

UNIWERSYTET JANA KOCHANOWSKIEGO
W KIELCACH

WYDZIAŁ MATEMATYCZNO-PRZYRODNICZY
Kierunek: Fizyka techniczna

ANNA WAWRZYNIEC

Numer albumu 110909

Praca inżynierska

NUMERYCZNY MODEL DLA STUDIUM CZASU POINCARÉ

Promotor pracy:
Pan dr hab. prof. UJK Francesco Giacosa

Praca przyjęta pod względem
merytorycznym i formalnym
w formie papierowej i elektronicznej

.....
/data i podpis promotora/

KIELCE 2017

Spis treści

1	Wstęp	1
2	Czas Poincare	3
2.1	Pojęcie ogólne	3
2.2	Sprężone cząsteczki gazu	3
2.3	Spin elektronu	5
2.4	Rozpad neutronu	6
3	Czas Poincare w mechanice klasycznej	8
4	Czas Poincare w mechanice kwantowej	13
4.1	Pojęcie ogólne	13
4.2	Równe prawdopodobieństwa	16
4.3	Różne prawdopodobieństwa	20
4.4	Korespondencja pomiędzy formalizmem Shrödingera i Heisenberga . .	27
5	Opis tworzenia wykresów w programie Mathematica	28
6	Podsumowanie	40

Rozdział 1

Wstęp

Mechanika kwantowa jest teorią fizyczną odnoszącą się do zjawisk zachodzących w świecie bardzo małych obiektów, których nie sposób opisać za pomocą mechaniki klasycznej. Mimo badania mechaniki kwantowej od lat i wyjaśnieniu wielu wcześniej słabo zbadanych problemów, nadal pozostaje w niej wiele ciekawych aspektów wartych lepszego poznania.

Jednym z nich jest pojęcie czasu Poincare T_p , którego analizie poświęcona jest niniejsza praca. Pojęcie czasu Poincare występuje również w mechanice klasycznej i jego funkcjonowanie w tej dziedzinie będzie przedstawione w tej pracy. Czas Poincare wiąże się z twierdzeniem o powracaniu które mówi, że każdy zamknięty układ może wrócić do stanu pierwotnego po pewnym czasie t . Celem tej pracy jest zbadanie jak długi jest czas potrzebny na to, by układ powrócił do stanu pierwotnego. Chcemy również zbadać, jak w ciągu upływu tego czasu będzie zmieniało się prawdopodobieństwo $P(t)$, powrotu układu do stanu pierwotnego. Istotne są też czynniki mające wpływ na wyżej wymienione, czas i prawdopodobieństwo $P(t)$. Ich analizą zajmiemy się w tej pracy.

Zjawisko powracania ma swoje zobrazowanie również w fizyce eksperymentalnej. Jest to niezwykle ciekawy temat zarówno dla teoretyków jak i fizyków eksperymentatorów. Przeprowadzono już parę eksperymentów, które dotyczyły tego zjawiska [1][9].

W rozdziale drugim, opisano warunki jakie muszą być spełnione aby można było mówić o powrocie danego systemu w kontekście czasu Poincare. Wyjaśniono również istotę prawdopodobieństwa znalezienia układu w stanie początkowym oraz czasu Poincare na przykładzie sprężonych cząsteczek gazu [2], spinu elektronu i rozpadu neutronu.

W rozdziale trzecim, za pomocą trajektorii w przestrzeni fazowej, przedstawiono istotę czasu Poincare w mechanice klasycznej. Wykorzystano do tego przykład jednowymiarowego oscylatora harmonicznego. Trajektorię punktu przedstawiono na wykresie [3].

