

PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY
W ROKU SZKOLNYM 2017-2018

MATEMATYKA
POZIOM PODSTAWOWY

ZASADY OCENIANIA ZADAŃ
KIELCE – MARZEC 2018

Klucz odpowiedzi do zadań zamkniętych

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
D	B	C	C	D	D	B	C	A	D	B	D	A	C	D	D	C	C	B	D	B	D	A	D	B

Schemat oceniania zadań otwartych**Zadanie 26. (0-2)**

Rozwiąż nierówność: $-(x+3)(x-4) \geq 10$

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} -(x^2 - 4x + 3x - 12) &\geq 10 \\ -x^2 + x + 2 &\geq 0 \end{aligned}$$

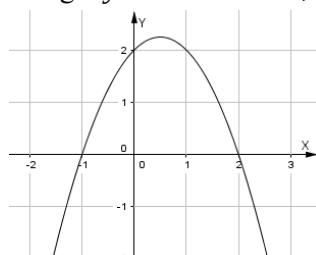
Obliczamy pierwiastki trójmianu kwadratowego $-x^2 + x + 2$.

$$\begin{aligned} \Delta &= 1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2 = 9, \quad \sqrt{\Delta} = 3, \\ x_1 &= \frac{-1-3}{2 \cdot (-1)} = 2, \quad x_2 = \frac{-1+3}{2 \cdot (-1)} = -1. \end{aligned}$$

Możemy również obliczyć pierwiastki trójmianu kwadratowego $-x^2 + x + 2$, rozkładając go na czynniki liniowe

$$\begin{aligned} -x^2 + x + 2 &= -(x^2 + x - 2x - 2) = -[x(x+1) - 2(x+1)] = -(x+1)(x-2) \\ x+1 &= 0 \text{ lub } x-2 = 0 \\ x &= -1 \text{ lub } x = 2 \end{aligned}$$

Szkicujemy wykres trójmianu kwadratowego $y = -x^2 + x + 2$,



z którego odczytujemy zbiór rozwiązań nierówności

$$x \in \langle -1; 2 \rangle$$

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje.....1p.

gdy

- obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ i na tym zakończy lub błędnie poda zbiór rozwiązań nierówności, albo

- rozłoży trójmian kwadratowy na czynniki liniowe, np. $-(x+1)(x-2)$ i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,

albo

- popęłni błąd rachunkowy przy obliczaniu wyróżnika lub pierwiastków trójmianu kwadratowego (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność.

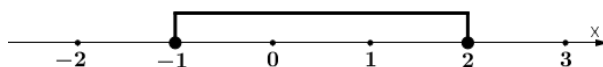
Zdający otrzymuje.....2p.

gdy

- podaje zbiór rozwiązań nierówności: $x \in \langle -1; 2 \rangle$ lub $\langle -1; 2 \rangle$ lub $(x \geq -1 \text{ i } x \leq 2)$,

albo

- podaje zbiór rozwiązań w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów.



Zadanie 27. (0-2)

Zbiorem wartości funkcji $f(x) = a(x-3)(x+2)$ jest przedział $\langle -3; +\infty \rangle$. Wyznacz współczynnik a oraz zapisz wzór funkcji f w postaci kanonicznej.

Rozwiązanie

(I sposób rozwiązania)

Miejscami zerowymi funkcji f są liczby $x_1 = -2$, $x_2 = 3$. Pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli jest $p = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1}{2}$, a drugą współrzędną wierzchołka jest $q = -3$.

$$W = \left(\frac{1}{2}, -3 \right)$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -3,$$

$$a\left(\frac{1}{2} - 3\right)\left(\frac{1}{2} + 2\right) = -3,$$

$$-\frac{25}{4}a = -3, \text{ więc } a = \frac{12}{25}.$$

Postać kanoniczna funkcji:

$$f(x) = \frac{12}{25}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 3.$$

(II sposób rozwiązania)

Zapisujemy wzór funkcji w postaci ogólnej

$$f(x) = a(x^2 - x - 6),$$

$$f(x) = ax^2 - ax - 6a,$$

Wiemy, że $q = -3$, czyli $\frac{-\Delta}{4a} = -3$,

$$\Delta = (-a)^2 - 4 \cdot a \cdot (-6a),$$

$$\Delta = 25a^2,$$

$$\frac{-25a^2}{4a} = -3,$$

$$a = \frac{12}{25}.$$

Postać kanoniczna funkcji: $f(x) = \frac{12}{25} \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 - 3.$

Schemat oceniania

(I sposób rozwiązania)

Zdający otrzymuje.....1p.

gdy

- wyznaczy współrzędne wierzchołka paraboli $p = \frac{1}{2}$, $q = -3$ oraz zapisze warunek pozwalający na wyznaczenie współczynnika a (np. $f\left(\frac{1}{2}\right) = -3$) i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy,

albo

- popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu współczynnika a i konsekwentnie do obliczonej wartości a wyznaczy postać kanoniczną.

