

Elektrostatyka I

Elektrostatyka opisuje układy ładunków i pól elektrycznych, które nie ulegają zmianom w czasie. Na początek będziemy zajmować się elektrostatyką w próżni tzn. przyjmujemy, że ładunki występują w próżni lub, co równoważne, pomijamy wpływ ośrodka, w którym znajdują się ładunki, na rozważane zjawiska.

Kluczowym pojęciem w elektrostatyce jest ładunek punktowy – obiekt obdarzony ładunkiem elektrycznym, mający rozmiar dużo mniejszy niż charakterystyczne długości występujące w danym problemie.

Prawo Coulomba

W efekcie wykonania całej serii eksperymentów w latach 80-tych XVIII wieku Charles Augustin de Coulomb sformułował prawo określające siłę działającą między dwoma ładunkami punktowymi q_1 i q_2 . Prawo Coulomba przedstawiamy w trzech punktach:

- siła jest proporcjonalna do iloczynu ładunków $q_1 q_2$, co sprawia, że odpychanie występuje w przypadku ładunków jednoimiennych a przyciąganie różnoimiennych;
- siła jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości między ładunkami;
- siła działa wzdłuż wektora łączącego położenia ładunków.

Prawo Coulomba zapisujemy równaniem

$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}, \quad (1)$$

gdzie \vec{F} to oczywiście siła, \hat{r} jest wersorem czyli wektorem jednostkowym wzdłuż wektora \vec{r} łączącego położenia ładunków, a zatem

$$\hat{r} \equiv \frac{\vec{r}}{r}, \quad (2)$$

przy czym $r \equiv |\vec{r}|$ jest długością wektora \vec{r} . Stała proporcjonalności k , występująca w równaniu (1), zależy od wyboru jednostek. Wyjaśnijmy na czym polega problem.

Siłę mierzymy w jednostkach, które są iloczynem jednostek masy m , długości l i czasu t w kombinacji

$$[F] = \left[\frac{m l}{t^2} \right]. \quad (3)$$

Po prawej stronie równania (1) mamy ładunek w kwadracie i długość w kwadracie, wersor jest, oczywiście, bezwymiarowy. Jeśli, tak jak w układzie SI, ładunki mierzymy w specyficznych jednostkach, w układzie SI są to kulomby oznaczane symbolem C, to stała proporcjonalności k musiałyby mieć wymiar

$$[k] = \left[\frac{m l^3}{t^2 q^2} \right], \quad (4)$$

aby siła po lewej stronie równania (1) miała właściwy wymiar. W układzie SI stałą k wybiera się jako

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,99 \cdot 10^9 \left[\frac{\text{N m}^2}{\text{C}^2} \right], \quad (5)$$

gdzie ϵ_0 jest tzw. przenikalnością elektryczną próżni, której wartość wynosi

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \left[\frac{\text{C}^2}{\text{N m}^2} \right], \quad (6)$$

N oznacza jednostkę siły niuton równą kg m s^{-2} , zaś m to metr. Jeśli więc ładunki wyrażamy w kulombach, a odległość w metrach, to wielkość siły danej prawem Coulomba otrzymujemy w niutonach. Wartość liczbową ϵ_0 , a w konsekwencji wartość stałej k , jest tak dobrana, że dwa ładunki każdy o wielkości jednego kulomba, umieszczone w odległości jednego metra jeden od drugiego działają na siebie siłą jednego niutona.

W układzie CGS $k = 1$, a ładunek mierzy się w tzw. *jednostkach elektrostatycznych*, które definiujemy następująco: *dwa jednostkowe ładunki punktowe oddalone od siebie o 1 cm odpychają się wzajemnie siłą jednej dyny*. Jak pamiętamy, dyna to jednostka siły w układzie CGS równa g cm s^{-2} . Jednostka elektrostatyczna to zatem $\sqrt{\text{dyna cm}}$. W dalszej części wykładu będziemy stosować układ CGS.

Równanie (1), wyrażające prawo Coulomba, zapisane jest przy założeniu, że jeden z ładunków znajduje się w początku układu współrzędnych ($\vec{r} = 0$), a położenie drugiego wyznacza wektor \vec{r} . Jeśli natomiast przyjąć, że położenie ładunku q_1 określa wektor \vec{r}_1 , a q_2 wektor \vec{r}_2 , wówczas prawo Coulomba przyjmuje postać

$$\vec{F} = q_1 q_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}. \quad (7)$$

Zasada superpozycji sił i układ N ładunków

Jeśli mamy układ N ładunków, to siła działająca na dany ładunek jest, zgodnie z zasadą superpozycji, sumą wektorową sił pochodzących od pozostałych ładunków. W przypadku trzech ładunków pokazanym na rysunku 1, siła działająca na ładunek q_1 pochodząca od ładunków q_2 i q_3 jest sumą wektorową sił działających między ładunkami q_1 i q_2 oraz q_1 i q_3 .