W czwartym rozdziale przedstawiono pojęcie czasu Poincare dla mechaniki kwantowej. Po wyprowadzeniu wzoru na prawdopodobieństwo $P(t)$, znalezienia układu w stanie takim jak początkowy, rozważono je dla dwóch różnych przypadków: pierwszy, w którym prawdopodobieństwo W_n posiadania przez stan określonej energii E_n jest takie samo dla każdego n , oraz drugi, w którym te prawdopodobieństwa są różne. Każdy z przypadków został zilustrowany za pomocą wykresów. Wszystkie zagadnienia dotyczące mechaniki kwantowej przedstawione zostały za pomocą formalizmu Heisenberga z użyciem notacji Diraca. Istnieją również inne sposoby opisywania mechaniki kwantowej, np. za pomocą formalizmu Shrödingera. Porównanie obu tych obrazów mechaniki kwantowej zaprezentowano w tabeli znajdującej się w rozdziale czwartym.

Wszystkie obliczenia oraz wykresy funkcji znajdujące się w tej pracy, zostały wykonane za pomocą programu Mathematica firmy Wolfram Research. W rozdziale piątym przybliżono działanie programu poprzez dokładny opis działania oraz zilustrowanie funkcji potrzebnych do stworzenia obliczeń i wykresów użytych w niniejszej pracy do zobrazowania pojęcia czasu Poincare. Mathematica jest jednym z najbardziej popularnych programów do wykonywania obliczeń symbolicznych i numerycznych. Program dzięki bogactwu funkcji jest doskonałym narzędziem pracy nie tylko dla matematyków, ale też fizyków i wielu innych [4].

Rozdział 2

Czas Poincare

2.1 Pojęcie ogólne

Twierdzenie Poincare jest to twierdzenie odnoszące się do układów dynamicznych posiadających miarę niezmienniczą. Opisują one własności ruchu dla każdego punktu opisywanego układu: trajektoria takiego punktu wraca nieskończenie wiele razy do dowolnie małego otoczenia punktu startowego. Aby można było mówić o powrocie danego systemu w kontekście czasu Poincare wektory położenia i pędu wszystkich cząsteczek tego systemu muszą być zgodne ze stanem pierwotnym. Będziemy badać czasową ewolucję prawdopodobieństwa znalezienia układu w stanie takim jak pierwotny używając funkcji $P(t)$. Prawdopodobieństwo znalezienia układu w stanie takim jak pierwotny jest równe 1 w chwili początkowej $t = 0$ oraz po czasie Poincare T_p .

$$P(0) = P(0 + T_p) = 1. \quad (2.1)$$

Aby lepiej zilustrować prawdopodobieństwa $P(t)$ oraz czasu Poincare T_p poniżej przedstawiono kilka przykładów.

2.2 Sprężone cząsteczki gazu

Rozważmy przypadek, w którym w połowie naczynia stłoczono cząsteczki gazu, pozostawiając w drugiej połowie próżnię. Następnie usunięto przegrodę rozdzielającą obie połowy i gaz został rozprężony [2]. Według twierdzenia Poincare rozprężony gaz powinien po pewnym czasie samoistnie powrócić do stanu pierwotnego, czyli zgromadzić się w pierwszej połowie.

Opisana powyżej komora z przegrodą wypełniona gazem jest układem izolowanym. Warto zauważyć, że twierdzenie o powracaniu nie stoi w sprzeczności z drugą zasadą termodynamiki. W ujęciu fizyki statystycznej druga zasada termodynamiki mówi,

że układ ewoluuje w stronę układów bardziej prawdopodobnych, tj. stanów o większej entropii. W przyrodzie nie jest natomiast niemożliwe to, że układ powraca do stanów o mniejszej entropii, ale jest to mało prawdopodobne. Zjawisko powracania może być zrealizowane gdy rozważany czas ewolucji układu jest odpowiednio długi, jak ma to miejsce w tym przypadku. Zilustrujemy owe rozważania przykładem.

Niech układ złożony będzie z dwóch rozróżnialnych cząsteczek które oznaczamy A i B . Cząsteczki te zamknięte są w naczyniu które podzielone jest przegrodą na dwie części między którymi cząsteczki mogą swobodnie przechodzić. Ruch cząsteczek jest niezależny.

Mikrostanem układu nazywamy każde rozmieszczenie cząstek w obu częściach naczynia.