Zdający otrzymuje.....2p.

gdy

zapisze wzór funkcji $f(x) = \frac{12}{25} \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 - 3.$

(II sposób rozwiązania)

Zdający otrzymuje.....1p.

gdy zapisze trójmian kwadratowy w postaci ogólnej $f(x) = ax^2 - ax - 6a$ oraz warunek $q = -3$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

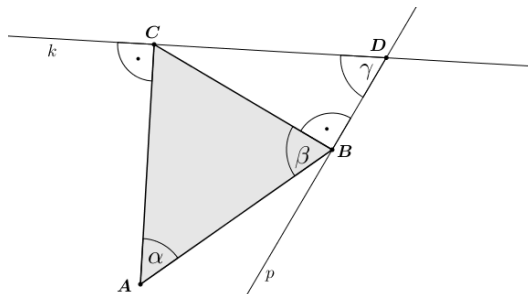
Zdający otrzymuje.....2p.

gdy

zapisze wzór funkcji $f(x) = \frac{12}{25} \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 - 3.$

Zadanie 28. (0-2)

Dany jest trójkąt ostrokątny ABC . Poprowadzono dwie proste: prostą k prostopadłą do boku AC przechodzącą przez punkt C oraz prostą p prostopadłą do boku BC przechodzącą przez punkt B . Proste k i p przecinają się w punkcie D (tak jak na rysunku). Uzasadnij, że $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

**Dowód**

Prosta k jest prostopadła do odcinka AC , prosta p jest prostopadła do odcinka CB .

(I sposób rozwiązania)

Zauważmy, że kąt ostry $|\angle ACB| = 180^\circ - \alpha - \beta$ oraz $|\angle BCD| = 90^\circ - |\angle ACB|$.

$$|\angle BCD| = 90^\circ - (180^\circ - \alpha - \beta)$$

$$|\angle BCD| = \alpha + \beta - 90^\circ$$

Trójkąt DBC jest prostokątny więc $|\angle BCD| + |\angle CDB| = 90^\circ$

$$\alpha + \beta - 90^\circ + \gamma = 90^\circ$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ, \quad \text{co należało uzasadnić.}$$

(II sposób rozwiązania)

Zauważmy, że kąt ostry $|\angle BCD| = 90^\circ - \gamma$, zatem $|\angle BCA| = 90^\circ - |\angle BCD|$.

$$|\angle BCA| = 90^\circ - (90^\circ - \gamma)$$

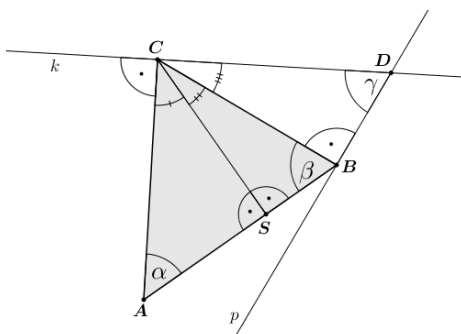
$$|\angle BCA| = \gamma$$

Suma kątów wewnętrznych trójkąta ABC wynosi 180° , więc

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ, \quad \text{co należało uzasadnić.}$$

(III sposób rozwiązania)

Poprowadźmy wysokość CS trójkąta ABC .



Łatwo zauważyć, że $|\angle ACS| = 90^\circ - \alpha$, $|\angle SCB| = 90^\circ - \beta$ oraz $|\angle BCD| = 90^\circ - \gamma$.

$$|\angle ACD| = 90^\circ,$$

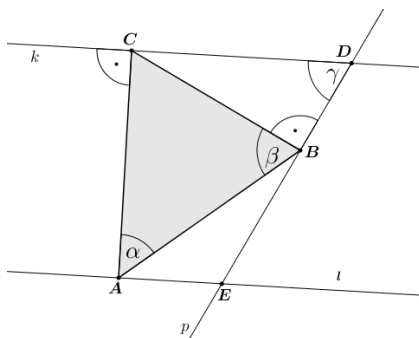
$$|\angle ACS| + |\angle SCB| + |\angle BCD| = 90^\circ,$$

$$(90^\circ - \alpha) + (90^\circ - \beta) + (90^\circ - \gamma) = 90^\circ, \text{ więc}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ, \quad \text{co należało uzasadnić.}$$

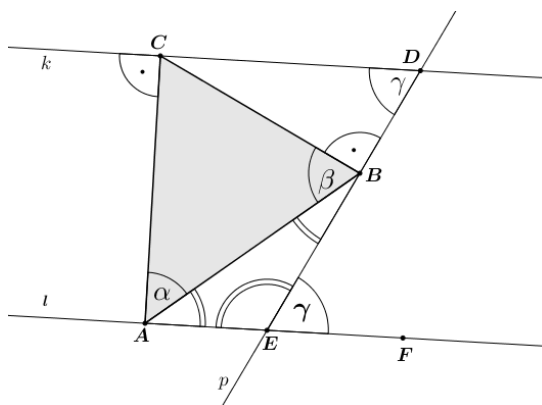
(IV sposób rozwiązania)

Dorysujmy prostą l równoległą do prostej k , która przechodzi przez punkt A . Powstał w ten sposób trójkąt ABE (rysunek poniżej)



Zauważmy, że kąty $\angle CDE$ oraz $\angle FED$ są naprzemianległe wewnętrzne (rysunek poniżej), więc $|\angle FED| = \gamma$, stąd $|\angle BEA| = 180^\circ - \gamma$.

