dla każdej liczby rzeczywistej x i dla każdej liczby rzeczywistej y .

Uzasadnimy teraz, że lewa strona tej nierówności nie może równać się zeru.

Zauważmy, że wyrażenie $(2x - 3)^2 + (x + y)^2 + (y - 1)^2$ byłoby równe zeru, jeśli
$$\begin{cases} 2x - 3 = 0 \\ x + y = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases}$$

czyli $\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = -y \\ y = 1 \end{cases}$, a to jest układ sprzeczny.

Z powyższych rozważań wynika, że $(2x - 3)^2 + (x + y)^2 + (y - 1)^2 > 0$,

co kończy dowód.

Schemat punktowania I sposobu rozwiązania.

Zdający otrzymuje **1 p.**

gdy zapisze nierówność w postaci, z której lewą stronę łatwo można zapisać w postaci sumy składników nieujemnych, np.: $(4x^2 - 12x + 9) + (x^2 + 2xy + y^2) + (y^2 - 2y + 1) > 0$.

Zdający otrzymuje **2 p.**

gdy zapisze nierówność w postaci $(2x - 3)^2 + (x + y)^2 + (y - 1)^2 > 0$ i nie uzasadni prawdziwości tej nierówności.

Zdający otrzymuje **3 p.**

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Rozwiązanie (II sposób rozwiązania)

Założmy, że $x \in R$ oraz $y \in R$.

Przekształćmy równoważnie nierówność do postaci $5x^2 + (2y - 12)x + (2y^2 - 2y + 10) > 0$ i wprowadźmy funkcję kwadratową $f(x) = 5x^2 + (2y - 12)x + (2y^2 - 2y + 10)$ z parametrem y .

Wystarczy teraz pokazać, że funkcja f przyjmuje tylko wartości dodatnie. Ramiona paraboli skierowane są do góry, więc wyróżnik trójmianu musi być ujemny dla każdego $y \in R$.

$$\Delta = (2y - 12)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (2y^2 - 2y + 10)$$

$$\Delta = -36y^2 - 8y - 56$$

Rozwiążmy nierówność: $-36y^2 - 8y - 56 < 0$

Dla ułatwienia obliczeń podzielmy obie strony nierówności przez -4 .

$$9y^2 + 2y + 14 > 0$$

$$\Delta_y = 4 - 504 = -500$$

Rozwiązanie nierówności: $y \in R$

Otrzymany wyróżnik $\Delta = -36y^2 - 8y - 56$ jest mniejszy od zera dla każdej liczby rzeczywistej y , więc funkcja f przyjmuje tylko wartości dodatnie, a to oznacza, że nierówność $5x^2 + (2y - 12)x + (2y^2 - 2y + 10) > 0$ jest prawdziwa dla każdych liczb rzeczywistych x i y .

co kończy dowód.

Uwaga

Zdający może rozpatrzyć funkcję zmiennej y z parametrem x i postępować w sposób analogiczny.

Schemat punktowania II sposobu rozwiązania.

Zdający otrzymuje 1 p.

gdy zapisze funkcję $f(x) = 5x^2 + (2y - 12)x + (2y^2 - 2y + 10)$

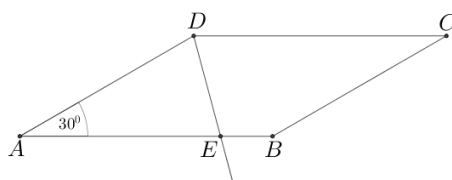
Zdający otrzymuje 2 p.

gdy zapisze wyróżnik w postaci $\Delta = -36y^2 - 8y - 56$ i uzasadni, że jest on ujemny dla $y \in \mathbb{R}$.

Zdający otrzymuje 3 p.
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Zadanie 8. (0-3)

Kąt ostry BAD równoległoboku $ABCD$ ma miarę 30° , oraz $\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{2 + \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$. Dwusieczna kąta wypukłego ADC przecina bok AB w punkcie E . Uzasadnij, że w czworokąt $EBCD$ można wpisać okrąg.



Rozwiązanie

Aby udowodnić, że w czworokąt $EBCD$ można wpisać okrąg wystarczy wykazać, że

$$|EB| + |DC| = |DE| + |BC|.$$

Etap I – uzasadnienie, że trójkąt AED jest równoramienny.

$$|\angle BAD| + |\angle ADC| = 180^\circ, \text{ więc } |\angle ADC| = 150^\circ$$

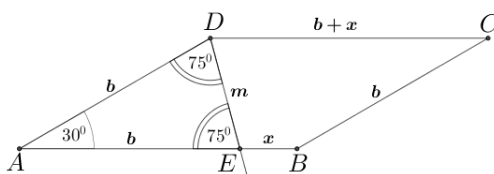
$$\text{Półprosta } DE \text{ jest dwusieczną kąta } |\angle ADC|, \text{ więc } |\angle ADE| = 75^\circ.$$

$$\text{Suma miar kątów wewnętrznych trójkąta } AED \text{ wynosi } 180^\circ, \text{ więc } |\angle AED| = 75^\circ.$$

$$\text{Trójkąt } AED \text{ jest równoramienny, w którym } |AE| = |AD|.$$

Etap II (I sposób) – uzasadnienie, że $|EB| + |DC| = |DE| + |BC|$.

Wprowadźmy następujące oznaczenia:



Wystarczy uzasadnić, że $b + m = b + x + x$, tzn. $m = 2x$.

Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta AED otrzymujemy

$$m^2 = b^2 + b^2 - 2b^2 \cos 30^\circ$$

$$m^2 = 2b^2 - \sqrt{3}b^2$$

$$m = b\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

Z założenia $\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{2 + \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$ otrzymujemy

$$\frac{b + x}{b} = \frac{2 + \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

$$2b + 2x = 2b + b\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

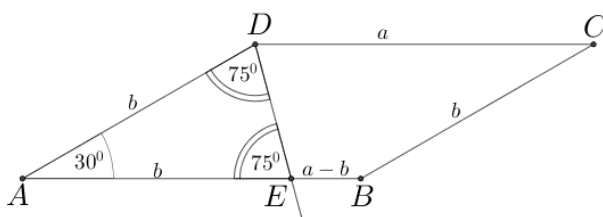
$$2x = b\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

Uzasadniliśmy więc, że $m = 2x$,

co kończy dowód.

Etap II (II sposób) – uzasadnienie, że $|EB| + |DC| = |DE| + |BC|$.

Dla ułatwienia zapisów przyjmujemy, że $|AB| = |DC| = a$, $|AD| = |BC| = |AE| = b$.