Makrostanem układu nazywamy rozkład liczby cząstek w obu częściach naczynia. W naszym przypadku możemy mieć cztery różne mikrostany, które odpowiadają trzem różnym makrostanom.

Liczbę wszystkich możliwych mikrostanów realizujących dany stan makroskopowy nazywamy wagą statystyczną danego makrostanu [2]. Poniżej przedstawiono tabelę prezentującą podział dwóch cząstek między dwie połówki naczynia.

Mikrostany		Makrostany		Waga statystyczna	
Cząstki w lewej komorze	Cząstki w prawej komorze	Cząstki w lewej komorze	Cząstki w prawej komorze		
A, B	-	2	0	1	Pierwszy mikrostan
-	A, B	0	2	1	Drugi mikrostan
A	B	1	1	2	Trzeci makrostan
B	A	1	1		

Tab.1 Podział dwóch cząsteczek między dwie komory naczynia.

Zgodnie z drugą zasadą termodynamiki układ ewoluuje od stanów makroskopowych pierwszego i drugiego do stanu trzeciego. Entropia układu w danym stanie makroskopowym jest określona jako:

$$S = k \ln \Gamma, \quad (2.2)$$

gdzie k - stała Boltzmanna, Γ - waga statystyczna. Przy czym zgodnie z hipotezą Boltzmanna wszystkie stany mikroskopowe są jednakowo prawdopodobne [2].

Matematyczne prawdopodobieństwo znalezienia układu w danym stanie makroskopowym otrzymujemy dzieląc odpowiednie wagi statystyczne przez liczbę wszystkich możliwych mikrostanów (w tym przypadku przez cztery).

Dla N -rozróżnialnych cząsteczek liczba wszystkich mikrostanów tzn. sposobów podziału na dwie części naczynia, wynosi 2^N . Gdy N jest liczbą Avogadro $N_A =$

$6.022 * 10^{23}$ liczba dostępnych mikrostanów jest ogromna, a stan pełnego uporządkowania (wszystkie cząsteczki w jednej z komór) jest realizowany tylko na jeden sposób [2].

Największą wagę statystyczną mają makrostany odpowiadające równomiernemu rozkładowi cząsteczek między obie części naczynia.

Pomimo, że czas powracania układu do stanu w którym cząstki stłoczone są w jednej części naczynia jest bardzo długi, to jest skończony. Można zauważyć, że szacowany czas na to potrzebny dla 1 mola gazu byłby dłuższy niż czas istnienia Wszechświata.

To tłumaczy, że skoro czas Poincare jest tak długi zjawisko samoistnego stłoczenia cząsteczek nie jest obserwowane w przyrodzie. Można zatem wygłosić regułę mówiącą, że ciśnienia gazu w obu komorach się wyrównują, co odpowiada sytuacji, że cząsteczki równomiernie rozkładają się w obu komorach.

Znacznie ciekawszy wydaje się układ złożony tylko z jednej cząstki, np. pojedynczego neutronu, masy zawieszony na sprężynie czy pojedynczego elektronu. Przypadki te omówimy już ilościowo w następnych rozdziałach licząc ile dla nich wynosi czas Poincare.

2.3 Spin elektronu

Spin elektronu jest równy $\frac{1}{2}$. Jako S_z określony jest spin oznaczany jako \uparrow lub \downarrow . Przyjęto, że dla czasu $t = 0$ elektron ma spin oznaczony jako \uparrow . Po upływie czasu t spin elektronu został zmieniony na \downarrow .