Prosta l jest prostopadła do AC , a zatem $|\angle EAB| = 90^\circ - \alpha$, prosta p jest prostopadła do BC , więc $|\angle EBA| = 90^\circ - \beta$ (rysunek poniżej).



Suma kątów wewnętrznych trójkąta AEB wynosi 180° , więc

$$(90^\circ - \alpha) + (90^\circ - \beta) + (180^\circ - \gamma) = 180^\circ,$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ, \quad \text{co należało uzasadnić.}$$

Schemat punktowania**(I sposób rozwiązania)****Zdający otrzymuje**1p.

- gdy zapisze, że kąt ostry $|\angle ACB| = 180^\circ - \alpha - \beta$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje2p.gdy uzasadni, że $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.**(II sposób rozwiązania)****Zdający otrzymuje**1p.

- gdy zapisze, że kąt ostry $|\angle BCD| = 90^\circ - \gamma$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje2p.gdy uzasadni, że $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.**(III sposób rozwiązania)****Zdający otrzymuje**1p.

- gdy poprowadzi wysokość CS trójkąta ABC oraz zapisze, że $|\angle ACS| = 90^\circ - \alpha$,
 $|\angle SCB| = 90^\circ - \beta$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy,

albo

- gdy poprowadzi wysokość CS trójkąta ABC oraz zapisze, że $|\angle BCD| = 90^\circ - \gamma$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje2p.gdy uzasadni, że $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.**(IV sposób rozwiązania)****Zdający otrzymuje**1p.

- gdy poprowadzi prostą l równoległą do prostej k oraz zapisze, że $|\angle BEA| = 180^\circ - \gamma$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy,

albo

- gdy poprowadzi prostą l równoległą do prostej k oraz zapisze, że $|\angle EAB| = 90^\circ - \alpha$ oraz $|\angle EBA| = 90^\circ - \beta$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje2p.gdy uzasadni, że $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

Zadanie 29. (0-2)

Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x i y prawdziwa jest nierówność

$$\frac{4x}{3y} + \frac{3y}{x} > 4 - \frac{13}{xy}.$$

Rozwiązanie

Z założenia wynika, że $x > 0$ i $y > 0$.

(I sposób)

Przekształcamy nierówność w sposób równoważny:

$$\frac{4x}{3y} + \frac{3y}{x} > 4 - \frac{13}{xy} \quad / \cdot 3xy, \text{ (wyrażenie } 3xy > 0 \text{)}$$

$$4x^2 + 9y^2 > 12xy - 39$$

$$4x^2 - 12xy + 9y^2 + 39 > 0$$

$$(2x - 3y)^2 + 39 > 0$$

Kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest nieujemny, więc lewa strona tej nierówności jest sumą dwóch liczb: nieujemnej $(2x - 3y)^2$ i liczby dodatniej 39, więc to dowodzi, że nierówność

$\frac{4x}{3y} + \frac{3y}{x} > 4 - \frac{13}{xy}$ jest spełniona dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x i y .

To kończy dowód.

(II sposób)

Przekształcamy nierówność w sposób równoważny:

$$\frac{4x}{3y} + \frac{3y}{x} > 4 - \frac{13}{xy} \quad / \cdot 3xy, \text{ (wyrażenie } 3xy > 0 \text{)}$$

$$4x^2 + 9y^2 > 12xy - 39$$

$$4x^2 - 12xy + 9y^2 + 39 > 0$$

Potraktujmy tę nierówność jako zwykłą nierówność kwadratową z niewiadomą x .

Wyznamy wyróżnik trójmianu $\Delta < 0$.

$$\begin{aligned}\Delta &= (-12y)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (9y^2 + 39) \\ \Delta &= 144y^2 - 144y^2 - 624 = -624 \\ \Delta &= -624\end{aligned}$$

$\Delta < 0$ dla dowolnych $y \in R$, więc nierówność $4x^2 - 12xy + 9y^2 + 39 > 0$ jest spełniona przez wszystkie liczby rzeczywiste x i y , a zatem nierówność $\frac{4x}{3y} + \frac{3y}{x} > 4 - \frac{13}{xy}$ jest spełniona przez wszystkie dodatnie liczby rzeczywiste x i y .

To kończy dowód.

Schemat oceniania**(I sposób rozwiązania)****Zdający otrzymuje**1p.gdy doprowadzi nierówność do postaci $(2x - 3y)^2 + 39 > 0$,**Zdający otrzymuje**2p.

gdy przeprowadzi pełny dowód.

(II sposób rozwiązania)**Zdający otrzymuje**1p.

- gdy doprowadzi nierówność do postaci $4x^2 - 12xy + 9y^2 + 39 > 0$ i prawidłowo wyznaczy wyróżnik trójmianu kwadratowego $\Delta_y = -624$,

albo

- gdy doprowadzi nierówność do postaci $9y^2 - 12xy + 4x^2 + 39 > 0$ i prawidłowo wyznaczy wyróżnik trójmianu kwadratowego $\Delta_x = -1404$.

Zdający otrzymuje2p.

gdy przeprowadzi pełny dowód.