Z twierdzenia sinusów wynika, że $\frac{|DE|}{\sin 30^\circ} = \frac{|AE|}{\sin 75^\circ}$.

$$|DE| = \frac{b}{2 \sin 75^\circ}$$

$$\sin 75^\circ = \sin(30^\circ + 45^\circ) = \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ$$

$$\sin 75^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

Zauważmy, że $(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 = 8 + 2\sqrt{12} = 4(2 + \sqrt{3})$, zatem $\sqrt{6} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2 + \sqrt{3}}$

$$\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2},$$

$$|DE| = \frac{b}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

$$|DE| = \frac{b\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}\sqrt{2 - \sqrt{3}}}$$

$$|DE| = \frac{b\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})}}$$

$$\underline{|DE| = b\sqrt{2 - \sqrt{3}}}$$

$$\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{2 + \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}, \text{ więc } \frac{a}{b} = \frac{2 + \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

$$a = \frac{2 + \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} b$$

$$|EB| + |DC| = 2a - b = 2 \cdot \frac{2 + \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} b - b = (2 + \sqrt{2 - \sqrt{3}})b - b = (1 + \sqrt{2 - \sqrt{3}})b$$

$$|DE| + |BC| = b\sqrt{2 - \sqrt{3}} + b = (1 + \sqrt{2 - \sqrt{3}})b$$

$$|EB| + |DC| = |DE| + |BC|,$$

co kończy dowód.

Schemat punktowania.

Zdający otrzymuje **1 p.**

wykaże, że trójkąt AED jest równoramienny, w którym $|AE| = |AD|$ oraz $|\angle AED| = |\angle ADE| = 75^\circ$

Zdający otrzymuje **2 p.**

- gdy obliczy $|DE| = b\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ i zapisze, że należy wykazać równość $|EB| + |DC| = |DE| + |BC|$

albo

- obliczy $m = b\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ i zapisze, że należy wykazać, że $m = 2x$

albo

- obliczy $2x = b\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ i zapisze, że należy wykazać, że $m = 2x$.

Zdający otrzymuje **3 p.**

gdy przeprowadzi pełny dowód.

Zadanie 9. (0-3)

Z cyfr 0, 1, 2, 7 tworzymy sześciocyfrowe liczby całkowite dodatnie, w których suma cyfr jest równa 9. Oblicz, ile możemy utworzyć takich liczb.

Rozwiązanie (I sposób)

Musimy rozpatrzyć 4 przypadki:

- $7+1+1+0+0+0$

Pierwszą cyfrą może być 7. Takich liczb jest $\frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$ lub $\binom{5}{3} \cdot \binom{2}{2} = 10$

Pierwszą cyfrą może być 1. Takich liczb jest $\frac{5!}{3!} = 20$ lub $\binom{5}{3} \cdot 2 = 20$

- $7+2+0+0+0+0$

Pierwszą cyfrą może być 7. Takich liczb jest $\frac{5!}{4!} = 5$ lub $\binom{5}{4} = 5$

Pierwszą cyfrą może być 2. Takich liczb jest $\frac{5!}{4!} = 5$ lub $\binom{5}{4} = 5$

- $2+2+2+2+1+0$

Pierwszą cyfrą może być 1. Takich liczb jest $\frac{5!}{4!} = 5$ lub $\binom{5}{4} = 5$

Pierwszą cyfrą może być 2. Takich liczb jest $\frac{5!}{3!} = 20$ lub $\binom{5}{3} \cdot \binom{2}{1} = 20$

- $2+2+2+1+1+1$

Takich liczb jest $\frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$ lub $\binom{6}{3} = 20$.

Razem mamy więc 85 liczb sześciocyfrowych w których suma cyfr jest równa 9.

Rozwiązanie (II sposób)

- $7+1+1+0+0+0$

7	1	1	0	0	0
7	0	1	1	0	0
7	0	0	1	1	0
7	0	0	0	1	1
7	1	0	1	0	0
7	0	1	0	1	0
7	0	0	1	0	1
7	1	0	0	1	0
7	0	1	0	0	1
7	1	0	0	0	1

1	1	7	0	0	0
1	0	1	7	0	0
1	0	0	1	7	0
1	0	0	0	1	7
1	1	0	7	0	0
1	0	1	0	7	0
1	0	0	1	0	7
1	1	0	0	7	0
1	0	1	0	0	7
1	1	0	0	0	7

1	7	1	0	0	0
1	0	7	1	0	0
1	0	0	7	1	0
1	0	0	0	7	1
1	7	0	1	0	0
1	0	7	0	1	0
1	0	0	7	0	1
1	7	0	0	1	0
1	0	7	0	0	1
1	7	0	0	0	1

Powyższych liczb jest 30

• $7+2+0+0+0+0$

7	2	0	0	0	0
7	0	2	0	0	0
7	0	0	2	0	0
7	0	0	0	2	0
7	0	0	0	0	2

2	7	0	0	0	0
2	0	7	0	0	0
2	0	0	7	0	0
2	0	0	0	7	0
2	0	0	0	0	7

Powyższych liczb jest **10**

• $2+2+2+2+1+0$

1	2	2	2	2	0
1	2	2	2	0	2
1	2	2	0	2	2
1	2	0	2	2	2
1	0	2	2	2	2
2	2	2	2	1	0
2	2	2	1	0	2
2	2	1	0	2	2
2	1	0	2	2	2

2	2	2	2	0	1
2	2	2	0	1	2
2	2	0	1	2	2
2	0	1	2	2	2
2	0	2	1	2	2
2	2	0	2	1	2
2	2	2	0	2	1
2	1	2	0	2	2
2	2	1	2	0	2

2	2	2	1	2	0
2	0	2	2	1	2
2	2	0	2	2	1
2	1	2	2	0	2
2	2	1	2	2	0
2	1	2	2	2	0
2	0	2	2	2	1

Powyższych liczb jest **25**

• $2+2+2+1+1+1$

2	2	2	1	1	1
1	2	2	2	1	1
1	1	2	2	2	1
1	1	1	2	2	2
2	2	1	2	1	1
2	2	1	1	2	1
2	2	1	1	1	2
1	2	2	1	2	1

1	2	2	1	1	2
1	1	2	2	1	2
2	1	2	2	1	1
2	1	1	2	2	1
1	2	1	2	2	1
2	1	1	1	2	2
1	2	1	1	2	2
1	1	2	1	2	2

2	1	2	1	2	1
1	2	1	2	1	2
2	1	2	1	1	2
2	1	1	2	1	2

Powyższych liczb jest **20**

Razem mamy więc 85 liczb sześciocyfrowych w których suma cyfr jest równa 9.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje 1 p.
gdy wymieni cztery możliwości uzyskania sumy cyfr równej 9, tzn. (7,1,1,0,0,0) lub (7,2,0,0,0,0) lub (2,2,2,2,1,0) lub (2,2,2,1,1,1).

Zdający otrzymuje 2 p.
gdy poprawnie obliczy prawidłowo ilość liczb sześciocyfrowych w trzech spośród czterech wymienionych przypadków.

Zdający otrzymuje 3 p.
gdy obliczy, że jest 85 liczb sześciocyfrowych określonych warunkami zadania.