Poniżej zapisano równanie które określa w jaki sposób zmienia się spin elektronu:

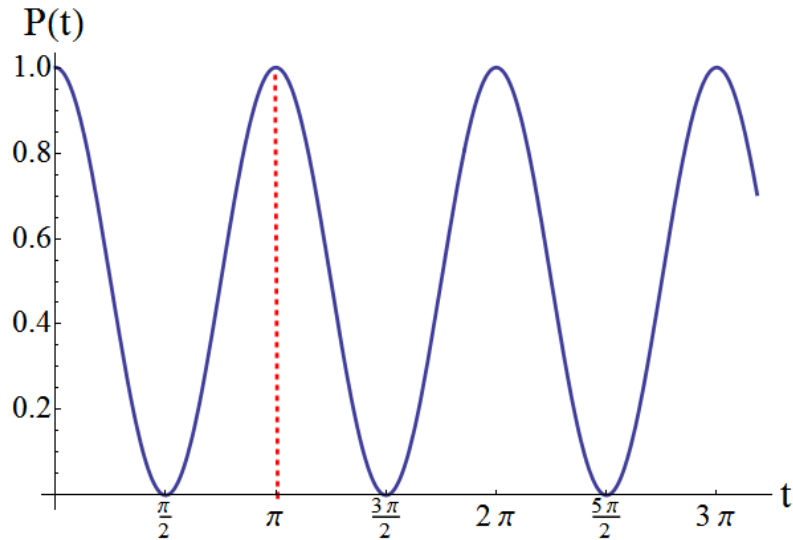
$$|S_e(t)\rangle = \cos(\omega t) |\uparrow\rangle + \sin(\omega t) |\downarrow\rangle . \quad (2.3)$$

Prawdopodobieństwo tego, że elektron jest w stanie takim jak w chwili $t = 0$ dane wzorem:

$$P(t) = |\langle \uparrow | S_e(t) \rangle|^2 = |\cos(\omega t)|^2 = \cos^2(\omega t) , \quad (2.4)$$

gdzie $\omega = 1$, przedstawiono na wykresie (rys.2.1.).

Na wykresie zaznaczono linią przerywaną punkt w którym wartość funkcji $P(t)$ powraca do wartości 1. Możemy zauważyć, że czas Poincare w tym przypadku wynosi $\frac{\pi}{\omega}$.



Rysunek 2.1: Czasowa zależność prawdopodobieństwa znalezienia elektronu w stanie takim jak początkowy.

2.4 Rozpad neutronu

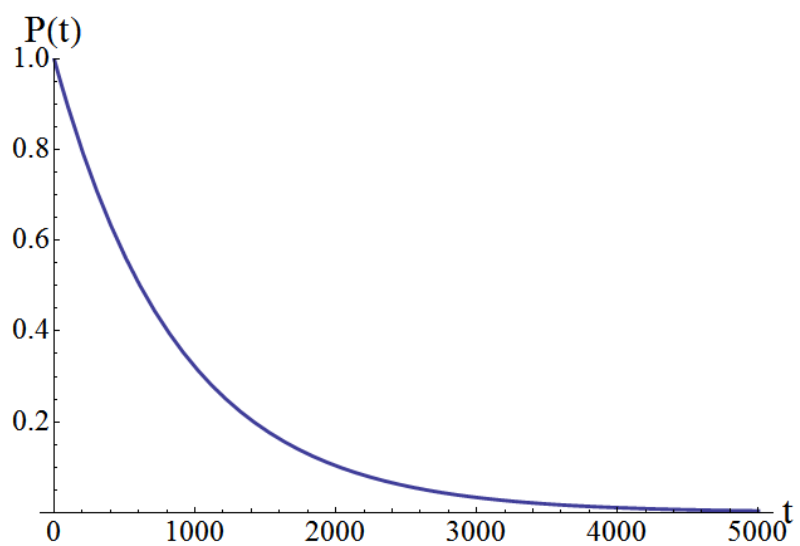
W pudełku umieszczony jest neutron. Rozpada się on na proton, elektron oraz antyneutrino elektronowe:



Średni czas życia neutronu wynosi około $\tau_n \approx 880s$. Prawdopodobieństwo $P(t)$, znalezienia w pudełku neutronu w chwili $t = 0$, wynosi 1. Badamy ewolucję czasową prawdopodobieństwa tego, że układ znajduje się w stanie takim jak początkowy (rys.2.2.):

$$P(t) = e^{-\frac{t}{\tau_n}}. \quad (2.6)$$

Jeśli prawdopodobieństwo $P(t)$ (gdzie $t \neq 0$), byłoby równe 1, czyli dokładnie takie jak dla czasu $t = 0$, to czas, w którym dokonano pomiaru byłby czasem Poincare T_p dla tego układu. Jednak w powyższym przypadku prawdopodobieństwo znalezienia neutronu w pudełku maleje wraz z upływem czasu. W tej sytuacji czas Poincare jest nieskończony $T_p \rightarrow \infty$. Układ nie powraca więc do stanu początkowego. Twierdzenie Poincare o powracaniu w takim przypadku zawodzi.



