Verschränkung und das Einstein-Podolksy-Rosen-Paradoxon

Vortrag von Jonathan Neff im Rahmen des Proseminars "Neue Entwicklungen der Quantenmechanik" im Sommersemester 2014

1 Hintergrund

Bezüglich der Interpretation der neu entwickelten Quantenmechanik war die Wissenschaft Ende der 1920er in zwei Lager gespalten. Auf der einen Seite standen die Vertreter der Kopenhagener Deutung von 1927, auf der anderen deren Gegner.
Die wesentlichen Aussagen der unterschiedlichen Positionen:

Befürworter:

- Raum-Zeit-Darstellung und Forderung der Kausalität sind komplementäre Eigenschaften der Beschreibung durch Beobachtung (Komplementarität).
- Das Beobachten von Quantensystemen ist verbunden mit einer Interaktion des Systems mit dem Messapparat, welche nicht kontrollierbar ist. Messergebnisse können deshalb nur statistisch vorhergesagt werden (Wahrscheinlichkeitsinterpretation nach Born).
- Der statistische Charakter der Quantentheorie ist im Gegensatz zu klassischer statistischer Phänomene indeterministisch.
- Die Quantenmechanik ist als Theorie nicht unvollständig und beschreibt keine neue Wirklichkeit.

Auffassung von Bohr: Die Eigenschaften eines Quantensystems hängen auf fundamentale Weise von experimentellen Gegebenheiten ab, insbesondere von den Bedingungen der Messung selbst.

Gegner:

- Die Quantenmechanik ist nicht in der Lage die Realität unabhängig vom Beobachter auf exakte Weise, sondern lediglich statistisch vorherzusagen.
- Diese Nichtrealität weise auf die Unvollständigkeit der Quantenmechanik hin.
- Vorschlag der Vervollständigung der Theorie durch "verborgene Variablen"

Auffassung von Einstein: Eine vollständige Theorie müsse in der Lage sein die Realität unabhängig vom Beobachter exakt zu beschreiben. Das Experiment fungiert dabei als Spiegel der Realität.
Einstein störte sich am statistischen Charakter und der Nichtrealität der Quantenmechanik und versuchte deshalb deren Widersprüchlichkeit anhand eines Paradoxons zu zeigen, um daraus auf ihre Unvollständigkeit zu schließen.

2 Begriffsklärung “Verschränkung”

Ein verschränkter Zustand bezeichnet eine Zusammensetzung aus zwei Quantensystemen (Überlagerung), welche sich nicht als Produkt reiner Zustände der Systeme schreiben lässt. Seien A und B Quantensysteme mit den Hilberträumen $\mathcal{H}_A$ und $\mathcal{H}_B$. Sind die Systeme nun im jeweils reinen Zustand $|\Psi\rangle_A$ bzw. $|\Phi\rangle_B$ gegeben, so ist der Zustand des zusammengesetzten Systems ebenfalls ein reiner Zustand und gegeben durch $|\Psi\rangle_A|\Phi\rangle_B$ auf dem zugehörigen Hilbertraum $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_A$. Reine Zustände lassen sich nach den Orthonormalbasen $\{|n\rangle_A\}$ und $\{|m\rangle_B\}$ der Hilberträume entwickeln:

$$|\Psi\rangle_A = \sum_{n=1}^{N} a_n |n\rangle_A \qquad \text{und} \qquad |\Phi\rangle_B = \sum_{m=1}^{M} b_m |m\rangle_B$$

Der aus zwei reinen Zuständen zusammengesetzte Zustand lässt sich wie folgt schreiben:

$$|\Psi\rangle_A|\Phi\rangle_B = \left(\sum_{n=1}^{N} a_n |n\rangle_A\right)\left(\sum_{m=1}^{M} b_m |m\rangle_M\right) = \sum_{n,m} a_n b_m |n\rangle_A |m\rangle_B$$

