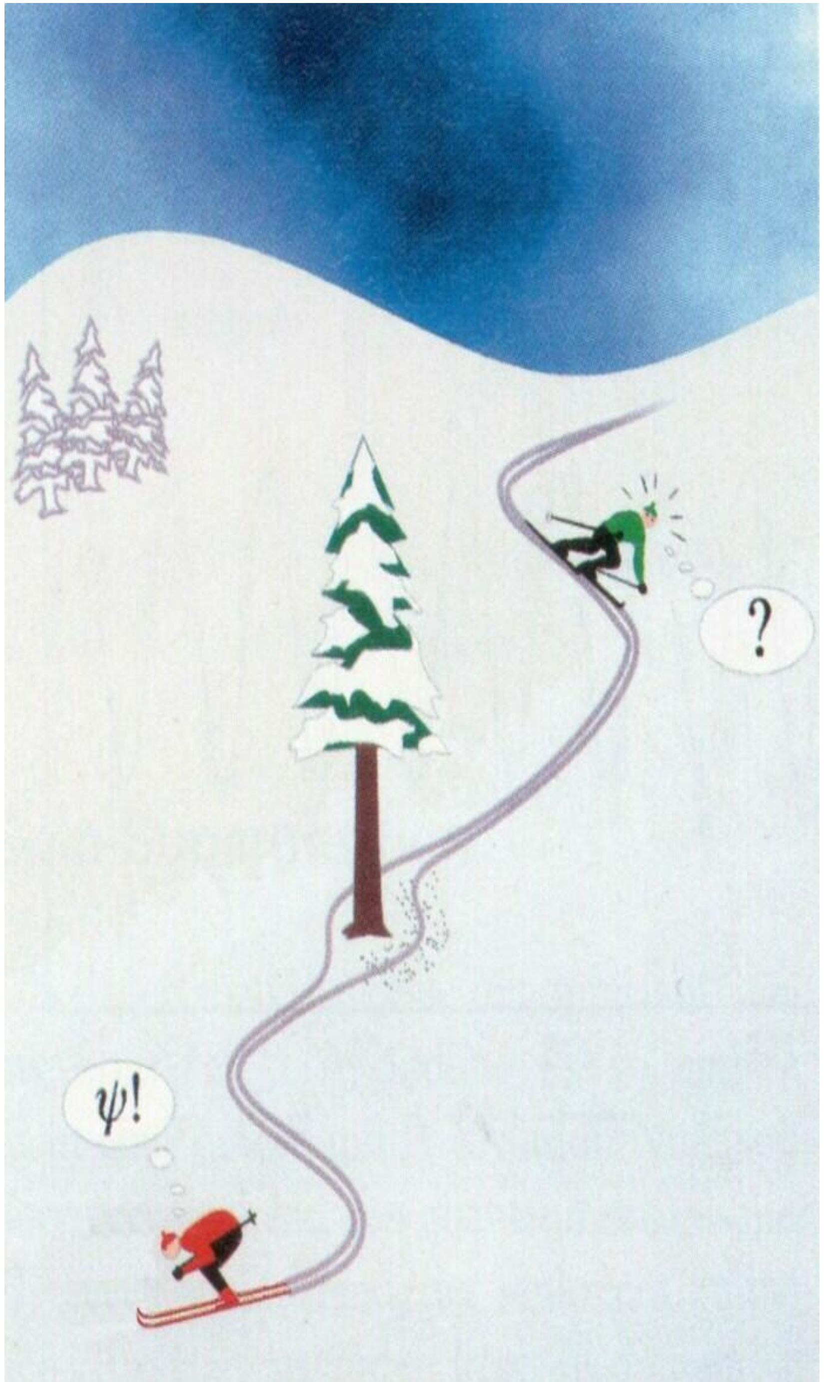
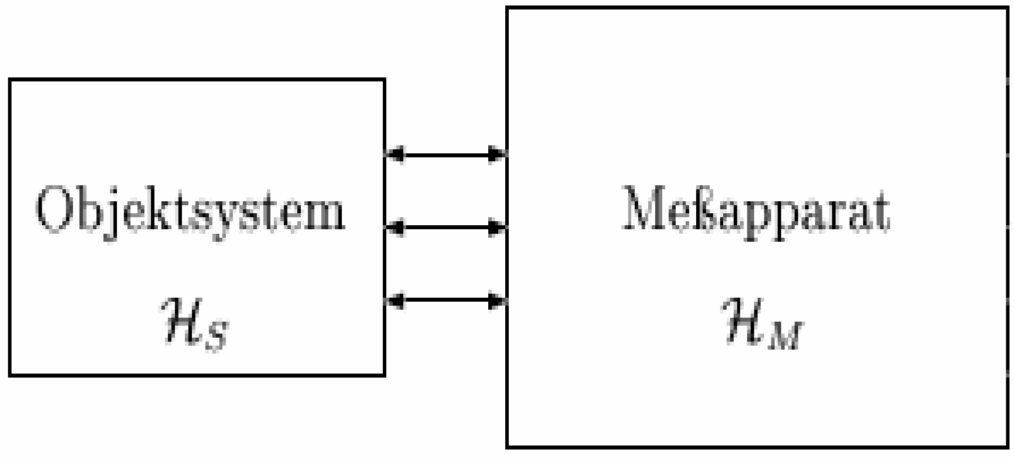