Zadanie 30. (0-2)

Ze zbioru $\{5, 7, 9, 10, 11, 14\}$ losujemy kolejno bez zwracania dwie liczby. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania takich dwóch liczb, których iloczyn jest większy od 100.

Rozwiązanie**(I sposób rozwiązania)**Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie pary różnych liczb ze zbioru $\{5, 7, 9, 10, 11, 14\}$

$$|\Omega| = 6 \cdot 5 = 30$$

Oznaczmy przez A zdarzenie polegające na wylosowaniu pary liczb, których iloczyn jest większy od 100.

$$A = \{(9, 14), (10, 11), (10, 14), (11, 10), (11, 14), (14, 9), (14, 10), (14, 11)\}$$

$$|A| = 8$$

Obliczamy prawdopodobieństwo korzystając z definicji klasycznej prawdopodobieństwa

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

$$P(A) = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$$

(II sposób rozwiązania)

Oznaczmy przez A zdarzenie polegające na wylosowaniu pary liczb, których iloczyn jest większy od 100.

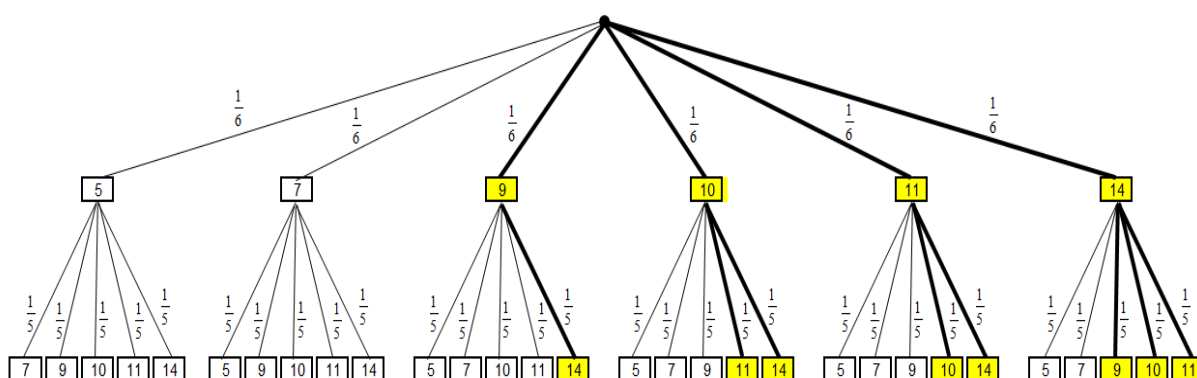
Zbiór zdarzeń elementarnych można zilustrować tabelą 6 na 6 i zaznaczyć zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A .

iloczyn	5	7	9	10	11	14
5		35	45	50	55	70
7	35		63	70	77	98
9	45	63		90	99	126
10	50	70	90		110	140
11	55	77	99	110		154
14	70	98	126	140	154	

Łatwo zauważyć, że $|\Omega| = 30$ i $|A| = 8$, więc $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$

(III sposób rozwiązania)

Rysujemy drzewo z uwzględnieniem wszystkich gałęzi, które prowadzą do sytuacji sprzyjających zdarzeniu A (polegającemu na tym, że iloczyn liczb będzie większy od 100).



Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe $P(A) = 8 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje1p.

- gdy zapisze liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych $|\Omega| = 6 \cdot 5$,
albo
- gdy wypisze wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A ,
albo
- gdy zapisze liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A : $|A| = 8$,
albo
- narysuje drzewo ilustrujące przebieg doświadczenia (na rysunku muszą wystąpić wszystkie istotne gałęzie).

Zdający otrzymuje.....2p.

gdy wyznaczy prawdopodobieństwo zdarzenia $P(A) = \frac{8}{30}$.

Uwaga.

1. jeżeli zdający poda prawdopodobieństwo zdarzenia A większe od 1, to za całe zadanie otrzymuje **0p**,
2. jeżeli zdający pominie jedno zdarzenie sprzyjające zdarzeniu A lub pominie jedną istotną gałąź drzewa i otrzyma $P(A) = \frac{7}{30}$, to otrzymuje za całe rozwiązanie **1p**.

Zadanie 31. (0-2)

Trzy liczby 2 , $2x+3$, $x+2y$ są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Suma tych liczb wynosi 21 . Wyznacz wartości x oraz y .

Rozwiązanie

Liczby 2 , $2x+3$, $x+2y$, których suma wynosi 21 są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, więc

$$\begin{cases} 2 + (2x+3) + (x+2y) = 21 \\ (2x+3) - 2 = (x+2y) - (2x+3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y = 16 \\ 3x - 2y = -4 \end{cases}$$

Po rozwiązaniu powyższego układu otrzymujemy:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}$$

Schemat oceniania**Zdający otrzymuje.....1p.**

Zdający gdy zapisze układ równań (którego rozwiązanie doprowadzi do wyznaczenia szukanych

wartości x oraz y) np. $\begin{cases} 2 + (2x+3) + (x+2y) = 21 \\ (2x+3) - 2 = (x+2y) - (2x+3) \end{cases}$ lub $\begin{cases} 2 + (2x+3) + (x+2y) = 21 \\ x + 2y = 2 + 2r \\ 2x + 3 = 2 + r \end{cases}$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy

Zdający otrzymuje.....2p.

gdy obliczy wartości $\begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}$.

