GHIRARDI - RIMINI - WEBER - Theorie

(Vortrag im Proseminar "Neue Entwicklungen der QM, Lisa Olbrich, 31.05.13)

1. DAS QM MESSPROBLEM BZW. TRENNUNG ZW. MIKRO- & MAKRO-WELT

- Problem der QM: Die Theorie beinhaltet 2 unvereinbare dynamische Prinzipien:
  - die lineare Schrödinger Entwicklung (deterministisch)
  - den Kollaps der Wellenfunktion (stochastisch)
- Grenze zw. Mikro- und Makrowelt bei Messprozess?
- 2 mögliche Lsgen:

  (1) Man akzeptiert, dass die Theorie nur in bestimmten Bereichen gültig ist. Dann müsste die Theorie aber auch eine Grenze zwischen Mikro- und Makrowelt; zw klassischer und QM liefern. ⇒ Dualismus in Natur

  (2) Suche ein QM Modell der Messungen als dynamische Prozesse mit präzisen Regeln, welche auf der einen Seite das Mikroskopische System beschreiben können; gleichzeitig aber auch die klassischen Aspekte der Makrowelt aufzeigen.
- Da Lsg (1) nicht befriedigend ist, beschäftigen wir uns im Folgenden mit sog. Kollaps-Theorien welche eine mögliche Verwirklichung der Lsg. (2) darstellen.

2. GRW-THEORIE, Dynamic REDUCTION MODELS

- Idee: Erweitere die lineare und deterministische Schrödingergleichung (bzw. der Hamilton Dynamik) um einen nicht-linearen und stochastischen Term.

• mit dem Ziel: Einheitliche dynamische Gleichung, welche SG und Kollaps beschreibt und dabei zur spontanen Unterdrückung der Superposition bei makroskopischen Objekten führt; gleichzeitig aber die Eigenschaften von mikroskopischen Systemen unverändert lässt.

2.1 DICHTEOPERATOR ODER WELLENFUNKTION

Wir haben schon gesehen, dass sich bei dem Übergang von der (unangenehmen) Superposition (z.B.) 2er Makrozustände zu einem Gemisch dieser, der Dichteoperator folgendermaßen verändert (entwickelt):

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} \longrightarrow \rho' = \begin{pmatrix} \rho'_{11} & 0 \\ 0 & \rho'_{22} \end{pmatrix}$$

d.h. die Off-diagonal Elemente verschwinden.

<u>ABER</u>: diese Entwicklung des Dichteoperators garantiert <u>nicht</u> die Unterdrückung von Superpositionen!!

Bsp.:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|Here\rangle + |There\rangle\right)$$

$$\hookrightarrow \rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2}\Big(|Here\rangle\langle Here| + |There\rangle\langle There| + |Here\rangle\langle There| + |There\rangle\langle Here|\Big)$$

oder in Matrixdarstellung zur Basis $(|Here\rangle, |There\rangle)^T$:

$$\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Gemisch dieser Zustände: $\frac{1}{2}$ in $|Here\rangle$ and $\frac{1}{2}$ in $|There\rangle$

$$\hookrightarrow \rho' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vergleiche nun mit Gemisch folgender Art:

$\frac{1}{2}$ in $\frac{1}{\sqrt{2}}\left[|\text{Here}\rangle + |\text{There}\rangle \right]$ and $\frac{1}{2}$ in $\frac{1}{\sqrt{2}}\left[|\text{There}\rangle - |\text{There}\rangle \right]$

$\hookrightarrow \rho' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ schon wieder!

$\Rightarrow$ D.h. gleiches ρ' für verschiedene Gemische!

$\Longrightarrow$ Die Lokalisierungen müssen direkt die Wellenfunktion beeinflussen und nicht nur den Dichte-operator!

2.2. ANNAHMEN DES MODELLS

(1.) Jedes Teilchen eines Systems N ununterscheidbarer Teilchen erfährt mit einer mittleren Rate von λ_i einen plötzlichen spontanen Lokalisierungs-Prozess.

(2.) In dem Zeitintervall zw. 2 aufeinander folgenden spontanen Prozessen entwickelt sich das System nach der gewöhnlichen SG.

(3.) Der plötzliche spontane Prozess ist eine Lokalisierung, welche beschrieben wird durch:

$$|\psi\rangle \longrightarrow \frac{|\psi^i_{\vec{x}}\rangle}{\| |\psi^i_{\vec{x}}\rangle \|}$$

wobei $|\psi^i_{\vec{x}}\rangle = \hat{L}^i_{\vec{x}} |\psi\rangle$. Mit $\hat{L}^i_{\vec{x}}$: dem Operator der die Lokalisierung des Teilchens i um den Punkt $\vec{x}$ beschreibt.

