Elektrostatyka III

Wykład ten poświęcony jest dwóm zagadnieniom: energii jaka jest skumulowana w polu elektrycznym oraz potencjałowi wytwarzanemu przez zlokalizowany rozkład ładunku. Wstępem do drugiego zagadnienia będzie analiza szczególnego przypadku – dipola.

Energia pola elektrostatycznego

Jak już było wyjaśnione poprzednio, jeśli potencjał znika w nieskończoności, wówczas jego wartość w punkcie $\vec{r}$ pomnożona przez ładunek równa jest pracy jaką trzeba wykonać, aby przenieść ładunek z nieskończoności do punktu $\vec{r}$. Ładunek znajdujący się w tym punkcie ma energię potencjalną równą owej pracy.

Jeśli więc mamy N ładunków punktowych q_i umieszczonych w punktach $\vec{r}_i$, to energia $i-$tego ładunku równa jest $E_i = q_i \Phi(\vec{r}_i)$, gdzie $\Phi(\vec{r}_i)$ jest potencjałem wytwarzanym przez pozostałe ładunki w punkcie $\vec{r}_i$, czyli

$$E_i = q_i \Phi(\vec{r}_i) = q_i \sum_{j=1}^{N-1} \frac{q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}. \tag{1}$$

Energia całego układu N ładunków wynosi

$$E = \sum_{i=1}^{N} E_i = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1,\, j<i}^{N} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}. \tag{2}$$

Sumę po j wykonujemy w taki sposób, że po pierwsze $j \neq i$. Ten wyraz sumy jest nieskończony, bo mamy zero w mianowniku, a odpowiada on samooddziaływaniu, czyli oddziaływaniu ładunku q_i z potencjałem wytwarzanym przez ten właśnie ładunek w punkcie $\vec{r}_i$, gdzie się sam znajduje. Ponadto sumując po i i po j, czyli po parach ładunków, należy uniknąć dwukrotnego uwzględniania tej samej pary, raz jako ij, a potem jako ji. Uzyskujemy to nakładając warunek $j < i$, lecz równie dobrze moglibyśmy zażądać, by $j > i$. Ten sam wynik otrzymujemy uwzględniając każdą parę podwójnie i dzieląc sumę przez dwa, czyli

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1,\, j\neq i}^{N} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}, \tag{3}$$

gdzie wciąż wykluczyliśmy samooddziaływanie.

Jeśli dyskretne ładunki we wzorze (3) zastąpić ciągłym rozkładem ładunku $\rho(\vec{r})$, a sumy całkami dostajemy

$$E = \frac{1}{2} \int d^3r \int d^3r' \, \frac{\rho(\vec{r})\, \rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \tag{4}$$

Pamiętając, że potencjał wytworzony przez rozkład ładunku dany jest wzorem

$$\Phi(\vec{r}) \equiv \int d^3r' \, \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}, \tag{5}$$

Wyrażenie (4) możemy zapisać jako

$$E = \frac{1}{2} \int d^3r \rho(\vec{r})\, \Phi(\vec{r}). \tag{6}$$

Skorzystawszy z równania Poissona

$$\triangle \Phi(\vec{r}) = -4\pi\, \rho(\vec{r}), \tag{7}$$

by wrazić $\rho(\vec{r})$ jako $\rho(\vec{r}) = -\triangle\Phi(\vec{r})/4\pi$, równanie przybiera postać

$$E = -\frac{1}{8\pi}\int d^3r\,\Phi(\vec{r})\triangle\Phi(\vec{r}). \tag{8}$$

Pamiętając, że $\triangle = \nabla^2$, wykonujemy całkowanie przez części we wzorze (8) i dostajemy

$$E = \frac{1}{8\pi}\int d^3r\Big(\nabla\Phi(\vec{r})\Big)\cdot\nabla\Phi(\vec{r}). \tag{9}$$

Wyraz brzegowy, który pojawia się przy całkowaniu przez części – tutaj całka po powierzchni ograniczającej nieskończoną objętość, znika, gdyż zakładamy, że potencjał w nieskończoności jest zerowy.

Ponieważ pole elektryczne jest gradientem potencjału ze znakiem minus, czyli $\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\Phi(\vec{r})$, więc energię pola elektrycznego wynosi

$$E = \frac{1}{8\pi}\int d^3r\,\vec{E}(\vec{r})\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi}\int d^3r\,\vec{E}^2(\vec{r}). \tag{10}$$

Wielkość

$$\varepsilon(\vec{r}) \equiv \frac{1}{8\pi}\,\vec{E}^2(\vec{r}) \tag{11}$$

jest gęstością energii pola elektrycznego.