Ein allgemeiner Zustand auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_A$ ist gegeben durch die Form

$$|\chi\rangle = \sum_{n,m} c_{nm} |a\rangle_A |b\rangle_B$$

Einen Zustand $|\chi\rangle$ bezeichnet man als separabel, wenn sich die komplexen Koeffizienten c_{nm} des Zustandes faktorisieren lassen, sodass $c_{nm} = a_n b_m$ gilt. Andernfalls spricht man von einem verschränkten Zustand. Verschränkte Zustände lassen sich demnach nicht als Produkt reiner Zustände auf den jeweiligen Teilhilberträmen darstellen.

Beispiel:
Singulett Spin-Zustand

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\uparrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B - |\downarrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B\right)$$

und ebenso folgender Triplett-Zustand

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\uparrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B + |\downarrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B\right)$$

Warum handelt es sich bei diesen um verschränkte Zustände?

“Beweis”:
Die Zustände der Teilchen können im Allgemeinen jeweils als Linearkombination der reinen Zustände “Spin-Up”und “Spin-Down“ dargestellt werden.

$$|A\rangle = a|\uparrow\rangle_A + b|\downarrow\rangle_A \qquad \text{und} \qquad |B\rangle = c|\uparrow\rangle_B + d|\downarrow\rangle_B$$

Dadurch ergibt sich im Allgemeinen Fall für den aus beiden Spin-Systemen zusammengesetzter Zustand:

$$|\chi\rangle = ac|\uparrow\rangle_A|\uparrow\rangle_B + ad|\uparrow\rangle_A|\downarrow\rangle_B + bc|\downarrow\rangle_A|\uparrow\rangle_B + bd|\downarrow\rangle_A|\downarrow\rangle_B$$

Um in dieser Darstellung mit faktorisierten Koeffizienten entweder den Singulett-Zustand oder den oben genannten Triplett-Zustand zu erhalten, muss sowohl $ab = 0$, als auch $bd = 0$ gelten. Dies bedeutet jedoch gleichzeitig, dass auch ad oder bc verschwindet. Daraus folgt, dass sich weder der Singulett-Zustand $|\Psi\rangle$, noch jener Triplett-Zustand $|\Phi\rangle$ mit faktorisierten Koeffizienten darstellen lassen. Es handelt sich deshalb um verschränkte Zustände.

3 Paradoxon von Einstein, Podolsky und Rosen (1935)

Einstein, Podolsky und Rosen (im Folgenden EPR genannt) veröffentlichten 1935 einen Artikel, mit welchem sie das Ziel verfolgten aus einer vermeintlichen Widersprüchlichkeit der Quantenmechanik, aufgezeigt anhand eines Paradoxons, die Unvollständigkeit der Quantentheorie abzuleiten. Die Argumentation EPRs lautet wie folgt:

Zu Beginn geben EPR ihre **eigenen Definitionen/hinreichenden Bedingungen** für (a) eine **vollständige Theorie** und (b) die **physikalische Realität**.

(a) Notwendige Bedingung für eine vollständige Theorie:
"Jedes Element in der physikalischen Realität muss eine Entsprechung in der physikalischen Theorie besitzen."

(b) Hinreichende Bedingung für die physikalische Realität ("Realitätsbedingung"):
"Wenn wir, ohne das System in irgendeiner Weise zu stören, mit Gewissheit (d.h., mit einer Wahrscheinlichkeit von 1) den Wert einer physikalischen Größe vorhersagen können, dann existiert ein physikalisch reales Element, welches dieser physikalischen Größe entspricht."