Uwaga

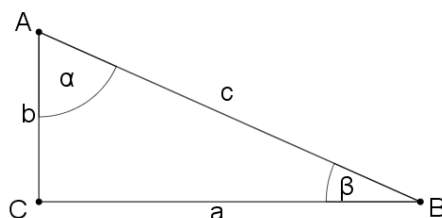
Jeżeli zdający pominie jeden przypadek i rozwiąże zadanie do końca otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 10. (0-5)

W trójkącie prostokątnym długość przeciwprostokątnej stanowi 75% sumy długości przyprostokątnych. Oblicz sinusy kątów ostrych w tym trójkącie.

Rozwiązanie

Wprowadźmy następujące oznaczenia: $|BC| = a$, $|AC| = b$, $|AB| = c$, $|\angle CAB| = \alpha$, $|\angle ABC| = \beta$ oraz załóżmy, że $a \geq b$.



$$c = 75\%(a + b)$$

$$c = \frac{3}{4}(a + b)$$

(I sposób rozwiązania)

$$b = \frac{4}{3}c - a$$

Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że $c^2 = a^2 + b^2$, zatem

$$\begin{cases} b = \frac{4}{3}c - a \\ c^2 = a^2 + b^2 \end{cases}$$

$$c^2 = a^2 + \left(\frac{4}{3}c - a\right)^2$$

$$c^2 = a^2 + \frac{16}{9}c^2 - \frac{8}{3}ac + a^2$$

$$9c^2 = 9a^2 + 16c^2 - 24ac + 9a^2$$

$$18a^2 + 7c^2 - 24ac = 0 \quad |:c^2$$

$$18\left(\frac{a}{c}\right)^2 - 24\frac{a}{c} + 7 = 0$$

Zauważmy, że $\frac{a}{c} = \sin \alpha$. Dla ułatwienia obliczeń wprowadźmy następujące oznaczenie: $\frac{a}{c} = t$,

gdzie $t \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right)$, gdyż $\alpha \geq 45^\circ$.

$$18t^2 - 24t + 7 = 0$$

$$\Delta = 576 - 504 = 72$$

$$t_1 = \frac{24-6\sqrt{2}}{36} = \frac{4-\sqrt{2}}{6} \text{ - sprzeczność z założeniem}$$

$$t_2 = \frac{24+6\sqrt{2}}{36} = \frac{4+\sqrt{2}}{6}$$

Ostatecznie $\sin \alpha = \frac{4+\sqrt{2}}{6}$.

Postępując w sposób analogiczny podstawiając $c^2 = a^2 + b^2$ wyrażenie $a = \frac{4}{3}c - b$ otrzymujemy

$$18\left(\frac{b}{c}\right)^2 - 24\frac{b}{c} + 7 = 0 \text{ gdzie } \frac{b}{c} = \sin \beta. \text{ Wprowadźmy następujące oznaczenie: } \frac{b}{c} = m, \text{ gdzie}$$

$$m \in \left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \text{ gdyż } \alpha \leq 45^\circ.$$

$$18m^2 - 24m + 7 = 0$$

$$m_1 = \frac{24-6\sqrt{2}}{36} = \frac{4-\sqrt{2}}{6}$$

$$m_2 = \frac{24+6\sqrt{2}}{36} = \frac{4+\sqrt{2}}{6} \text{ - sprzeczność z założeniem}$$

Ostatecznie $\sin \beta = \frac{4-\sqrt{2}}{6}$.

Schemat punktowania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania 1 p.

Zdający zapisze układ równań
$$\begin{cases} c = 75\%(a+b) \\ c^2 = a^2 + b^2 \end{cases}$$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.

Zdający zapisze równanie z dwiema niewiadomymi, np. $18a^2 + 7c^2 - 24ac = 0$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania..... 3 p.

Zdający

- zapisze równanie z dwiema niewiadomymi, np. $18\left(\frac{a}{c}\right)^2 - 24\frac{a}{c} + 7 = 0$ i zauważy, że

$$\frac{a}{c} = \sin \alpha$$

albo

- zapisze równanie z dwiema niewiadomymi, np. $18\left(\frac{b}{c}\right)^2 - 24\frac{b}{c} + 7 = 0$ i zauważy, że

$$\frac{b}{c} = \sin \beta$$

Rozwiązanie prawie pełne 4 p.

Zdający

- popełni błąd rachunkowy na etapie przekształcania układu równań i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca

albo

- obliczy poprawnie jedną wartość $\sin \alpha = \frac{4 + \sqrt{2}}{6}$ lub $\sin \beta = \frac{4 - \sqrt{2}}{6}$

Rozwiązanie pełne 5 p.

Zdający obliczy $\sin \alpha = \frac{4 + \sqrt{2}}{6}$ oraz $\sin \beta = \frac{4 - \sqrt{2}}{6}$

(II sposób rozwiązania)

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa wynika, że $c^2 = a^2 + b^2$,

$$\left(\frac{3a + 3b}{4}\right)^2 = a^2 + b^2$$

$$9a^2 + 18ab + 9b^2 = 16a^2 + 16b^2$$

$$7a^2 - 18ab + 7b^2 = 0 \quad / : b^2$$

$$7\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 18\frac{a}{b} + 7 = 0$$

Podstawiając zmienną pomocniczą za $\frac{a}{b} = t$, gdzie $t \geq 1$ otrzymujemy $7t^2 - 18t + 7 = 0$.

Rozwiązując równanie otrzymujemy $t = \frac{9 + 4\sqrt{2}}{7}$.

$$\frac{a}{b} = \frac{9 + 4\sqrt{2}}{7}$$

Istnieje więc taka liczba dodatnia x , że $a = (9 + 4\sqrt{2})x$, $b = 7x$

$$c^2 = 49x^2 + (9 + 4\sqrt{2})^2 x^2$$

$$c^2 = (162 + 72\sqrt{2})x^2$$

$$c = \sqrt{162 + 72\sqrt{2}}x$$

$$c = 3\sqrt{18 + 8\sqrt{2}}x$$

$$c = 3\sqrt{(4 + \sqrt{2})^2}x$$

$$c = 3(4 + \sqrt{2})x$$

Korzystając z definicji funkcji sinus w trójkącie prostokątnym otrzymujemy

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{(9 + 4\sqrt{2})x}{3(4 + \sqrt{2})x} = \frac{(9 + 4\sqrt{2})(4 - \sqrt{2})}{3(4 + \sqrt{2})(4 - \sqrt{2})}$$

$$\sin \alpha = \frac{28 + 7\sqrt{2}}{42}$$

$$\sin \alpha = \frac{4 + \sqrt{2}}{6}$$

$$\sin \beta = \frac{b}{c} = \frac{7x}{3(4 + \sqrt{2})x} = \frac{7(4 - \sqrt{2})}{3(4 + \sqrt{2})(4 - \sqrt{2})}$$

$$\sin \beta = \frac{28 - 7\sqrt{2}}{42}$$

$$\sin \beta = \frac{4 - \sqrt{2}}{6}$$

Schemat punktowania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania 1 p.

Zdający zapisze układ równań
$$\begin{cases} c = 75\%(a + b) \\ c^2 = a^2 + b^2 \end{cases}$$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.