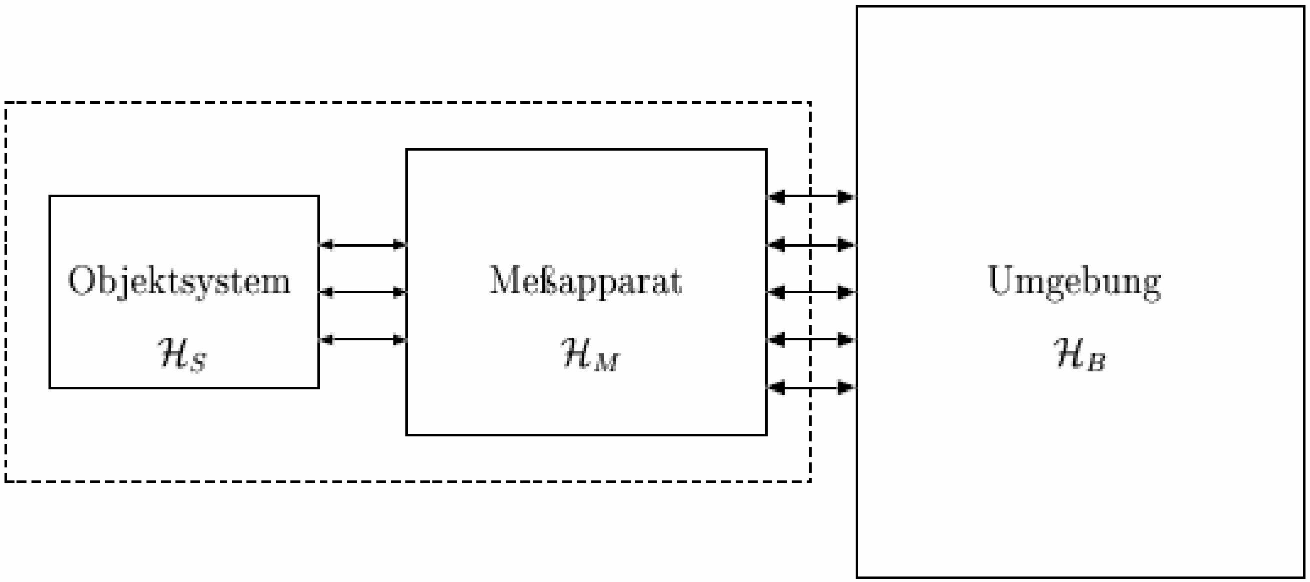
DEKOHÄRENZ