(4) Wahrscheinlichkeitsdichte des Auftretens einer Lokalisierung am Punkt $\vec{x}$ sei:

$$P_i(\vec{x}) = \| |\psi^i_{\vec{x}}\rangle \|^2 \iff \int d^3x \, [\hat{L}^i_{\vec{x}}]^2 = 1$$

(5) Der Lokalisierungs-Operator wurde folgendermaßen gewählt:

$$\boxed{\hat{L}^i_{\vec{x}} = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/4} \exp\left\{-\frac{\alpha}{2}(\hat{\vec{q}}_i - \vec{x})^2\right\}}$$

wobei $\hat{\vec{q}}_i$ der Ortsoperator des Teilchens i ist.

2.3. WIE LOKALISIERUNG FUNKTIONIERT

- Beispiel: Betrachte Superposition 2er Gauß-Funktionen:

$$\psi(z) = \mathcal{N} \left\{ \underbrace{e^{-\frac{\gamma}{2}(z+a)^2}}_{\text{bei } -a} + e^{-\frac{\gamma}{2}(z-a)^2} \right\}$$

bei a Maximum

↳ Plötzlich ereignet sich ein "hitting" bei a:

Man kann zeigen, dass die Wahrscheinlichkeit, dass eine solche Lokalisierung auftritt nach nach Ann. $\approx 1/2$ ist.
d.h. ungefähr / fast die q.m. Wahrscheinlichkeit, d. Teilchen bei a zu finden.
(Allg. Wahrsch. von Lokalisierung immer am größten an Orten, an denen Teilchen zu finden sein könnte)

"hitting" $\hat{=}$ Spontane Lokalisierung um bestimmte Raum-Punkte.

$$\psi(z) \longrightarrow \psi_a(z) = \hat{L}_a \psi(z) =$$

$$= \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/4} \mathcal{N} \; e^{-\frac{\alpha}{2}(z-a)^2} \left\{ e^{-\frac{\gamma}{2}(z+a)^2} + e^{-\frac{\gamma}{2}(z-a)^2} \right\} =$$

$$= \mathcal{N}_a \left\{ e^{-\frac{\alpha}{2}(-a-a)^2} e^{-\frac{\gamma}{2}(z+a)^2} + e^{-\frac{\alpha}{2}(z-a)^2} e^{-\frac{\gamma}{2}(z-a)^2} \right\} =$$

im ersten Term $z \approx -a$

$$= \mathcal{N}_a \left\{ \underbrace{e^{-2\alpha a^2} \, e^{-\frac{\gamma}{2}(z+a)^2}}_{} + e^{-\frac{\alpha+\gamma}{2}(z-a)^2} \right\}$$

$\hat{=}$ Exponentielle Unterdrückung der Gauß-Funktion bei $-a$

2.4. EoM DES DICHTEOPERATORS

Betrachte ein einzelnes Teilchen, welches ein hitting irgendwo im Raum erfährt:

wissen nicht wo, aber bei jeweiligem $\vec{x}$ mit Wahrscheinlichkeit $\| |\psi_{\vec{x}}\rangle \|^2$

$$|\psi\rangle\langle\psi| \longrightarrow \underbrace{\int d^3\vec{x}\; \hat{L}_{\vec{x}}\, |\psi\rangle\langle\psi|\, \hat{L}_{\vec{x}}}_{= \int d^3x\, P(x) \frac{|\psi_x\rangle\langle\psi_x|}{\| |\psi_x\rangle \|^2}} \overset{\text{Def.}}{=:} T\left[|\psi\rangle\langle\psi|\right]$$

In einem Zeitintervall dt entwickelt sich der Dichteoperator folgender Maßen:

Mit einer Wahrscheinlichkeit λdt passiert ein "hitting" in dt, wodurch ρ nach $T[\rho]$ geht. Und mit einer Wahrscheinlichkeit von $1-\lambda dt$ passiert kein hitting und ρ entwickelt sich gemäß der gewöhnlichen SG:

$$\rho(t+dt) = (1-\lambda dt)\left\{ \rho(t) - \frac{i}{\hbar}\left[H, \rho(t)\right] dt \right\} + \lambda dt\, T[\rho]$$

d.h.

$$\boxed{\frac{d}{dt}\rho(t) = -\frac{i}{\hbar}[H,\rho(t)] - \lambda\left(\rho(t) - T[\rho(t)]\right)}$$

Das ist die "MASTER EQUATION", welche die Quanten-Entwicklg eines einzelnen Teilchens, welches zufälligen Lokalisierungen unterliegt, beschreibt.

↳ Verallg. auf ein N-Teilchensystem:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\rho(t) = -\frac{i}{\hbar}[H,\rho(t)] - \sum_{i=1}^{N}\lambda_i\left(\rho(t) - T_i[\rho(t)]\right)}$$

wobei $T_i[\rho] = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}dx\; e^{-\frac{\alpha}{2}(\hat{q}_i - x)^2}\,\rho\, e^{-\frac{\alpha}{2}(\hat{q}_i - x)^2}$

2.5. NICHT-HAMILTONSCHE DYNAMIK FÜR EIN FREIES MAKROSKOPISCHES TEILCHEN

Man kann zeigen, dass mit dieser nicht-linearen Dynamik gilt:

- $\langle\langle q\rangle\rangle = \langle\langle q\rangle\rangle_{SG}$
  $\langle\langle p\rangle\rangle = \langle\langle p\rangle\rangle_{SG}$ } Erwartungswerte

- $\{q\} := \langle\langle [q - \langle\langle q\rangle\rangle]^2\rangle\rangle = \{q\}_{SG} + \frac{\alpha\lambda\hbar^2}{6m^2}t^3$
  $\{p\} := \quad -\text{"}- _p \quad = \{p\}_{SG} + \frac{\alpha\lambda\hbar^2}{2}t$ } Streuung / Varianz (der Messgrößen)

- $Tr\{\hat{x}(\hat{q})\,T[\rho]\} = Tr\{\hat{x}(\hat{q})\,\rho\}$

  ↳ $\frac{d}{dt}\langle\langle \hat{x}(\hat{q})\rangle\rangle = Tr\{x(\hat{q})\frac{d\rho}{dt}\} = -\frac{i}{\hbar}Tr\{x(\hat{q})[H,\rho]\}$

Ehrenfest-Theorem $\overset{SG}{\Longrightarrow}$ $\frac{d}{dt}\langle\langle q\rangle\rangle = \frac{1}{m}\langle\langle p\rangle\rangle$

und analog: $\frac{d}{dt}\langle\langle p\rangle\rangle = -\langle\langle \frac{\partial V}{\partial q}\rangle\rangle$

$\Rightarrow$ Erwartungswert von q und p werden nicht beeinflusst von den nicht-hamiltonischen Termen.

Dagegen treten in $\{q\}$ und $\{p\}$ zusätzliche Terme auf, welche mit der Zeit größer werden.

Lösung der "MASTER EQUATION" für ein freies Teilchen im Konfigurationsraum (S. 44 in p.p.)

$$\ldots \quad \langle q'|\rho(t)|q''\rangle = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} dk \int_{-\infty}^{+\infty} dy \; e^{-i/\hbar ky} \; F(k, q'-q'', t) \; \langle q'+y|\,\rho_{S0}(t)\,|q''+y\rangle$$

$$F(k,q,t) = e^{-\lambda t} + \lambda \int^{t} d\tau \, e^{-\alpha/4(q-\frac{k\tau}{m})^2}$$

Betrachte die 2 Fälle:

(1) $q=0$: $\ldots \quad F(k,0,t) \geq 1 - \frac{\alpha\lambda k^2 t^3}{4m^2} \simeq 1$

$|q'-q''| \ll 1/\sqrt{\alpha}$

(2) $q \neq 0$: $\ldots \quad F(k,q,t) < e^{-\lambda\beta t}$ wobei $\beta = 1 - \frac{\sqrt{\pi}}{(\sqrt{\alpha}/2)q}\operatorname{erf}[(\sqrt{\alpha}/2)q]$

$|q'-q''| \geq 1/\sqrt{\alpha}$

$\Rightarrow$ (1) $q=0$: Diagonalelemente nahezu unverändert

(2) $q\neq 0$: Off-Diagonalelemente exponentiell gedämpft.

$\hookrightarrow |q'-q''| > 1/\sqrt{\alpha}$: Lineare Superpositionen von Zuständen, welche weiter voneinander getrennt sind als $1/\sqrt{\alpha}$ (charakteristische Lokalisierungsdistanz), werden in entweder den einen oder andern Zustand transformiert.

$\hookrightarrow$ Gemenge

($1/\sqrt{\alpha}$ ist die Distanz nach der eine lin. Superposition in ein statistisches Gemenge transformiert wird.)

Man kann die Parameter λ_{micro} und $1/\sqrt{\alpha}$ nun so wählen, dass die Theorie genau die Anforderungen erfüllt: kleine Auswirkungen auf Mikrowelt und Superpositionen in Makrowelt unterdrückt.

Bsp.: $1/\sqrt{\alpha} \hat{=} 10^{-7}\,m$; $\lambda_{micro} = 10^{-16}\ 1/s$

so erhält man eine Lokalisierung eines Mikrosystems alle 10^8 Jahre $\equiv 1/\lambda_{micro}$

" Makrosystem alle 10^{-7} Sekunden ! $= 1/\lambda_{macro}$

siehe nächstes Kapitel.

2.6. MAKROSKOPISCHE AUS MIKROSKOPISCHER DYNAMIK

- N-Teilchen
- EoM von ρ kann so umgeschrieben werden, dass nur Schwerpunkt Q betrachtet wird:

$$\frac{d}{dt}\rho_Q(t) = -\frac{i}{\hbar}[H_Q, \rho_Q] - \sum_{i=1}^{N}\lambda_i\left(\rho_Q - T[\rho_Q]\right)$$

- vgl. zu "MASTER EQ" für ein Teilchen $\lambda \rightarrow \sum\lambda_i$
- Nimmt man also an dass $\lambda_i = \lambda_{micro} = \text{const} \quad \forall i$

$$\hookrightarrow \quad \lambda_{macro} = \sum_{i=1}^{N}\lambda_i = N\lambda_i$$