Zdający zapisze równanie z dwiema niewiadomymi, np. $7a^2 - 18ab + 7b^2 = 0$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania..... 3 p.

Zdający zapisze równanie z dwiema niewiadomymi, np. $7\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 18\frac{a}{b} + 7 = 0$ i zauważy, że

$$\frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Rozwiązanie prawie pełne 4 p.

Zdający

- popełni błąd rachunkowy na etapie rozwiązywania układu równań i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca

albo

- obliczy poprawnie jedną wartość $\sin \alpha = \frac{4 + \sqrt{2}}{6}$ lub $\sin \beta = \frac{4 - \sqrt{2}}{6}$.

Rozwiązanie pełne 5 p.

Zdający obliczy $\sin \alpha = \frac{4 + \sqrt{2}}{6}$ oraz $\sin \beta = \frac{4 - \sqrt{2}}{6}$.

Zadanie 11. (0-5)

Dla jakich wartości parametru m wykres funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = (m+3)x^2 + (1-2m)x + 1+m$$

przecina oś odciętych w dwóch różnych punktach, których odległość jest mniejsza od 2.

Rozwiązanie

Ustalamy warunki, które muszą być spełnione.

$$\begin{cases} m+3 \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ |x_1 - x_2| < 2 \end{cases}$$

1)

$$\begin{aligned} m+3 &\neq 0 \\ m &\neq -3 \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} \Delta &> 0 \\ (1-2m)^2 - 4(m+3)(m+1) &> 0 \\ 1-4m+4m^2 - 4m^2 - 16m - 12 &> 0 \\ -20m &> 11 \\ m &< -\frac{11}{20} \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned} |x_1 - x_2| &< 2 \\ x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 &< 4 \\ (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 - 4 &< 0 \end{aligned}$$

Korzystając ze wzorów Viete'a otrzymujemy

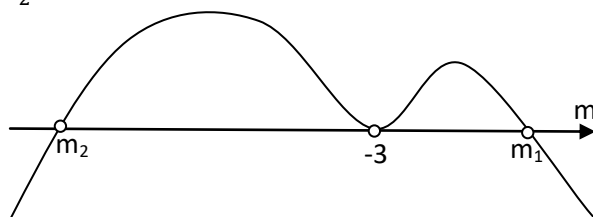
$$\begin{aligned} \left(\frac{2m-1}{m+3}\right)^2 - 4\frac{m+1}{m+3} - 4 &< 0 \\ \frac{-4m^2 - 44m - 47}{(m+3)^2} &< 0 \\ (-4m^2 - 44m - 47)(m+3)^2 &< 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -4m^2 - 44m - 47 = 0 \quad \text{lub} \quad m+3 = 0 \\ \Delta = (-44)^2 - 4 \cdot (-4) \cdot (-47) \quad m = -3 \\ \Delta = 1936 - 752 = 1184 \end{aligned}$$

$$\sqrt{\Delta} = 4\sqrt{74}$$

$$m_1 = \frac{44-4\sqrt{74}}{-8}, m_2 = \frac{44+4\sqrt{74}}{-8}$$

$$m_1 = \frac{\sqrt{74}-11}{2}, m_2 = \frac{-\sqrt{74}-11}{2}$$



$$m \in \left(-\infty; \frac{-11 - \sqrt{74}}{2} \right) \cup \left(\frac{-11 + \sqrt{74}}{2}; +\infty \right)$$

Warunki zadania są spełnione dla $m \in \left(-\infty; \frac{-11 - \sqrt{74}}{2} \right) \cup \left(\frac{-11 + \sqrt{74}}{2}; -\frac{11}{20} \right)$

Schemat punktowania

Rozwiązanie zadania składa się z czterech etapów.

Pierwszy etap polega na zapisaniu układu nierówności

$$\begin{cases} m + 3 \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ |x_1 - x_2| < 2 \end{cases}$$

Uwaga

Jeżeli zdający zapisze, że $\Delta \geq 0$ lub pominie zapis $m + 3 \neq 0$, to za ten etap otrzymuje **0 punktów**.

Drugi etap polega na rozwiązaniu nierówności $\Delta > 0$.

Za poprawne rozwiązanie zdający otrzymuje **1 punkt**.

Trzeci etap polega na rozwiązaniu nierówności $|x_1 - x_2| < 2$.

Za tę część zdający otrzymuje **2 punkty**.

Poniżej podział punktów za trzeci etap rozwiązania:

Zdający otrzymuje **1 punkt**, gdy zapisze nierówność $|x_1 - x_2| < 2$ w postaci równoważnej zawierającej jedynie sumę i iloczyn pierwiastków trójmianu kwadratowego

$$f(x) = (m+3)x^2 + (1-2m)x + 1 + m, \text{ np.: } (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 - 4 < 0.$$

Zdający otrzymuje **2 punkt**, gdy poprawnie rozwiąże nierówność

$$m \in \left(-\infty; \frac{-11 - \sqrt{74}}{2} \right) \cup \left(\frac{-11 + \sqrt{74}}{2}; +\infty \right)$$

Czwarty etap polega na wyznaczeniu części wspólnej zbiorów rozwiązań wszystkich trzech warunków zapisanych w układzie w pierwszym rozwiązaniu:

$$m \in \left(-\infty; \frac{-11 - \sqrt{74}}{2} \right) \cup \left(\frac{-11 + \sqrt{74}}{2}; -\frac{11}{20} \right).$$

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

Uwagi

1. W przypadku otrzymania na jednym z etapów (II lub III) zbioru pustego lub zbioru R jako zbioru rozwiązań nierówności przyznajemy **0 punktów** za IV etap.
2. W przypadku, gdy zdający błędnie przyjmie, że $\Delta \geq 0$ i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty**.

Zadanie 12. (0-4)

Rozwiąż równanie $\frac{6\sin 2x}{\operatorname{tg} x} + 5\cos x = 4\cos^4 x + \cos 2x \cos x$ w przedziale $(-2\pi; 2\pi)$.