?
ψ!

„Man kann auch ganz burleske Fälle konstruieren. Eine Katze wird in eine Stahlkammer gesperrt, zusammen mit folgender Höllenmaschine (die man gegen den direkten Zugriff der Katze sichern muß): in einem Geigerschen Zählrohr befindet sich eine winzige Menge radioaktiver Substanz, so wenig, daß im Lauf einer Stunde vielleicht eines von den Atomen zerfällt, ebenso wahrscheinlich aber auch keines; geschieht es, so spricht das Zählrohr an und betätigt über ein Relais ein Hämmerchen, das ein Kölbchen mit Blausäure zertrümmert. Hat man dieses ganze System eine Stunde lang sich selbst überlassen, so wird man sich sagen, daß die Katze noch lebt, wenn inzwischen kein Atom zerfallen ist. Der erste Atomzerfall würde sie vergiftet haben.
Die ψ-Funktion des ganzen Systems würde das so zum Ausdruck bringen, daß in ihr die lebende und die tote Katze zu gleichen Teilen gemischt oder verschmiert sind."

Erwin Schrödinger, Naturwiss. **23**, 807, 823, 844


Objektsystem
$\mathcal{H}_S$
Meßapparat
$\mathcal{H}_M$


Objektsystem
$\mathcal{H}_S$
Meßapparat
$\mathcal{H}_M$
Umgebung
$\mathcal{H}_B$

„… by decoherence I mean the practically irreversible and practically unavoidable […] disappearance of certain phase relations from the states of local systems by interaction with their environment according to the Schrödinger equation.“

„What is achieved by Decoherence?“ Dieter Zeh

Dichteoperator

$$\varrho := \sum_n p_n |\psi_n><\psi_n| = \sum_n p_n \hat{P}$$

Eigenschaften: $\langle A \rangle = \sum_n p_n \langle \psi_n | \hat{A} | \psi_n \rangle = Tr \langle \hat{\rho} \hat{A} \rangle$

Spur: $Tr(x) = \sum_n \langle n | x | n \rangle$

$Tr(\rho) = 1$

$\langle \rho \rangle \leqslant 1$ (Gleichheit gilt bei reinen Zuständen)

Einfaches Modell für Dekohärenz

System: Atom mit Spin ± ½

$$|S> \; = \; a|+> \; + \; b|->$$

$$|a|^2+|b|^2=1$$

Umwelt: N Atome, Index K= 1…N

Hamilton Operator der Wechselwirkung

$$H \; = \; \hbar g_1 \sigma_Z \sigma_Z^{(1)} \; + \; \hbar g_2 \sigma_Z \sigma_Z^{(2)} \; + \; \ldots \; + \; \hbar g_K \sigma_Z \sigma_Z^{(K)} \; = \; \hbar \sum_K g_K \sigma_Z \sigma_Z^{(K)}$$

$$|\psi>_{t=0} \; = \; |S>_{t=0} \quad |E>_{t=0}$$

$$|S> \; = \; a|+> \; + \; b|->$$

$$|E>_{t=0} = \prod_{K=1}^{N} \left(\alpha_K |+>_K + \beta_K |->_K\right)$$

Unitäre Zeitentwicklung: $U(t,0) = e^{-iHt}$

$$e^{-iHt} = e^{-iH_1 t} * e^{-iH_2 t} * \ldots * e^{-iH_N t} \quad H_K \; = \; g\,\sigma_Z \sigma_Z^{(K)}$$

$$|\psi(t)> \; = \; e^{(-iHt)} |\psi(0)>$$

$$|\psi(t)> \; = \; a|+> \prod_{K=1}^{N} \left(\alpha_K e^{-ig_k t} |+>_K + \beta_K e^{ig_k t} |->_K\right)$$
$$+ \; b|-> \prod_{K=1}^{N} \left(\alpha_K e^{-ig_k t} |+>_K + \beta_K e^{ig_k t} |->_K\right)$$