Eine physikalische Theorie ist demnach vollständig, wenn sich alle in der physikalischen Realität existierenden Größen beschreiben lassen, ohne in irgendeiner Weise Einfluss auf die Realität zu nehmen.
EPR weisen weiter darauf hin, dass in der Quantenmechanik die Beschreibung von Zuständen von Systemen durch die Wellenfunktion $|\Psi\rangle$ erfolgt, welche dadurch eine zentrale Rolle einnimmt. Außerdem entspricht jede beobachtbare, physikalische Größe P (z.B. der Impuls) in der Quantenmechanik einem Operator $\hat{P}$. Befindet sich das System in einem Zustand $|\Psi\rangle$, welcher Eigenzustand zum Messoperator $\hat{A}$ ist, so wird der Zustand durch die Messung nicht verändert und der Wert p der physikalischen Größe kann mit Gewissheit vorhergesagt werden:

$$|\Psi\rangle\prime = \hat{P}|\Psi\rangle = p|\Psi\rangle$$

Ist gleichzeitig der Wert x einer weiteren physikalischen Größe X (z.B. dem Ort) von Interesse, zu deren korrespondierenden Operator $\hat{X}$ der Zustand $|\Psi\rangle$ kein Eigenzustand ist, lässt sich der Wert der Größe nicht mit Gewissheit vorhersagen.

$$|\Psi\rangle\prime = \hat{X}|\Psi\rangle \neq x|\Psi\rangle$$

Um den Wert x zu bestimmen muss folglich eine Messung am System vorgenommen werden, was gezwungenermaßen eine Zustandsänderung nach sich zieht. Folglich können die beiden physikalischen Größen P und X nicht gleichzeitig mit Gewissheit vorhergesagt werden. Sie verhalten sich “komplementär”. Im Allgemeinen kann in der Quantenmechanik gezeigt werden, dass, wenn die Operatoren zweier physikalischer Größen A und B nicht kommutieren, also $[AB] \neq [BA]$ gilt, die exakte Kenntnis des Wertes der einen Größe die des Wertes der anderen ausschließt.

Auf Grundlage der Definition/hinreichenden Bedingung für die Vollständigkeit einer physikalischen Theorie und für die physikalische Realität sowie der Unbestimmtheitsrelation formulieren EPR die Disjunktheit folgender zwei Aussagen:

(I) Die quantenmechanische Beschreibung der Realität ,gegeben durch die Wellenfunktion, ist nicht vollständig.

(II) Zwei physikalische Größen, deren (Mess-)Operatoren nicht kommutieren, können nicht gleichzeitig real sein.

EPR behaupten, dass nur eine der beiden Aussagen Gültigkeit haben kann. Wenn demnach zwei komplementäre, physikalische Größen zeitgleich Realität erlangen könnten ($\hat{=}\neg(II)$), ihnen also definierte Werte zugeschrieben werden können, wären diese Teil einer vollständigen Beschreibung der Realität und könnten durch eine vollständige physikalische Theorie mit Gewissheit vorhergesagt werden. In der Quantenmechanik ist dies aufgrund der Unbestimmtheitsrelation jedoch nicht möglich, weshalb diese im Fall der Gültigkeit von (II) als unvollständige Theorie angesehen werden sein muss.

Kurzfassung der Argumentation von EPR:

(1) Definition von “Vollständigkeit einer physikalischen Theorie”und “physikalischer Realität”

(2) Feststellung/Akzeptanz der Unbestimmtheitsrelation innerhalb der Quantenmechanik (Komplementarität physikalischer Größen, deren Operatoren nicht kommutieren)

(3) Folgerung der Disjunktheit von Aussagen (I) und (II)

(4) Annahme der vollständigen Beschreibung durch Wellenfunktion und Anwendung auf konstruierten verschränkten Zustand zweier Systeme

(5) Unter Anwendung des Realitätskriteriums Folgerung, dass Aussage (II) Gültigkeit hat

(6) Unter Beachtung der Disjunktheit Folgerung, dass Aussage (II) keine Gültigkeit hat

Um zu zeigen, dass unter Anwendung des definierten Realitätskriterium zwei physikalische Größen eines Systems, deren Operatoren nicht kommutieren, zeitgleich Realität erlangen können, führen EPR folgendes **Gedankenexperiment** durch:

Man nehme zwei Systeme I und II an, welche für einen Zeitraum $0 \leqq t \leqq T$ daran gehindert werden miteinander zu interagieren, sodass für $t > T$ keine weitere Interaktion mehr stattfindet. Das bedeutet, dass für $t > T$ eine Änderung des einen System keinen Einfluss auf das andere System haben kann. Ferner sei angenommen, dass die Systeme für $t < 0$ vollständig bekannt sind, sodass deren Ursprungszustände durch eine Wellenfunktion beschrieben werden können. Mit Hilfe der Schrödingergleichung lässt sich daraus die zeitliche Entwicklung des zusammengesetzten Systems $\Psi(x_1, x_2) = I + II$ berechnen. Die Wellenfunktion dieses System $\Psi(x_1, x_2)$ beschreibt unter gewissen Umständen einen verschränkten Zustand. Sei $\hat{A}$ ein auf das System I bezogener Operator, welcher die Größe A misst, mit den Eigenwerten $a_1, a_2, ...$ und den zugehörigen Eigenfunktionen $u_1(x_1), u_2(x_2), ...$, so lässt sich die Wellenfunktion $\Psi(x_1 x_2)$ entwickeln nach den Eigenfunktionen:

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x_2) u_n(x_1)$$

Eine Messung der Größe A durch Anwenden des Operators $\hat{A}$ reduziert dabei den Zustand des Systems auf $\Psi\prime(x_1, x_2) = \phi_k(x_2) a_k u_k(x_1)$ und liefert den Wert a_k. Gleichzeitig hat die Messung der auf System I bezogenen Größe A den Zustand von System II verändert, welcher nun beschrieben wird durch $\phi_k(x_2)$.
Das Gesamtsystem kann jedoch ebenso nach den Eigenfunktionen $v_1(x_1), v_2(x_2), ...$ einer weiteren physikalischen Größe B mit dem korrespondierenden Operator $\hat{B}$ entwickelt werden:

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m(x_2) v_m(x_1)$$

Anwenden des Operators $\hat{B}$ reduziert auf analoge Weise die Gesamtwellenfunktion auf $\Psi\prime(x_1, x_2) = \varphi_l(x_2) b_l v_l(x_1)$, liefert den entsprechenden Eigentwert b_l und lässt System II in Zustand $\varphi_l(x_2)$ zurück. Für den Zustand des Systems II können je nach Interaktion mit System I zwei unterschiedliche Zustände (beschrieben durch die Wellenfunktionen $\phi_k(x_2)$ und $\varphi_l(x_2)$) erzeugt werden, welche beider der gleichen Realität angehören.

Vor dem Hintergrund dieser Eigenschaft verschränkter Systeme konstruieren EPR auf geschickte Weise eine Wellenfunktion für ein verschränktes System, welche sich in Eigenfunktionen nicht-kommutierender Operatoren entwickeln lassen.

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(2\pi i/h)(x_1 - x_2 + x_0)p} dp$$

x_0 stellt dabei eine Konstante dar. Der Zustand des Gesamtsystems lässt sich nach den zum Impulsoperator des ersten Teilchens $\hat{P}_1 = (h/2\pi i)\partial/\partial x_1$ gehörenden Eigenfunktionen $u_p(x_1) = e^{(2\pi i/h)px_1}$ mit dem Eigenwert p entwickeln.

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_p(x_2) u_p(x_1) dp$$

Die Funktion

$$\phi_p(x_2) = e^{(2\pi i/h)(x_2 - x_0)p}$$

ist dabei Eigenfunktion zum Impulsoperator des zweiten Teilchens $\hat{P}_2 = e^{(2\pi i/h)px_2}$ mit dem Eigenwert $-p$.