Zadanie 32. (0-5)

Podstawą ostrosłupa $ABCS$ jest trójkąt równoboczny ABC , którego pole jest równe $16\sqrt{3}$. Krawędź AS jest prostopadła do płaszczyzny podstawy. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa, jeżeli ściana boczna o największym polu tworzy z podstawą kąt α o mierze 60° .

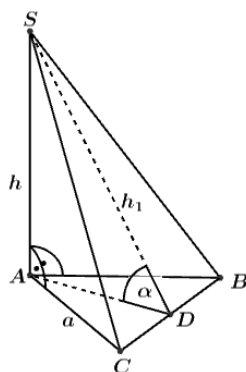
Rozwiązanie

Wykonajmy odpowiedni rysunek i wprowadźmy oznaczenia:

a – krawędź podstawy ostrosłupa,

h – wysokość ostrosłupa,

h_1 – wysokość ściany bocznej ostrosłupa o największym polu,

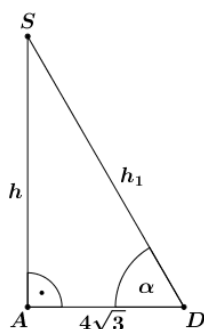


$$P_p = 16\sqrt{3}$$

$$\frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}$$

$$\underline{a = 8}$$

Trójkąt ADS jest trójkątem prostokątnym, w którym $|AD| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, zatem $|AD| = 4\sqrt{3}$.



Korzystając z funkcji trygonometrycznych wyznaczamy h oraz h_1 .

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AS}{AD}$$

$$\sqrt{3} = \frac{h}{4\sqrt{3}}$$

$$\underline{h = 12}$$

$$\cos \alpha = \frac{AD}{DS}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{h_1}$$

$$\underline{h_1 = 8\sqrt{3}}$$

Wyznaczamy pola wszystkich ścian bocznych.

$$P_{ACS} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 12$$

$$\underline{P_{ACS} = P_{ABS} = 48}$$

$$P_{BCS} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_1 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8\sqrt{3}$$

$$\underline{P_{BCS} = 32\sqrt{3}}$$

Wyznaczamy pole powierzchni całkowitej ostrosłupa.

$$P_C = P_P + P_{ACS} + P_{ABS} + P_{BCS}$$

$$P_C = 16\sqrt{3} + 48 + 48 + 32\sqrt{3}$$

$$\underline{P_C = 48\sqrt{3} + 96}$$

Wyznaczamy objętość ostrosłupa.

$$V = \frac{1}{3} \cdot P_P \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 16\sqrt{3} \cdot 12$$

$$\underline{V = 64\sqrt{3}}$$

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania1p.

Zdający

- wykona poprawnie rysunek, na którym zaznaczy kąt α i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy,

albo

- wyznaczy długość krawędzi podstawy $a = 8$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp2p.

Zdający

- wyznaczy długość krawędzi podstawy $a = 8$ oraz długość wysokości $h = 12$ ostrosłupa i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy,

albo

- wyznaczy długość krawędzi podstawy $a = 8$ oraz długość wysokości ściany bocznej $h_1 = 8\sqrt{3}$ ostrosłupa i na tym zakończy lub dalej dopełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania3p.

Zdający wyznaczy długość krawędzi podstawy $a = 8$, długość wysokości $h = 12$ ostrosłupa oraz długość wysokości ściany bocznej $h_1 = 8\sqrt{3}$ i na tym zakończy lub dalej dopełnia błędy,

Rozwiązanie prawie pełne.....4p.

Zdający

- wyznaczy objętość ostrosłupa $V = 64\sqrt{3}$ i wysokość ściany bocznej $h_1 = 8\sqrt{3}$ i na tym zakończy lub dalej dopełnia błędy,

albo

- wyznaczy pole powierzchni całkowitej ostrosłupa $P_C = 48\sqrt{3} + 96$ i na tym zakończy lub dalej dopełnia błędy,

albo

- rozwiąże zadanie do końca, ale z błędem rachunkowym.

Rozwiązanie pełne.....5p.

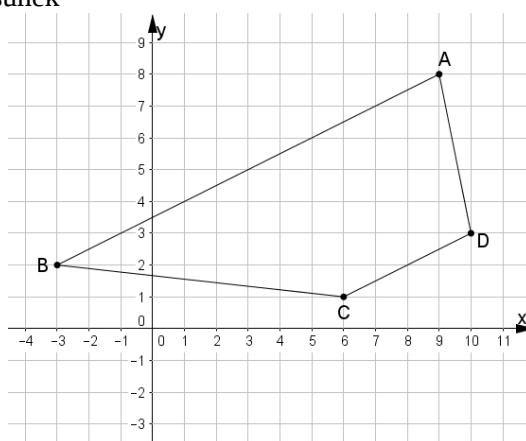
Zdający wyznaczy objętość ostrosłupa $V = 64\sqrt{3}$ oraz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa $P_C = 48\sqrt{3} + 96$.

Zadanie 33. (0-4)

Dane są punkty $A = (9, 8)$, $B = (-3, 2)$, $C = (6, 1)$, $D = (10, 3)$. Uzasadnij, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem oraz oblicz jego pole.