Dichteoperator: $\varrho = |\psi(t)><\psi(t)|$

$$\rightarrow \; 2^{N+1} X \, 2^{N+1} \text{Matrix}$$

Für N = 1

$$\begin{aligned} |\psi(t)> = {} & a|+>\left(\alpha_1 e^{-ig_1 t}|+>_1 \; + \; \beta_1 e^{ig_1 t}|->_1\right) \\ & + b|->\left(\alpha_1 e^{-ig_1 t}|+>_1 \; + \; \beta_1 e^{ig_1 t}|->_1\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} <\psi(t)| = {} & a^* <+|\left(\alpha_1^* e^{ig_1 t}\,{}_1<+| \; + \; \beta_1^* e^{-ig_1 t}\,{}_1<-|\right) \\ & + b^* <-|\left(\alpha_1^* e^{ig_1 t}\,{}_1<+| \; + \; \beta_1^* e^{-ig_1 t}\,{}_1<-|\right) \end{aligned}$$

$$|\psi(t)><\psi(t)| \; = \; |\alpha|^2 |a|^2 |+>|+>_1 <+|_1<+| \; + \; |a|^2 (\alpha\beta^*) e^{-ig_1 t} |+>|+>_1 <+|_1<-| \; + \; \ldots$$

$$= \left(|+>|+>_1 \,, |+>|->_1, |->|+>_1, |->|->_1\right) \begin{pmatrix} |a|^2|\alpha_1|^2 & |a|^2(\alpha\beta^*)e^{-2\mathrm{i}g_1 t} & \ldots & \ldots \\ \ldots & |a|^2|\beta_1|^2 & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & |b|^2|\alpha_1|^2 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & |b|^2|\beta_1|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} <+|_1<+| \\ <+|_1<-| \\ <-|_1<+| \\ <-|_1<-| \end{pmatrix}$$

Der reduzierte Dichteoperator

$$\varrho_{\text{red}} = Tr^{E}[\varrho] = \sum_{i_1 \ldots i_N = \pm 1} < E_1 \ldots E_N | \varrho | E_1 \ldots E_N >$$

Für N = 1

$$\varrho_{\text{red}} = {}_1<+|\varrho|+>_1 + {}_1<-|\varrho|->_1$$

$$= |a|^2 |+><+| + |b|^2 |-><-| + Z(t)\, a b^* |+><-| + Z^*(t)\, a^* b |-><+|$$

Mit:

$$Z(t) = \cos(2 g_1 t) + i(|\alpha_1|^2 - |\beta_1|^2)\sin(2 g_1 t)$$

$$Z(t) = \prod_{K=1}^{N} \left[\cos(2g_K t) + i(|\alpha_K|^2 - |\beta_K|^2)\sin(2g_K t)\right]$$

$$Z(0) = 1$$

$$|Z(t)_K| = \sqrt{\cos(2g_K t)^2 - (|\alpha_K|^2 - |\beta_K|^2)^2 \sin(2g_K t)^2}$$

$$(|\alpha_K|^2 - |\beta_K|^2)^2 < 1$$

$$|Z(t)| = \prod_K |Z(t)_K| \rightarrow 0$$

$$\varrho_{\mathrm{red}} = \begin{pmatrix} |a|^2 & Z(t)ab^* \\ Z^*(t)a^*b & |b|^2 \end{pmatrix}$$

Dehohärenzzeiten [s]

Umgebungseinfluss	Freies Elektron	Staubteilchen 10 µm	Bowlingkugel
300 K, Normaldruck	10^{-12}	10^{-18}	10^{-26}
300 K, Ultrahochvakuum	10	10^{-4}	10^{-12}

„Decoherence cannot therefore solve the philosophical problem of understanding the human preception of a particular reality. However, it can explain the emergence of classicality, that is how and when an object loses its quantum features and becomes indistinguishable from a classical description“

M. Arndt, K. Hornberger & A. Zeilinger; Probing the Limits of quantum world