Der Zustand $\Psi(x_1, x_2)$ lässt sich andererseits auch nach den Eigenfunktionen $v_x(x_1) = \delta(x_1 - x)$ des Ortsoperators $\hat{X}_1 = x_1$ mit dem Eigenwert x entwickeln

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_x(x_2) v_x(x_1) dx$$

wobei

$$\varphi_x(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(2\pi i/h)(x - x_2 + x_0)p} dp = h\delta(x - x_2 + x_0)$$

die Eigenfunktion zum Ortsoperator $\hat{X}_2 = x_2$ mit Eigenwert $x + x_0$ ist.

Da der Impuls und Ort eines Teilchens komplementäre, physikalische Größen sind, deren Operatoren nicht kommutieren, haben EPR mit diesem verschränkten System gezeigt, dass es generell möglich ist eine Wellenfunktion in die Eigenfunktionen zweier nicht-kommutierender Operatoren gleichermaßen zu entwickeln.
Die Besonderheit des von EPR konstruierten verschränkten Zustandes ist, dass sowohl der Gesamtimpuls $p_1 + p_2 = 0$, als auch der Abstand der Orte $x_2 - x_1 = x_0$ Erhaltungsgrößen sind. In Bracket-Schreibweise lautet der EPR-Zustand wie folgt:

$$|\Psi\rangle_{EPR} = \sum_{x_1, x_2} \delta(x_1 - x_2 + x_0)|x_1\rangle|x_2\rangle = \sum_{p_1, p_2} \delta(p_1 + p_2)|p_1\rangle|p_2\rangle$$

Dieser besonders konstruierte, verschränkte Zustand zweier Systeme erlaubt es Teilchen 2 zwei Wellenfunktionen $\phi_p(x_2)$ und $\varphi_x(x_2)$ zuzuordnen, welche beider der gleichen Realität angehören und durch Messung des Impulses (bzw. Ortes) von Teilchen 1 den Impuls (bzw. Ort) von Teilchen 2 vorherzusagen, ohne das zweite System in irgendeiner Weise zu stören. Dem eigens formulierten Realitätskriterium zufolge, können somit beide physikalische Größen (Impuls und Ort) zeitgleich physikalische Realität annehmen.

Unter der Annahme, dass die Wellenfunktion den Zustand eines Systems vollständig charakterisiert, haben EPR in einem Gedankenexperiment mit Hilfe eines besonders konstruierten, verschränkten Zustandes zweier Systeme gezeigt, dass zwei physikalische Größen, deren Operatoren nicht kommutieren, zeitgleich physikalische Realität annehmen können. Unter Anwendung der Disjunktheit muss daraus geschlossen werden, dass die Quantenmechanik als physikalische Theorie nicht vollständig ist. Dies steht im Widerspruch zur Annahme!

4 Lösung des Paradoxons

Auch wenn von EPR nicht explizit genannt enthält deren Argumentation zwei weitere wichtige Annahmen, deren kritische Diskussion zur Lösung des EPR-Paradoxons beitragen kann.

Implizite Annahmen

1. Separabilität: Obwohl beide Systeme in irgendeiner Weise trotz räumlicher Trennung miteinander korreliert sind, werden ihnen jeweils unabhängige Realitäten zugeschrieben.

2. Lokalität: Sind zwei Systeme räumlich weit von einander getrennt, wird ein System nicht direkt durch eine Messung am anderen beeinflusst.

Die Problematik, welche sich aus diesen beiden Annahmen ergibt, ist, dass dem unbeeinflussten System die gleichzeitige Existenz/Realität von Impuls und Ort zugeschrieben werden kann, dem System, an welchem die Messung durchgeführt wird, jedoch nicht.