Rysunek 2.2: Zależność prawdopodobieństwa $P(t)$ znalezienia neutronu w funkcji czasu t .

Rozdział 3

Czas Poincare w mechanice klasycznej

Istotę czasu Poincare T_p , w mechanice klasycznej można przedstawić za pomocą trajektorii w przestrzeni fazowej. Przestrzeń fazowa jest przestrzenią wszystkich możliwych stanów badanego układu. Stan układu mechanicznego to punkt w przestrzeni fazowej. Warunki początkowe, czyli dwie zmienne - położenie $x(0) = x_0$ i prędkość $\dot{x}(0) = 0$, oraz równanie ruchu w pełni determinują ewolucję układu. W miarę upływu czasu punkt określony przez położenie i prędkość $(x(t), \dot{x}(t))$, przemieszcza się po dwuwymiarowej przestrzeni i zakreśla krzywą, zatem wyznacza w przestrzeni fazowej trajektorię złożoną z kolejnych stanów w jakich będzie się znajdował układ. Tę trajektorię nazywamy trajektorią fazową [3]. Dzięki niej otrzymujemy przejrzysty obraz ruchu układu. Czas Poincare T_p to czas, jaki jest potrzebny aby układ powrócił do punktu początkowego.

Aby zobrazować czas Poincare w mechanice klasycznej, posłużmy się przykładem jednowymiarowego oscylatora harmonicznego w dwuwymiarowej przestrzeni współrzędnych położenia i prędkości (x, \dot{x}) .

Badany układ to sprężyna o współczynniku sprężystości k , na końcu której umieszczono ciało o masie m - kulkę (rys.3.1.).

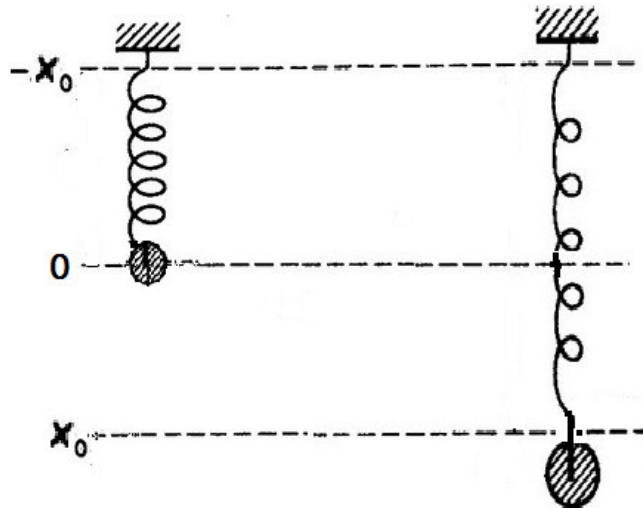
Początkowo sprężyna jest wychylona z położenia równowagi o x_0 i zostaje wypuszczona. Prędkość początkowa kulki $\dot{x}(0)$, wynosi 0.