Energia pola dana wzorem (2) nie musi być dodatnia. Wyrazy odpowiadające parom ładunków jednoimiennych są, co prawda, dodatnie, lecz te reprezentujące pary ładunków różnoimiennych są ujemne. Widzimy natomiast, że gęstość energii (11) jako kwadrat pola elektrycznego jest dodatnia i dodatnia też jest energia pola dana wzorem (10). Różnica wynika z faktu, że formuła (10) uwzględnia wkład od samooddziaływania wykluczony we wzorze (2). W przypadku ładunku punktowego q znajdującego się w punkcie $\vec{r}$ energia samooddziaływania dana jest wzorem

$$\lim_{\vec{r}\,'\to\vec{r}}\frac{q^2}{|\vec{r}\,'-\vec{r}\,|} = \infty \tag{12}$$

jest więc nieskończona dodatnia.

Dipol

Dipol to układ dwóch przeciwnych, lecz równych co do wartości ładunków punktowych, znajdujących się w odległości dużo mniejszej niż odległość, z której ładunki obserwujemy.

Obliczmy potencjał wytwarzany przez dipol. Ładunek dodatni q umieszczamy w punkcie $\vec{a}/2$ zaś ujemny w $-\vec{a}/2$. Odległość między ładunkami równa jest $a = |\vec{a}\,|$. Potencjał będący sumą potencjałów od obu ładunków wynosi

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{|\vec{r}-\vec{a}/2|} - \frac{q}{|\vec{r}+\vec{a}/2|}. \tag{13}$$

Ponieważ o dipolu, nie zaś o dwóch ładunkach, mówimy wtedy, gdy $a \ll r$, gdzie $r = |\vec{r}\,|$, więc we wzorze (13) musimy uwzględnić ten warunek. Obliczamy w tym celu

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{a}/2|} = \frac{1}{\sqrt{(\vec{r}-\vec{a}/2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\vec{r}^2-\vec{r}\cdot\vec{a}+\vec{a}^2/4}} = \frac{1}{\sqrt{r^2\Big(1-\frac{\hat{r}\cdot\vec{a}}{r}+\frac{a^2}{4r^2}\Big)}} = \frac{1}{r\sqrt{1-\frac{\hat{r}\cdot\vec{a}}{r}+\frac{a^2}{4r^2}}}, \tag{14}$$

gdzie $\hat{r}$ jest wersorem o kierunku wektora $\vec{r}$, czyli $\hat{r} \equiv \vec{r}/r$. Ponieważ $a \ll r$, więc pod pierwiastkiem możemy zaniedbać ostatni wyraz, a pierwiastek rozwinąć szereg Taylora wokół punktu $a = 0$, co daje

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{a}/2|} \approx \frac{1}{r\sqrt{1 - \frac{\hat{r}\cdot\vec{a}}{r}}} \approx \frac{1}{r}\Big(1 + \frac{\hat{r}\cdot\vec{a}}{2r}\Big). \tag{15}$$

Przypomnijmy tutaj rozwinięcie funkcji $(1+x)^\alpha$ w szereg Taylora wokół $x = 0$, uwzględniające pierwsze trzy wyrazy

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha\, x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\, x^2 + \ldots. \tag{16}$$

We wzorze (15) uwzględniliśmy tylko dwa pierwsze wyrazy rozwinięcia (16).

Ostateczny wzór do zastosowania dla obu członów formuły (13) wygląda następująco

$$\frac{1}{|\vec{r} \mp \vec{a}/2|} \approx \frac{1}{r}\Big(1 \pm \frac{\hat{r}\cdot\vec{a}}{2r}\Big). \tag{17}$$

Podstawiając wyrażenia (17) do formuły (13), znajdujemy

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{r}\Big(1 + \frac{\hat{r}\cdot\vec{a}}{2r} - 1 + \frac{\hat{r}\cdot\vec{a}}{2r}\Big) = \frac{q\,\hat{r}\cdot\vec{a}}{r^2} = \frac{q\,\vec{r}\cdot\vec{a}}{r^3}. \tag{18}$$

Jeśli wprowadzimy wielkość zwaną momentem dipolowym $\vec{p} \equiv q\vec{a}$, to potencjał dipola zapisujemy jako

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3}. \tag{19}$$

Moment dipolowy jest z definicji skierowany od ładunku ujemnego do dodatniego. Pole elektryczne dipola znajdujemy obliczając minus gradient potencjału (19).

Potencjał zlokalizowanego rozkładu ładunku

Rozważamy zlokalizowany rozkład ładunku, czyli przypadek, gdy gęstość ładunku $\rho(\vec{r})$ znika, jeśli $r > R$. Innymi słowy, ładunki można zamknąć w kuli o promieniu R, podczas gdy poza kulą gęstość ładunku jest zerowa. Nie oznacza to bynajmniej, że ładunki tworzą kulę.