Bohr's Antwort

Da es zu jener Zeit Niels Bohr war, der wie kein anderer als vehementer Vertreter der Kopenhagener Deutung galt, liegt es nahe, dass er der erste war, welcher sich zu dem von EPR veröffentlichten Artikel äußerte. In seiner Antwort verdeutlichte er einmal mehr sein Verständnis von physikalischer Realität mit deren ureigenen Eigenschaften, sowie deren Beschreibung durch die Quantenmechanik. Anhand des Doppelspaltexperiments erläuterte er ausführlich welche Auswirkungen die Unbestimmtheitsrelation komplementärer physikalischer Größen, wie dem Ort und Impuls, auf das Ausmaß unserer Möglichkeiten das Verhalten von Quantenobjekten zu beschreiben hat. Seiner Überzeugung nach erlangen physikalische Größen erst dann Realität, wenn sie durch eine Messung bestätigt sind. Für komplementäre Größen bedeutet dies jedoch, dass dafür immer eine Änderung des Zustandes vorgenommen werden muss.
Seine Position gegenüber dem EPR-Paradoxon wird u.a. verdeutlicht durch folgende Punkte:

- Bohr ist grundsätzlich damit einverstanden, dass man über den verschränkten Zustand indirekt eine Messung am zweiten Systen vornehmen kann, ohne eine "mechanische" Störung zu verursachen.

- Dennoch behauptet er, dass eine Messung am ersten System Einfluss auf die Bedingungen hat, welche die möglichen Vorhersagen für das zukünftige Verhalten des zweiten Systems definieren.

- Aus diesem Grund erlaubt eine Messung am ersten System es nicht Vorhersagen mit gleicher Gewissheit über das Verhalten des zweiten Systems zu machen.

- Bohr unterscheidet demnach zwischen tatsächlicher, physischer Interaktion und einer Art Einfluss, welche die Bedingungen für mögliche Vorhersagen verändert.

Im Grundsatz argumentiert Bohr in seiner Antwort gegen EPRs implizite Annahme der Lokalität und deren Realitätskriterium. Dass zwei physikalische Größen, deren Operatoren nicht kommutieren, nicht gleichzeitig physikalische Realität haben können, begründet er am **Doppelspaltexperiment**:
Passieren Elektronen (oder sonst irgendwelche Quantenobjekte) einen Einzelspalt (Kohärenz!) mit dahinter liegendem Doppelspalt, so lässt sich hinter diesem Versuchsaufbau eine Interferenz der Objekte (u.U. mit sich selbst) beobachten. Konstruiert man den Versuchsaufbau so, dass der Impulsübertrag des Objekte auf den ersten Spalt gemessen werden kann, woraus man folgern könnte, welchen der beiden dahinter liegenden Spalte das Objekt passiert, lässt sich keine Interferenz beobachten. Der Grund hierfür ist, dass bei der exakten Bestimmung des Impulsübertrages am Einzelspalt aufgrund der Unbestimmtheitsrelation die Information über den Ort des Impulsübertrages verloren geht. Die Position des Einzelspaltes ist somit mit einer Unschärfe behaftet, welche sich auf das Interferenzmuster überträgt. Das Interferenzmuster ist über ein Ortsintervall "verwischt".

5 Bohm's Formulierung des EPR-Gedankenexperiment

Da das Gedankenexperiment von Einstein, Podolsky und Rosen im Labor nicht durchführbar ist, formulierte der Physiker David Bohm dieses neu. Er betrachtet verschränkte Spin-Zustände. Ausgehend von zwei Systemen I und II, welche jeweils im Allgemeinen zusammengesetzt sind aus einer Linearkombination der zugehörigen Basisvektoren, der Zustände Spin-Up $|\uparrow\rangle_i$ und Spin-Down $|\downarrow\rangle_i$ mit $i = 1$ für System I, $i = 2$ für System II. Es existieren nun genau zwei Zustände des zusammengesetzten Systems, welche sich nicht als Linearkombination zweier reiner Zustände schreiben lassen:

(a) Singulett-Zustand
$$|\Psi\rangle_S = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2\right)$$

(b) Triplett-Zustand
$$|\Phi\rangle_T = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 + |\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2\right)$$