Rozwiązanie

Wykonajmy pomocniczy rysunek



Uzasadnimy, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem.

Wyznamy współczynnik kierunkowy a_{AB} prostej AB .

$$a_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$a_{AB} = \frac{2-8}{-3-9} = \frac{-6}{-12}$$

$$a_{AB} = \frac{1}{2}$$

Wyznamy współczynnik kierunkowy a_{CD} prostej CD .

$$a_{CD} = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C}$$

$$a_{CD} = \frac{3-1}{10-6} = \frac{2}{4}$$

$$a_{CD} = \frac{1}{2}$$

Współczynniki kierunkowe prostych AB i CD są równe, więc proste te są równoległe, a zatem czworokąt $ABCD$ jest trapezem.

Można również uzasadnić, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem stosując rachunek wektorowy.

Wyznamy współrzędne wektorów $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{DC}$.

$$\overrightarrow{AB} = [-3-9, 2-8] = [-12, -6]$$

$$\overrightarrow{DC} = [6-10, 1-3] = [-4, -2]$$

Sprawdzamy warunek równoległości wektorów:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = -12 \cdot (-2) - (-4) \cdot (-6) = 24 - 24 = 0$$

Wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{DC}$ są równoległe, więc czworokąt $ABCD$ jest trapezem.

Wyznamy długości odcinków AB i CD .

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

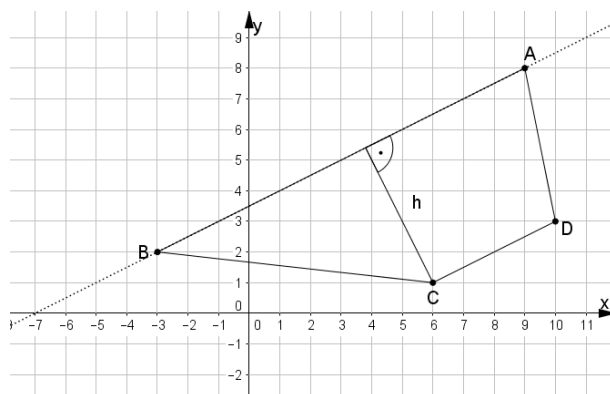
$$|AB| = \sqrt{(-3-9)^2 + (2-8)^2} = \sqrt{(-12)^2 + (-6)^2} = \sqrt{144+36} = \sqrt{180}$$

$$|AB| = 6\sqrt{5}$$

$$|CD| = \sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2}$$

$$|CD| = \sqrt{(10-6)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$$

$$|CD| = 2\sqrt{5}$$

(I sposób obliczenia pola trapezu $ABCD$)

Wyznaczamy równanie prostej AB .

$$y - y_A = a_{AB}(x - x_A)$$

$$y - 8 = \frac{1}{2}(x - 9)$$

$$y = \frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2}$$

$$x - 2y + 7 = 0$$

Wysokość obliczamy wykorzystując wzór na odległość punktu C od prostej AB .

$$h = \frac{|6 - 2 \cdot 1 + 7|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}}$$

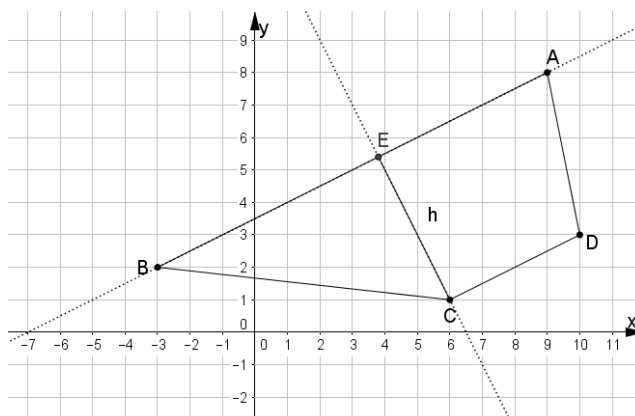
$$h = \frac{11}{\sqrt{5}} = \frac{11\sqrt{5}}{5}$$

Obliczamy pole trapezu $ABCD$.

$$P = \frac{1}{2}(|AB| + |CD|) \cdot h$$

$$P = \frac{1}{2}(6\sqrt{5} + 2\sqrt{5}) \cdot \frac{11\sqrt{5}}{5}$$

$$P = 44$$

(II sposób obliczenia pola trapezu $ABCD$)

Wyznaczamy równanie prostej AB .

$$y = \frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2}$$

Wyznaczamy równanie prostej prostopadłej do AB przechodzącej przez punkt C .

$$y = -2x + b$$

$$1 = -2 \cdot 6 + b$$

$$b = 13$$

$$y = -2x + 13$$

Wyznaczamy współrzędne punktu E rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} y = -2x + 13 \\ y = \frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2} = -2x + 13$$

$$x + 7 = -4x + 26$$

$$x = \frac{19}{5}$$

$$y = -2 \cdot \frac{19}{5} + 13$$

$$y = -7,6 + 13$$

$$y = 5,4$$

$$\begin{cases} x = 3,8 \\ y = 5,4 \end{cases}$$

$$E = (3\frac{4}{5}, 5\frac{2}{5})$$

$$C = (6,1)$$

Obliczamy długość wysokości $h = |CE|$.

$$h = \sqrt{\left(6 - 3\frac{4}{5}\right)^2 + \left(1 - 5\frac{2}{5}\right)^2}$$

$$h = \sqrt{\left(\frac{11}{5}\right)^2 + \left(-\frac{22}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{121}{25} + \frac{484}{25}} = \sqrt{\frac{605}{25}}$$

$$h = \frac{11\sqrt{5}}{5}$$

Obliczamy pole trapezu $ABCD$.