Zachodzi pytanie, jaki potencjał $\Phi(\vec{r})$ wytwarza zlokalizowany rozkładu ładunku w odległości r dużo większej niż R. Jak już wiemy, potencjał pochodzący od gęstości ładunku $\rho(\vec{r})$ dany jest wzorem

$$\Phi(\vec{r}) = \int d^3r'\, \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}, \tag{20}$$

który przekształcimy, wykorzystując warunek $r \gg R$. Widzimy, że zagadnienie dipola to szczególny przypadek tego ogólnego problemu.

Skoro $\rho(\vec{r}\,')$ znika, gdy $r' > R$, więc w obszarze, który daje niezerowy wkład do całki (20), mamy $r \gg r'$, bo założyliśmy, że $r \gg R$. Wyprowadzimy więc wzór analogiczny do wzoru (17), biorąc o jeden więcej wyraz w rozwinięciu Taylora. A zatem obliczamy

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \frac{1}{\sqrt{(\vec{r} - \vec{r}\,')^2}} = \frac{1}{\sqrt{\vec{r}^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{r}\,' + \vec{r}\,'^2}} = \frac{1}{r\sqrt{1 - \frac{2\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^2} + \frac{r\,'^2}{r^2}}}. \tag{21}$$

Skorzystawszy ze wzoru (16), gdzie $x = -2\hat{r}\cdot\vec{r}\,'/r + r\,'^2/r^2$ zaś $\alpha = -1/2$, otrzymujemy

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \frac{1}{r}\bigg(1 - \frac{1}{2}\Big(-\frac{2\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^2} + \frac{r\,'^2}{r^2}\Big) + \frac{3}{8}\Big(-\frac{2\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^2} + \frac{r\,'^2}{r^2}\Big)^2 + \ldots\bigg). \tag{22}$$

Po podniesieniu do kwadratu wyrażenia tworzącego trzeci człon rozwinięcia, uwzględniamy tylko kwadrat $2\vec{r}\cdot\vec{r}\,'/r^2$, gdyż kolejne wyrazy są już dużo mniejsze. Tak znajdujemy

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}=\frac{1}{r}+\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^3}-\frac{r'^2}{2r^3}+\frac{3(\vec{r}\cdot\vec{r}\,')^2}{2r^5}+\dots. \tag{23}$$

Podstawiając wyrażenie (23) do równania (20) otrzymujemy tzw. rozwinięcie multipolowe

$$\Phi(\vec{r})=\frac{1}{r}\int d^3r'\,\rho(\vec{r}\,')+\frac{1}{r^3}\int d^3r'\,\rho(\vec{r}\,')\,\vec{r}\cdot\vec{r}\,'+\frac{1}{2r^5}\int d^3r'\,\rho(\vec{r}\,')\Big(3(\vec{r}\cdot\vec{r}\,')^2-r^2r'^2\Big)+\dots, \tag{24}$$

co można zapisać jako

$$\Phi(\vec{r})=\frac{q}{r}+\frac{r^ip^i}{r^3}+\frac{r^ir^jQ^{ij}}{2r^5}+\dots, \tag{25}$$

gdzie wielkości q, p^i i Q^{ij} to momenty monopolowy, dipolowy i kwadrupolowy rozkładu ładunku, zdefiniowane następująco

$$q \equiv \int d^3r\,\rho(\vec{r}), \tag{26}$$

$$p^i \equiv \int d^3r\,\rho(\vec{r})\,r^i, \tag{27}$$

$$Q^{ij} \equiv \int d^3r\,\rho(\vec{r})\,(3r^ir^j-\delta^{ij}r^2). \tag{28}$$

Moment monopolowy jest wielością skalarną, dipolowy wektorową, a kwadrupolowy jest tensorem.

Wzór (25) pokazuje, że im wyższego rzędu jest dany moment tym szybciej maleje ze wzrostem odległości (r) jego wkład do potencjału. Wkład monopolowy ubywa jak r^{-1}, dipolowy jak r^{-2}, kwadruplowy zaś jak r^{-3}.

Moment monopolowy występuje, jeśli tylko całkowity ładunek jest różny od zera. Moment dipolowy może być niezerowy nawet wtedy, gdy całkowity ładunek znika, podobnie jest momentem kwadrupolowy. Moment kwadrupolowy może się pojawić i wtedy, gdy momenty monopolowy i dipolowy są zerowe. Uwzględniając kolejne momenty coraz dokładniej opisujemy rozkład ładunku.