Die Zustände können unterschieden werden, indem der Gesamtspin gemessen wird. So hat der Singulett-Zustand einen Gesamtspin von $S_S = 0\hbar$, der Triplett-Zustand hat hingegen einen Gesamtspin von $S_T = \hbar^2$.
Die Zustände $|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2$ und $|\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2$ können wiederum ausgedrückt werden durch Linearkombination aus Singulett- und Triplett-Zuständen, sogenannte "Mischzustände":

$$|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\Phi\rangle_T + |\Psi\rangle_S\right)$$

und

$$|\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\Phi\rangle_T - |\Psi\rangle_S\right)$$

Würde man demnach bei einem solchen 2 Spin-System den Gesamtspin S messen, so würde man in 50% der Fällen $S = 0\hbar$ und in den anderen 50% der Fällen $S_S = \hbar^2$ messen.

Mit diesem Wissen über verschränkte Spin-Zustände lässt sich nun das EPR-Paradoxon experimentell durchführbar, wie Bohm 1957 zeigte, wie folgt umformulieren:

1. Ausgangspunkt ist ein verschränktes System im Singulett-Zustand (Singulett durch Messung des Gesamtspins von Triplett unterscheidbar!), bestehend aus den Teilsystemen I und II, welches zum Zeitpunkt $t = 0$ zerfällt, sodass die Teilsysteme räumlich von einander getrennt werden. In der Natur ist dies zum Beispiel durch Dissoziation eines Moleküls gegeben.

2. Zum Zeitpunkt $t = t_0$ wird nun die z-Komponente des Spins des System I gemessen. Erwartungsgemäß erhält man zu einer Wahrscheinlichkeit von 50% $|\uparrow\rangle_1$ oder $|\downarrow\rangle_1$. Wir nehmen o.B.d.A. $|\uparrow\rangle_1$ an.

3. Aufgrund der Verschränkung des Gesamtzustandes und der Tatsache, dass die Systeme I und II wegen der räumlichen Trennung nichts von einer Messung am jeweils anderen System "bemerken", kann mit Gewissheit die z-Komponente des Spins von System II vorhergesagt werden. Um den Gesamtspin des Singulett-Zustandes $S = 0\hbar$ zu erhalten, bleibt nur die Möglichkeit, dass System II den Spin $|\downarrow\rangle_2$ hat. Dies lässt sich durch eine Messung zum Zeitpunkt $t > t_0$ bestätigen.

4. Unter der gemachten Annahme, dass System I und II sich nach ihrer Trennung nicht mehr beeinflussen können, lässt sich folgern, dass sich System II zu jeder Zeit t im Zustand $|\downarrow\rangle_2$ befand.

5. Das Gesamtsystem muss demnach zu jedem Zeitpunkt t durch den Produktzustand $|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2$ gegeben sein.

6. Dieser Produktzustand muss sich im Allgemeinen als ein Mischzustand aus Singulett und Triplett darstellen lassen.

Punkt 6 dieser Argumentation widerspricht der zu Beginn gemachten Annahme, dass sich das Gesamtsystem in einem Singulett-Zustand befindet, welcher sich durch Messung des Gesamtspins von einem Mischzustand unterscheidet. Das Experiment führt demnach zu einem Paradoxon, welches sich auch hier auflösen lässt, indem die implizite Annahme der Lokalität der Teilsysteme (Argumentationsschritt 3) als falsch angenommen wird.

Literatur

Bohm, D. & Aharonov, Y. (1957). Discussion of experimental proof for the paradox of einstein, rosen, and podolsky, *Physical Review* **108**(4): 1070.

Bohr, N. (1935). Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?, *Physical review* **48**(8): 696–702.

Einstein, A., Podolsky, B. & Rosen, N. (1935). Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?, *Physical review* **47**(10): 777.

Fine, A. (2013). The einstein-podolsky-rosen argument in quantum theory, *in* E. N. Zalta (ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, winter 2013 edn.