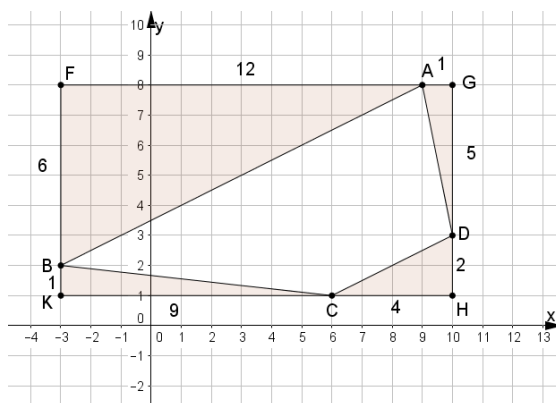
$$P = \frac{1}{2}(|AB| + |CD|) \cdot h$$

$$P = \frac{1}{2}(6\sqrt{5} + 2\sqrt{5}) \cdot \frac{11\sqrt{5}}{5}$$

$$P = 44$$

(III sposób obliczenia pola trapezu $ABCD$)

Pole trapezu możemy obliczyć wykonując działanie $P = P_{FGHK} - (P_{BKC} + P_{CHD} + P_{DGA} + P_{AFB})$



$$P = 13 \cdot 7 - \left(\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 6 \right)$$

$$P = 91 - \left(\frac{9}{2} + \frac{8}{2} + \frac{5}{2} + \frac{72}{2} \right)$$

$$P = 91 - 47$$

$$P = 44$$

Schemat oceniania (I i II sposób)

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania1p.

Zdający uzasadni, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp2p.

Zdający uzasadni, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem oraz wyznaczy długości podstaw trapezu $|AB| = 6\sqrt{5}$, $|CD| = 2\sqrt{5}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania3p.

Zdający

- uzasadni, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem, wyznaczy długości podstaw trapezu $|AB| = 6\sqrt{5}$, $|CD| = 2\sqrt{5}$ oraz wyznaczy współrzędne punktu $E = (3\frac{4}{5}, 5\frac{2}{5})$,

albo

- uzasadni, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem, wyznaczy długości podstaw trapezu $|AB| = 6\sqrt{5}$, $|CD| = 2\sqrt{5}$, wyznaczy równanie prostej AB i zapisze, że zastosuje wzór na odległość punktu C (lub D) od prostej AB .

Rozwiązanie pełne.....4p.

Zdający wyznaczy pole trapezu $ABCD$ ($P = 44$) oraz uzasadni, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem.

Uwaga

1. Jeżeli zdający nie uzasadni, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem, ale obliczy jego pole korzystając z faktu, że jest on trapezem, to za całe rozwiązanie może otrzymać maksymalnie **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający nie uzasadni, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem, obliczy jego pole popełniając błąd rachunkowy oraz korzysta z faktu, że jest on trapezem, to za całe rozwiązanie może otrzymać maksymalnie **1 punkt**.

Schemat oceniania (III sposób)**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania1p.**

Zdający

- uzasadni, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy,
- albo
- naszkicuje odpowiedni rysunek, zapisze, że pole trapezu możemy obliczyć wykonując działanie $P = P_{FGHK} - (P_{BKC} + P_{CHD} + P_{DGA} + P_{AFB})$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp2p.

- uzasadni, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem i zapisze, że pole trapezu możemy obliczyć wykonując działanie $P = P_{FGHK} - (P_{BKC} + P_{CHD} + P_{DGA} + P_{AFB})$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy,

albo

- obliczy pole trapezu popełniając błąd rachunkowy i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania3p.

- uzasadni, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem i obliczy pole trapezu popełniając błąd rachunkowy,

albo

- obliczy pole czworokąta $P = 44$, ale nie uzasadni, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem. (w tej metodzie licząc pole zdający nie korzysta z faktu, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem)

Rozwiązanie pełne.....4p.

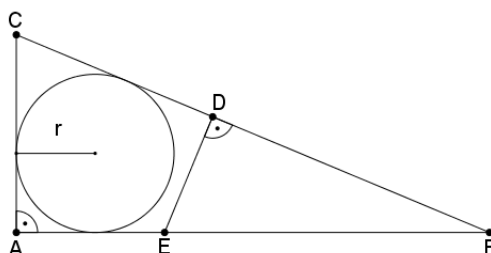
Zdający uzasadni, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem oraz obliczy jego pole $P = 44$.