Rozwiązanie

Założenie: $x \in (-2\pi; 2\pi) - \left\{-\frac{3\pi}{2}, -\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\}$

$$\frac{6 \sin 2x}{\operatorname{tg} x} + 5 \cos x = 4 \cos^4 x + \cos 2x \cos x$$

$$\frac{12 \sin x \cos x}{\frac{\sin x}{\cos x}} + 5 \cos x = 4 \cos^4 x + (2 \cos^2 x - 1) \cos x$$

$$12 \cos^2 x + 5 \cos x = 4 \cos^4 x + 2 \cos^3 x - \cos x$$

$$-4 \cos^4 x - 2 \cos^3 x + 12 \cos^2 x + 6 \cos x = 0$$

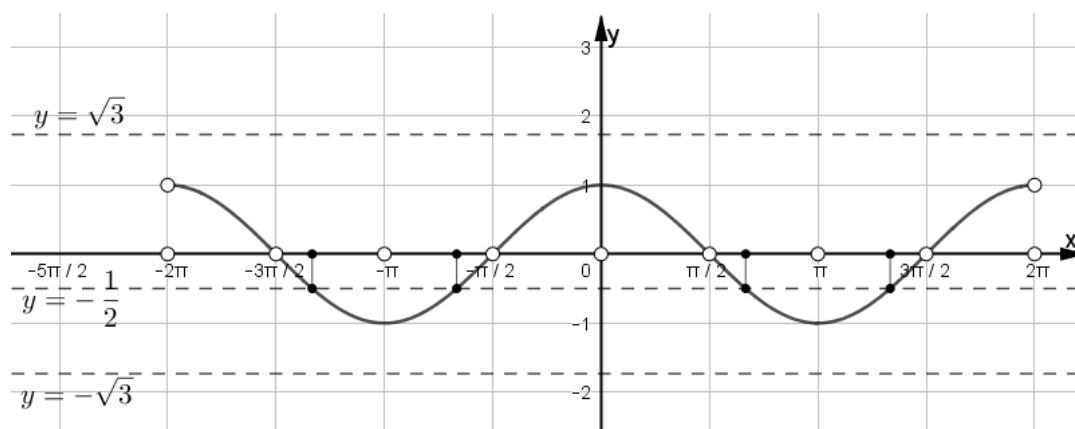
$$-2 \cos^4 x - \cos^3 x + 6 \cos^2 x + 3 \cos x = 0$$

$$\cos x (-2 \cos^3 x - \cos^2 x + 6 \cos x + 3) = 0$$

$$\cos x [-\cos^2 x (2 \cos x + 1) + 3(2 \cos x + 1)] = 0$$

$$\cos x (2 \cos x + 1)(3 - \cos^2 x) = 0$$

$$\cos x = 0 \vee \cos x = -\frac{1}{2} \vee \cos x = -\sqrt{3} \vee \cos x = \sqrt{3}$$



$$x \in \left\{-\frac{4}{3}\pi, -\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi\right\}$$

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania 1 p.

Zdający

- wykona konieczne założenia, np. $x \in (-2\pi; 2\pi) - \left\{-\frac{3\pi}{2}, -\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\}$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy

albo

- zapisze równanie używając jednej funkcji trygonometrycznej tego samego kąta, np.
 $-2\cos^4 x - \cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x = 0$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.

Zdający wykona konieczne założenia i zapisze równanie używając jednej funkcji trygonometrycznej, np. $-2\cos^4 x - \cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x = 0$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania..... 3 p.

Zdający wykona konieczne założenia i zapisze że

$$\cos x = 0 \vee \cos x = -\frac{1}{2} \vee \cos x = -\sqrt{3} \vee \cos x = \sqrt{3}.$$

Rozwiązanie pełne 4 p.

Zdający zapisze rozwiązanie równania, np.: $x \in \left\{ -\frac{4}{3}\pi, -\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi \right\}$.

Uwaga

1. Jeżeli zdający nie wykona odpowiednich założeń i w rozwiązaniu poda liczby nie będące w zbiorze rozwiązań, to za całe zadanie może otrzymać maksymalnie **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający wykona odpowiednie założenia, ale w rozwiązaniu ich nie uwzględni, to za całe rozwiązanie może otrzymać maksymalnie **3 punkty**.

Zadanie 13. (0-5)

Liczby a , b , c w podanej kolejności tworzą trzywyrazowy ciąg arytmetyczny. Suma tych liczb jest równa 15. Jeśli do pierwszej z tych liczb dodamy 2, drugą podwoimy, a do trzeciej dodamy 13, to otrzymamy trzy początkowe wyrazy rosnącego ciągu geometrycznego (b_n) . Wyznacz a , b , c oraz wyznacz wartość n , dla którego $4b_{3n} = b_{n+20}$

Przykładowe rozwiązanie

Liczby a , b , c w podanej kolejności tworzą trzywyrazowy ciąg arytmetyczny, więc

$$b - a = c - b$$

Suma liczb wynosi 15, więc

$$a + b + c = 15$$

Liczby $a + 2$, $2b$, $c + 13$ w podanej kolejności tworzą trzywyrazowy ciąg geometryczny, więc

$$(2b)^2 = (a + 2)(c + 13)$$

$$\text{Rozwiążmy układ równań: } \begin{cases} b - a = c - b \\ a + b + c = 15 \\ 4b^2 = (a + 2)(c + 13) \end{cases}$$

$$\text{Rozwiązując układ otrzymujemy: } \begin{cases} a = 3 \\ b = 5 \\ c = 7 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} a = 18 \\ b = 5 \\ c = -8 \end{cases}$$

Dla wyznaczonych wartości otrzymujemy dwa ciągi geometryczne:

Pierwszy, w którym $b_1 = 3 + 2 = 5$, $b_2 = 2 \cdot 5 = 10$, $b_3 = 7 + 13 = 20$ (jest to ciąg rosnący),

drugi, w którym $b_1 = 18 + 2 = 20$, $b_2 = 2 \cdot 5 = 10$, $b_3 = -8 + 13 = 5$ (jest to ciąg malejący, który nie spełnia warunków zadania).

W ciągu (b_n) $b_1 = 5$, $q = 2$, więc korzystając ze wzoru na n -ty wyraz ciągu geometrycznego otrzymujemy $b_n = 5 \cdot 2^{n-1}$.

$$4b_{3n} = b_{n+20}$$

$$4 \cdot 5 \cdot 2^{3n-1} = 5 \cdot 2^{n+20-1}$$

$$2^{3n+1} = 2^{n+19}$$

$$3n+1 = n+19$$

$$n = 9$$

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania 1 p.

Zdający zapisze układ równań
$$\begin{cases} b - a = c - b \\ a + b + c = 15 \\ 4b^2 = (a + 2)(c + 13) \end{cases}$$
 i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.

Zdający rozwiąże układ równań otrzymując następujące rozwiązania:
$$\begin{cases} a = 3 \\ b = 5 \\ c = 7 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} a = 18 \\ b = 5 \\ c = -8 \end{cases}$$
 i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania..... 3 p.

Zdający wybierze właściwe rozwiązanie układu, tj:
$$\begin{cases} a = 3 \\ b = 5 \\ c = 7 \end{cases}$$
 oraz obliczy, że w ciągu (b_n) $b_1 = 5$, $q = 2$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie prawie pełne 4 p.

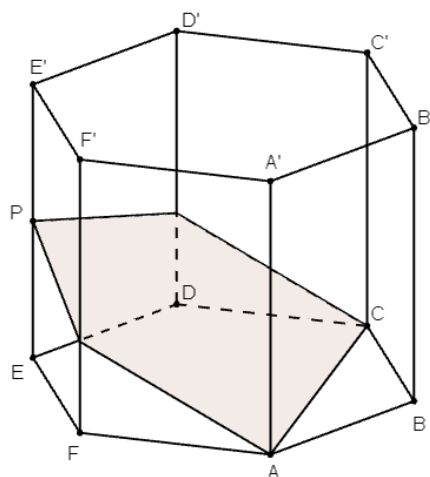
Zdający zapisze warunek, z którego może obliczyć n , np.: $4 \cdot 5 \cdot 2^{3n-1} = 5 \cdot 2^{n+20-1}$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne 5 p.