Wzór (7) uogólniony na przypadek N ładunków, określający siłę działającą na ładunek q_i ze strony pozostałych ładunków, zgodnie z zasadą superpozycji przybiera postać

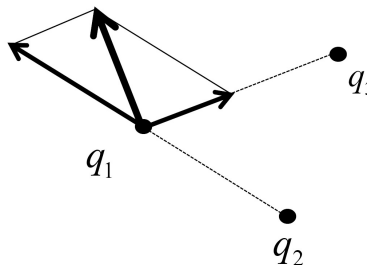
$$\vec{F}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^N q_i q_j \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3}, \quad (8)$$

przy czym sumując po ładunkach pomijamy ładunek q_i .

Pole elektryczne

Niezwykle ważnym pojęciem jest pole elektryczne $\vec{E}(\vec{r})$, będące wektorową funkcją położenia, które definiujemy w taki sposób, że $q\vec{E}(\vec{r})$ jest siłą jaka działa na ładunek q umieszczony w punkcie \vec{r} . Piszemy więc

$$\vec{F} = q\vec{E}(\vec{r}). \quad (9)$$



Rysunek 1: Zasada superpozycji dla przypadku trzech ładunków, z których q_1 i q_2 są jednoimienne, a q_1 i q_3 różnoimienne. Strzałki oznaczają siły działające na ładunek q_1 .

Przyjmujemy dodatkowe założenie, że ładunek jest na tyle mały, że swoją obecnością nie zmienia pola $\vec{E}(\vec{r})$. Ładunek taki nazywamy ładunkiem próbnym.

Wzór (8) mówi, że pole elektryczne pochodzące od układu N ładunków ma postać

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N q_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}. \quad (10)$$

W przypadku jednego ładunku umieszczonego w punkcie \vec{r}_0 mamy

$$\vec{E}(\vec{r}) = q \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3}, \quad (11)$$

a gdy ładunek znajduje się w początku układu współrzędnych, wzór się jeszcze upraszcza

$$\vec{E}(\vec{r}) = q \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{q}{r^2} \hat{r}. \quad (12)$$

Ciągły rozkład ładunku

Jeśli mamy do czynienia nie z dyskretnymi ładunkami, lecz ciągłym rozkładem ładunku, wprowadzamy funkcję $\rho(\vec{r})$ zwaną gęstością ładunku, taką że wielkość $\rho(\vec{r})d^3r$ jest ładunkiem w nieskończenie małej objętości d^3r wokół punktu \vec{r} . Ładunek w całej przestrzeni, który oznaczamy jako Q , dany jest całką

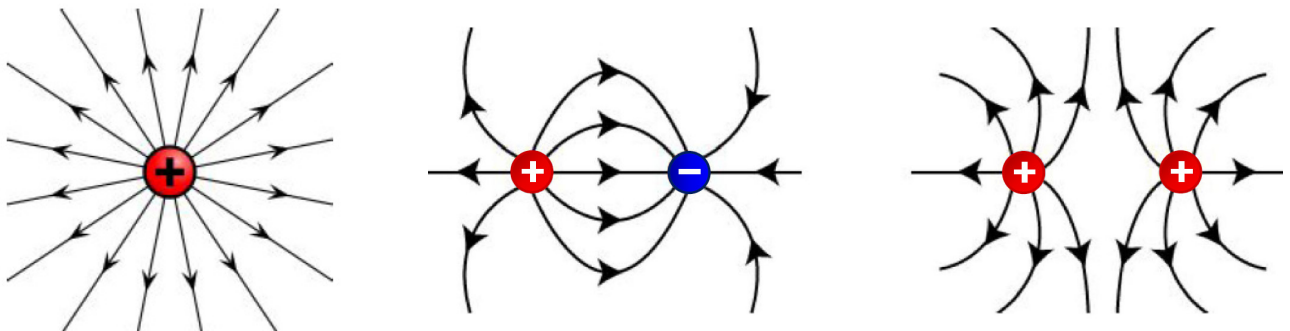
$$Q = \int d^3r \rho(\vec{r}). \quad (13)$$

Zamieniając sumowanie we wzorze (10) na całkowanie, znajdujemy pole elektryczne pochodzące od ciągłego rozkładu ładunku

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int d^3r' \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (14)$$

Linie pola

Użytecznym pojęciem wizualizującym pojęcie pola elektrycznego jest linia pola, która określa kierunek siły, jaka działa na próbny ładunek dodatni w danym polu. Linie pola – trzy przykłady pokazują poniższe rysunki – „wychodzą” z ładunków dodatnich i „wchodzą” w ładunki ujemne. Gęstość linii pola wskazuje wielkość natężenia pola.



Rysunek 2: Linie pola jednego dodatniego ładunku oraz par ładunków: dodatniego z ujemnym i dwóch dodatnich.