Zadanie 34. (0-4)

Promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny ABC ma długość $r = 4$, a stosunek długości przyprostokątnych $AC : AB$ wynosi $5 : 12$. Na przeciwprostokątnej BC obrano punkt D , zaś na przyprostokątnej AB punkt E tak, że odcinki BC i DE są prostopadłe. Wyznacz długość odcinka AE , jeśli stosunek pola czworokąta $AEDC$ do pola trójkąta EBD jest równy $3 : 2$.

Rozwiązanie

Wykonajmy pomocniczy rysunek.



Skoro stosunek długości przyprostokątnych $AC : AB$ wynosi $5 : 12$ wprowadźmy następujące oznaczenia: $|AC| = 5x$, $|AB| = 12x$, gdzie $x > 0$.

Wykorzystując twierdzenie Pitagorasa łatwo wyznaczyć długość odcinka BC w zależności od x .

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2$$

$$|BC|^2 = (12x)^2 + (5x)^2$$

$$|BC|^2 = 169x^2$$

$$|BC| = 13x$$

Korzystając ze wzoru na długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny otrzymujemy.

$$r = \frac{|AC| + |AB| - |BC|}{2}$$

$$4 = \frac{5x + 12x - 13x}{2}$$

$$x = 2$$

Znamy zatem długości boków trójkąta ABC : $|AC| = 10$, $|AB| = 24$, $|BC| = 26$.

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC|$$

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 10$$

$$P_{ABC} = 120$$

(I sposób wyznaczenia długości odcinka AE)

Zauważmy, że $\triangle BDE \sim \triangle ABC$ (cecha podobieństwa trójkątów „kąt-kąt-kąt”), więc $DE : DB : EB$ wynosi $5 : 12 : 13$.

Wprowadźmy następujące oznaczenia: $|DE| = 5m$, $|DB| = 12m$, $|EB| = 13m$, gdzie $m > 0$.

Stosunek pól czworokąta $AEDC$ oraz trójkąta EBD jest równy $3:2$, więc $P_{BDE} = \frac{2}{5} P_{ABC}$

$$P_{BDE} = \frac{2}{5} \cdot 120 = 48$$

$$P_{BDE} = \frac{1}{2} \cdot |BD| \cdot |DE|$$

$$P_{BDE} = \frac{1}{2} \cdot 12m \cdot 5m = 30m^2$$

$$30m^2 = 48$$

$$m^2 = \frac{8}{5}$$

$$m = \sqrt{\frac{8}{5}} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$$

Wyznamy długość odcinka BE .

$$|BE| = 13m = \frac{26\sqrt{10}}{5}$$

$$|AE| = |AB| - |BE|$$

$$|AE| = 24 - \frac{26\sqrt{10}}{5}$$

$$|AE| = \frac{120 - 26\sqrt{10}}{5}$$

(II sposób wyznaczenia długości odcinka AE)

$$\frac{P_{AEDC}}{P_{EBD}} = \frac{3}{2}, \text{ więc } \frac{P_{EBD}}{P_{ABC}} = \frac{2}{5}$$

Zauważmy, że $\triangle BDE \sim \triangle ABC$ w skali k .

$$k^2 = \frac{2}{5}$$

$$k = \sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$|EB| = k \cdot |BC|$$

$$|BE| = \frac{26\sqrt{10}}{5}$$

$$|AE| = |AB| - |BE|$$

$$|AE| = 24 - \frac{26\sqrt{10}}{5}$$

$$|AE| = \frac{120 - 26\sqrt{10}}{5}$$

Rozwiązanie, w którym postępowanie jest niewielkie, ale konieczne na drodze do pełnego rozwiązania zadania1p.

Zdający

- zapisze wszystkie związki pozwalające na obliczenie długości boków trójkąta ABC ,
(np.: $|AC| = 5x$, $|AB| = 12x$, $|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2$, $4 = \frac{|AC| + |AB| - |BC|}{2}$)

albo

- zauważy, że $\triangle BDE \sim \triangle ABC$ i zapisze, że $k^2 = \frac{2}{5}$

albo

- zauważmy, że $\triangle BDE \sim \triangle ABC$ i zapisze, że $DE : DB$ wynosi $5 : 12$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp2p.

Zdający

- obliczy pole trójkąta $P_{ABC} = 120$ oraz zauważy, że $\triangle BDE \sim \triangle ABC$.

albo

- obliczy długości boków trójkąta ABC : $|AC| = 10$, $|AB| = 24$, $|BC| = 26$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania3p.

Zdający

- obliczy długości boków trójkąta ABC : $|AC| = 10$, $|AB| = 24$, $|BC| = 26$ oraz zapisze, że
 $\triangle BDE \sim \triangle ABC$ w skali $k = \sqrt{\frac{2}{5}}$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy,

albo

- obliczy długości boków trójkąta ABC : $|AC| = 10$, $|AB| = 24$, $|BC| = 26$ oraz zapisze, że
 $P_{BDE} = 30m^2$ oraz $P_{BDE} = 48$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy,

albo

- obliczy $|BE| = \frac{26\sqrt{10}}{5}$ i na tym zakończy.

Rozwiązanie pełne.....4p.

Zdający obliczy $|AE| = \frac{120 - 26\sqrt{10}}{5}$.

Uwaga.

Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca, to otrzymuje za całe rozwiązanie **3p.**