Zdający wyznaczy
$$\begin{cases} a = 3 \\ b = 5 \\ c = 7 \end{cases}$$
 oraz wyznaczy wartość $n = 9$, dla którego $4b_{3n} = b_{n+20}$.

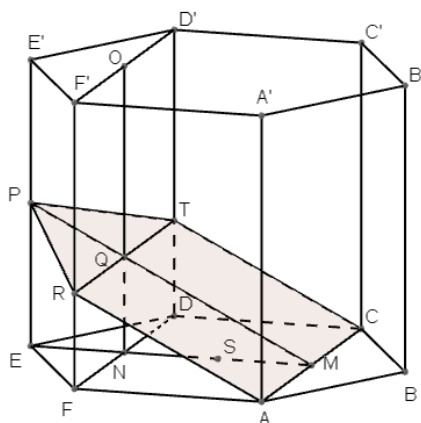
Zadanie 14. (0-6)

Graniastosłup prawidłowy sześciokątny, w którym krawędź podstawy ma długość 4 przecięto płaszczyzną zawierającą krótszą przekątną podstawy AC oraz punkt P , który jest środkiem krawędzi bocznej EE' (rysunek obok). Oblicz objętość graniastosłupa, jeśli pole przekroju jest równe $10\sqrt{15}$.

**Przykładowe rozwiązanie**

Wprowadźmy oznaczenia tak jak na rysunku.

Dla ułatwienia obliczeń oznaczmy, że krawędź podstawy $a = 4$, wysokość $|EE'| = h$, $|EP| = \frac{h}{2}$.



Zauważmy, że $|AC| = |RT| = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$,

$|EN| = |NS| = |SM| = 2$, zatem $|EM| = 6$ oraz $|NM| = 4$.

I sposób wyznaczenia wysokości graniastosłupa

Odcinki EP oraz NQ są równoległe, więc z twierdzenia Talesa wynika, że $\frac{EN}{NM} = \frac{PQ}{QM} = \frac{1}{2}$.

Wprowadźmy zatem następujące oznaczenia: $|PQ| = x$, $|QM| = 2x$.

Przekrój $ACTPR$ jest pięciokątem będącym sumą dwóch figur: prostokąta $ACTR$ oraz trójkąta TPR .

Pole przekroju $P = 10\sqrt{15}$, więc

$$|AC| \cdot |QM| + \frac{1}{2} \cdot |RT| \cdot |PQ| = 10\sqrt{15}$$

$$4\sqrt{3} \cdot 2x + \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot x = 10\sqrt{15}$$

$$10\sqrt{3}x = 10\sqrt{15}$$

$$x = \sqrt{5}$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta EMP wynika, że

$$(3\sqrt{5})^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + 6^2$$

$$\left(\frac{h}{2}\right)^2 = 9$$

$$h = 6$$

II sposób wyznaczenia wysokości graniastosłupa

Trójkąt MEP jest prostokątny, więc $|PM|^2 = |PE|^2 + |EM|^2$

$$|PM|^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + 6^2$$

$$|PM| = \sqrt{\frac{h^2}{4} + 36} = \frac{\sqrt{h^2 + 144}}{2}$$

Trójkąty MEP oraz MNQ są podobne, więc $\frac{PM}{EM} = \frac{QM}{NM}$

$$\frac{\frac{\sqrt{h^2 + 144}}{2}}{6} = \frac{QM}{4}$$

$$|QM| = \frac{\sqrt{h^2 + 144}}{3}$$

$$|PQ| = |PM| - |QM|, \text{ więc } |PQ| = \frac{\sqrt{h^2 + 144}}{6}$$

Przekrój $ACTPR$ jest pięciokątem będącym sumą dwóch figur: prostokąta $ACTR$ oraz trójkąta TPR .

Pole przekroju $P = 10\sqrt{15}$, więc

$$|AC| \cdot |QM| + \frac{1}{2} \cdot |RT| \cdot |PQ| = 10\sqrt{15}$$

$$4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{h^2 + 144}}{3} + \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{h^2 + 144}}{6} = 10\sqrt{15}$$

$$\sqrt{h^2 + 144} = 6\sqrt{5}$$

$$h^2 + 144 = 180$$

$$h^2 = 36$$

$$h = 6$$

Obliczenie objętości graniastosłupa

$$V = 6 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot h$$

$$V = 6 \cdot \frac{4^2 \sqrt{3}}{4} \cdot 6$$

$$V = 144\sqrt{3}$$

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania 1 p.

Zdający

- obliczy długość odcinka $|AC| = 4\sqrt{3}$

albo

- obliczy długość jednego z odcinków $|EN| = 2$ lub $|EM| = 6$ lub $|NM| = 4$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.

Zdający

- zapisze długość jednego z odcinków PQ , QM lub PM w zależności od wysokości h , np.:

$$|PM| = \frac{\sqrt{h^2 + 144}}{2} \text{ lub } |QM| = \frac{\sqrt{h^2 + 144}}{3} \text{ lub } |PQ| = \frac{\sqrt{h^2 + 144}}{6}$$

albo

- zapisze, że $\frac{EN}{NM} = \frac{PQ}{QM} = \frac{1}{2}$ i na tym zakończy, lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 4 p.

Zdający

- zapisze warunek pozwalający na obliczenie wysokości h , np.:

$$4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{h^2 + 144}}{3} + \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{h^2 + 144}}{6} = 10\sqrt{15}$$

albo

- zapisze warunek pozwalający obliczyć wartość x , np.:

$$4\sqrt{3} \cdot 2x + \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot x = 10\sqrt{15}$$

Rozwiązanie prawie pełne 5 p.

Zdający

- obliczy wysokość $h = 6$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy

albo

- popełni błąd rachunkowy przy wyznaczaniu wysokości h i dla błędnie wyznaczonej wysokości prawidłowo obliczy objętość graniastosłupa.

Rozwiązanie pełne 6 p.

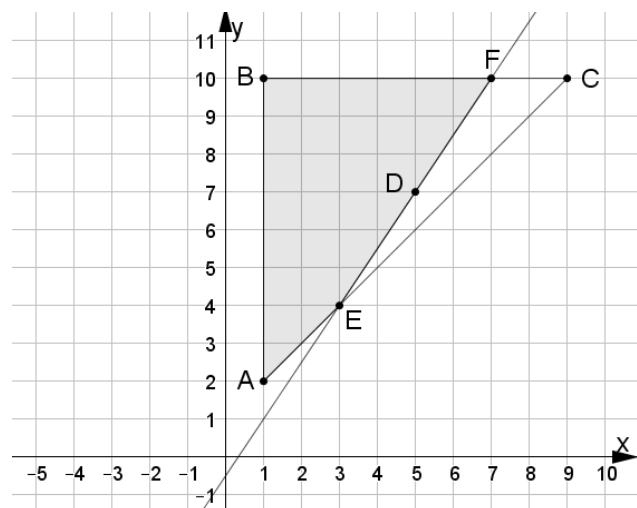
Zdający

- obliczy objętość graniastosłupa $V = 144\sqrt{3}$.

Zadanie 15. (0-7)

Dany jest trójkąt ABC gdzie $A = (1, 2)$, $B = (1, 10)$ i $C = (9, 10)$. Przez punkt $D = (5, 7)$ poprowadzono prostą o współczynniku kierunkowym dodatnim, która przecina boki AC i BC trójkąta odpowiednio w punktach E oraz F . Wyznacz współrzędne punktów E i F , dla których pole czworokąta $AEFB$ jest największe.

Przykładowe rozwiązanie (I sposób)



Niech prosta EF ma równanie $y = ax + b$, gdzie $a > 0$. Prosta ta przechodzi przez punkt $D = (5, 7)$ zatem

$$\begin{aligned} 7 &= 5a + b \\ b &= 7 - 5a \end{aligned}$$

Prostą EF można opisać równaniem $y = ax + 7 - 5a$.

Współczynnik kierunkowy prostej DC wynosi $\frac{3}{5}$, a prostej AD jest równy $\frac{5}{4}$, więc aby prosta EF przecinała boki AC i BC trójkąta odpowiednio w punktach E oraz F współczynnik kierunkowy a musi spełniać następujące warunki: $a > \frac{3}{5}$ oraz $a > \frac{5}{4}$, a zatem $a \in \left(\frac{5}{4}; +\infty\right)$.

Wyznamy współrzędne punktów E oraz F w zależności od a .

Zauważmy, że prosta AC ma równanie $y = x + 1$.

Wyznamy współrzędne punktu E :

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = ax + 7 - 5a \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{6a-7}{a-1} \\ x = \frac{5a-6}{a-1} \end{cases}$$

$$E = \left(\frac{5a-6}{a-1}, \frac{6a-7}{a-1} \right)$$

Wyznaczamy współrzędne punktu F :

$$\begin{cases} y = 10 \\ y = ax + 7 - 5a \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 10 \\ x = \frac{5a+3}{a} \end{cases}$$

$$F = \left(\frac{5a+3}{a}, 10 \right)$$

Pole czworokąta $AEFB$ jest największe, jeśli pole trójkąta EFC jest najmniejsze.

Zapiszmy pole trójkąta EFC w zależności od a .

$P = \frac{1}{2} \cdot |FC| \cdot h$, gdzie h jest odległością punktu E od prostej BC .

$$P = \frac{1}{2} \left(9 - \frac{5a+3}{a} \right) \left(10 - \frac{6a-7}{a-1} \right)$$

Po przekształceniach otrzymujemy

$$P(a) = \frac{16a^2 - 24a + 9}{2a^2 - 2a}, \text{ gdzie } a \in \left(\frac{5}{4}; +\infty \right)$$

$$P'(a) = \frac{8a^2 - 18a + 9}{2(a^2 - a)^2}$$

Badamy monotoniczność i wyznaczamy ekstrema funkcji P , przy założeniu, że $a \in \left(\frac{5}{4}; +\infty \right)$.

$$P'(a) = 0 \Leftrightarrow \frac{8a^2 - 18a + 9}{2(a^2 - a)^2} = 0$$

$$P'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 1\frac{1}{2}$$

$$P'(a) > 0 \Leftrightarrow \frac{8a^2 - 18a + 9}{2(a^2 - a)^2} > 0$$

$$a \in \left(1\frac{1}{2}; +\infty \right)$$

$$P'(a) < 0 \Leftrightarrow \frac{8a^2 - 18a + 9}{2(a^2 - a)^2} < 0$$

$$a \in \left(1\frac{1}{4}; 1\frac{1}{2}\right)$$

Funkcja P jest malejąca w przedziale $\left(1\frac{1}{4}; 1\frac{1}{2}\right)$, rosnąca w przedziale $\left(1\frac{1}{2}; +\infty\right)$, a w punkcie $a = 1\frac{1}{2}$ osiąga minimum lokalne, które jest zarazem najmniejszą wartością tej funkcji. W związku z tym dla $a = 1\frac{1}{2}$ pole trójkąta EFC jest najmniejsze, a zatem pole czworokąta $AEFB$ jest największe.

Wyznaczamy współrzędne punktów E i F .

$$E = \left(\frac{5 \cdot 1,5 - 6}{1,5 - 1}, \frac{6 \cdot 1,5 - 7}{1,5 - 1}\right) = (3, 4)$$

$$F = \left(\frac{5 \cdot 1,5 + 3}{1,5}, 10\right) = (7, 10)$$

Schemat punktowania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

- **Pierwszy etap** składa się z trzech części:
 - a) zapisanie prostej EF równaniem w zależności od parametru a . (prosta ta przechodzi przez punkt D więc równanie prostej EF można opisać równaniem $y = ax + 7 - 5a$),
 - b) zapisanie pola trójkąta EFC w zależności od a : $P(a) = \frac{1}{2} \left(9 - \frac{5a + 3}{a}\right) \left(10 - \frac{6a - 7}{a - 1}\right)$,
 - c) określenie dziedziny funkcji P : $\left(\frac{5}{4}; +\infty\right)$.

Za każdą z części tego etapu zdający otrzymuje po **1 punkcie**.

- **Drugi etap** składa się z trzech części:

- a) wyznaczenie pochodnej funkcji wymiernej $P(a) = \frac{16a^2 - 24a + 9}{2a^2 - 2a}$:

$$P'(a) = \frac{8a^2 - 18a + 9}{2(a^2 - a)^2},$$

- b) obliczenie miejsca zerowego pochodnej: $a = 1\frac{1}{2}$,

- c) uzasadnienie, że dla $a = 1\frac{1}{2}$ funkcja P osiąga najmniejszą wartość, np. zapisanie, że w

przedziale $\left(1\frac{1}{4}; 1\frac{1}{2}\right)$ funkcja jest malejąca, w przedziale $\left(1\frac{1}{2}; +\infty\right)$ rosnąca oraz

$P'\left(1\frac{1}{2}\right) = 0$, więc dla $a = 1\frac{1}{2}$ funkcja P osiąga minimum lokalne, które jest wartością najmniejszą tej funkcji.

Za poprawne rozwiązanie każdej z części tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**, o ile poprzednia część etapu została zrealizowana bezbłędnie.

Uwaga

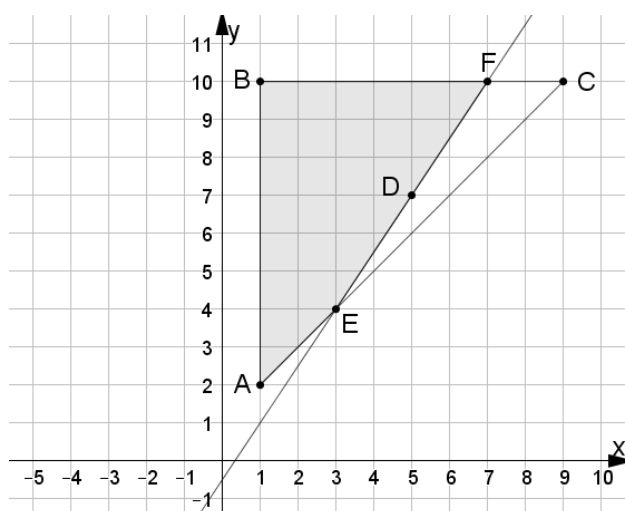
Jeżeli zdający nie wyznaczy dziedziny funkcji P , np. $a \in \left(\frac{5}{4}; +\infty\right)$, to za trzecią część drugiego etapu może otrzymać **1 punkt** tylko wtedy, gdy wyznaczy współrzędne punktów E i F oraz sprawdzi, że punkty te należą do odcinków odpowiednio AC i BC .

• Trzeci etap

Obliczenie współrzędnych punktów $E = (3, 4)$ oraz $F = (7, 10)$, dla których pole czworokąta $AEFB$ jest największe.

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

Przykładowe rozwiązanie (II sposób)



Wprowadźmy oznaczenie: $F = (m, 10)$, gdzie $m \in (5; 9)$.

Wyznamy równanie prostej DF .

$$y = ax + b$$

$$\begin{cases} 10 = am + b \\ 7 = 5a + b \end{cases}$$

Po rozwiązaniu układu otrzymujemy

$$\begin{cases} a = \frac{3}{m-5} \\ b = \frac{7m-50}{m-5} \end{cases}$$

Prostą DF możemy zapisać $y = \frac{3}{m-5}x + \frac{7m-50}{m-5}$

Wyznaczymy współrzędne punktu E .

$$\begin{cases} y = \frac{3}{m-5}x + \frac{7m-50}{m-5} \\ y = x+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{6m-45}{m-8} \\ y = \frac{7m-53}{m-8} \end{cases}$$

Wykonajmy odpowiednie założenia: $1 < x < 5$ więc $1 < \frac{6m-45}{m-8} < 5$.

$$\begin{cases} \frac{6m-45}{m-8} > 1 \\ \frac{6m-45}{m-8} < 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m \in \left(-\infty; 7\frac{2}{5}\right) \cup (8; +\infty) \\ m \in (5; 8) \end{cases}$$

Ostatecznie otrzymujemy $E = \left(\frac{6m-45}{m-8}, \frac{7m-53}{m-8}\right)$, gdzie $m \in \left(5; 7\frac{2}{5}\right)$.

Pole czworokąta $AEFB$ jest największe, jeśli pole trójkąta EFC jest najmniejsze.

Zapiszmy pole trójkąta EFC w zależności od m .

$P = \frac{1}{2} \cdot |FC| \cdot h$, gdzie h jest odległością punktu E od prostej BC .

$$P(m) = \frac{1}{2} \cdot (9-m) \cdot \left(10 - \frac{7m-53}{m-8}\right), \quad m \in \left(5; 7\frac{2}{5}\right)$$

$$P(m) = \frac{3}{2} \cdot \frac{-m^2 + 18m - 81}{m-8},$$

$$P'(m) = \frac{3}{2} \cdot \frac{-m^2 + 16m - 63}{(m-8)^2}$$

Badamy monotoniczność i wyznaczamy ekstrema funkcji P , przy założeniu, że $m \in \left(5; 7\frac{2}{5}\right)$.

$$P'(m) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2} \cdot \frac{-m^2 + 16m - 63}{(m-8)^2} = 0$$

$$P'(m) = 0 \Leftrightarrow m = 7$$

$$P'(m) > 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2} \cdot \frac{-m^2 + 16m - 63}{(m-8)^2} > 0$$

$$m \in \left(7; 7\frac{2}{5}\right)$$

$$P'(m) < 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2} \cdot \frac{-m^2 + 16m - 63}{(m-8)^2} < 0$$

$$m \in (5; 7)$$

Funkcja P jest malejąca w przedziale $(5; 7)$, rosnąca w przedziale $\left(7; 7\frac{2}{5}\right)$, a w punkcie $m = 7$

osiąga minimum lokalne, które jest zarazem najmniejszą wartością tej funkcji. W związku z tym dla $m = 7$ pole trójkąta EFC jest najmniejsze, a zatem pole czworokąta $AEFB$ jest największe.

Wyznaczamy współrzędne punktów E i F .

$$E = \left(\frac{6 \cdot 7 - 45}{7 - 8}, \frac{7 \cdot 7 - 53}{7 - 8}\right) \text{ więc } E = (3, 4),$$

$$F = (m, 10), \text{ więc } F = (7, 10).$$

Schemat punktowania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

- **Pierwszy etap** składa się z trzech części:

- a) zapisanie punktu F w zależności od parametru m , więc równanie prostej DF można opisać równaniem $y = \frac{3}{m-5}x + \frac{7m-50}{m-5}$,
- b) wyznaczenie współrzędnych punktu $E = \left(\frac{6m-45}{m-8}, \frac{7m-53}{m-8}\right)$ oraz zapisanie pola trójkąta EFC w zależności od m : $P(m) = \frac{1}{2} \cdot (9-m) \cdot \left(10 - \frac{7m-53}{m-8}\right)$,
- c) określenie dziedziny funkcji $P: \left(5; 7\frac{2}{5}\right)$.

Za każdą z części tego etapu zdający otrzymuje po **1 punkcie**.

- **Drugi etap** składa się z trzech części:

- a) wyznaczenie pochodnej funkcji wymiernej $P(m) = \frac{3}{2} \cdot \frac{-m^2 + 16m - 63}{m-8}$:

$$P'(m) = \frac{3}{2} \cdot \frac{-m^2 + 16m - 63}{(m-8)^2},$$
- b) obliczenie miejsca zerowego pochodnej: $m = 7$,
- c) uzasadnienie, że dla $m = 7$ funkcja P osiąga najmniejszą wartość, np. zapisanie, że w przedziale $(5; 7)$ funkcja jest malejąca, w przedziale $\left(7; 7\frac{2}{5}\right)$ rosnąca oraz $P'(7) = 0$,
 więc dla $m = 7$ funkcja P osiąga minimum lokalne, które jest wartością najmniejszą tej funkcji.

Za każdą z części tego etapu zdający otrzymuje po **1 punkcie**.

Uwaga

Jeżeli zdający nie wyznaczy dziedziny funkcji P , np. $m \in \left(5; 7\frac{2}{5}\right)$, to za trzecią część drugiego etapu może otrzymać **1 punkt** tylko wtedy, gdy wyznaczy współrzędne punktów E i F oraz sprawdzi, że punkty te należą do odcinków odpowiednio AC i BC .

- **Trzeci etap**

Obliczenie współrzędnych punktów $E = (3, 4)$ oraz $F = (7, 10)$, dla których pole czworokąta $AEFB$ jest największe.

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.