Funkcja Lagrange'a L , zdefiniowana jako różnica energii kinetycznej

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad (3.1)$$

(gdzie $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ i m - masa cząstki), i energii potencjalnej

$$V = \frac{1}{2}kx^2, \quad (3.2)$$



Rysunek 3.1: Układ złożony z kulki o masie m zawieszonyj na sprężynie o współczynniku sprężystości k znajdujący się w położeniu równowagi 0 oraz będący wychylony z położenia równowagi o x_0 .

jest postaci:

$$L = T - V. \quad (3.3)$$

Z zasady najmniejszego działania otrzymujemy równanie Eulera - Lagrange'a:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}, \quad (3.4)$$

gdzie x, \dot{x} to uogólnione położenie i prędkość.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad (3.5)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x}, \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx, \quad (3.7)$$

$$m\ddot{x} = -kx. \quad (3.8)$$

Warunki początkowe układu to:

$$x(0) = x_0, \quad (3.9)$$

$$\dot{x}(0) = 0. \quad (3.10)$$

Rozwiązaniem równania $m\ddot{x} = -kx$, przy podanych warunkach początkowych

jest:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t). \quad (3.11)$$

Alternatywnie można przedstawić to za pomocą formalizmu Hamiltona.

Aby przejść do tego formalizmu należy zdefiniować uogólniony pęd:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}. \quad (3.12)$$

Funkcję Hamiltona otrzymujemy przez transformatę Legendre'a i jest ona postaci:

$$H = p\dot{x} - L. \quad (3.13)$$

Równania kanoniczne w tym formalizmie mają następującą postać:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad [5]. \quad (3.14)$$

Funkcja Hamiltona tego oscylatora ma następującą postać:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}. \quad (3.15)$$

Przez przestrzeń fazową rozumiemy iloczyn kartezjański położen i pędów uogólnionych. Portretem fazowym nazywamy zbiór punktów spełniających równania kanoniczne dla danego zagadnienia. Równania kanoniczne przedstawimy w postaci:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -kx. \quad (3.16)$$

Przyspieszenie jest postaci:

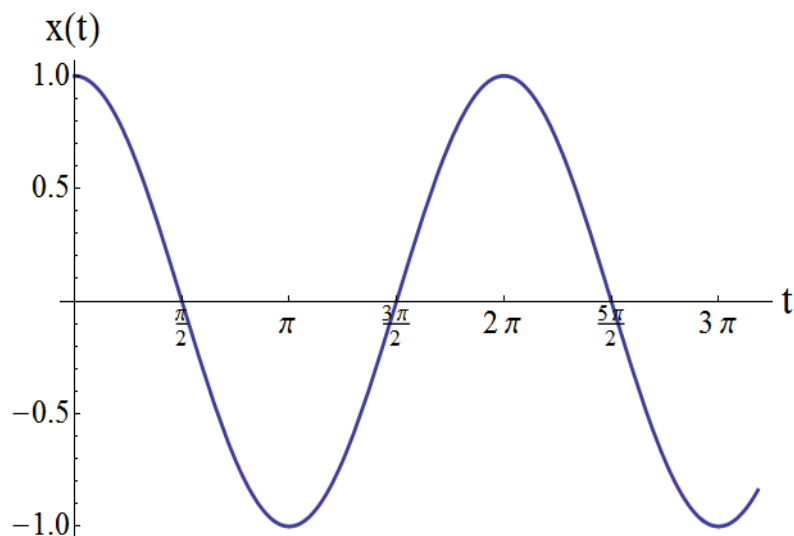
$$\ddot{x} = \frac{\dot{p}}{m} = -\frac{kx}{m}, \quad (3.17)$$

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x. \quad (3.18)$$

Oznaczając $\frac{k}{m} = \omega^2$, otrzymujemy klasyczne równanie oscylatora harmonicznego, przedstawiające zależność położenia kulki x , od czasu t , które po uwzględnieniu warunków początkowych ma postać:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t), \quad (3.19)$$

gdzie x_0 - amplituda, ω - częstość drgań. Zauważmy, że otrzymaliśmy to samo rozwiązanie problemu jak w formalizmie Lagrange'a. Poniżej przedstawiono wykres funkcji (rys.3.2.) położenia od czasu $x(t)$ dla $\omega = 1$:



Rysunek 3.2: Zależność funkcji położenia kulki x od czasu t

Zauważmy, że energię całkowitą naszego oscylatora można zapisać jako:

$$E = \frac{p^2}{m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} = \text{const.} \quad (3.20)$$

Po podzieleniu obustronnie przez E , otrzymujemy:

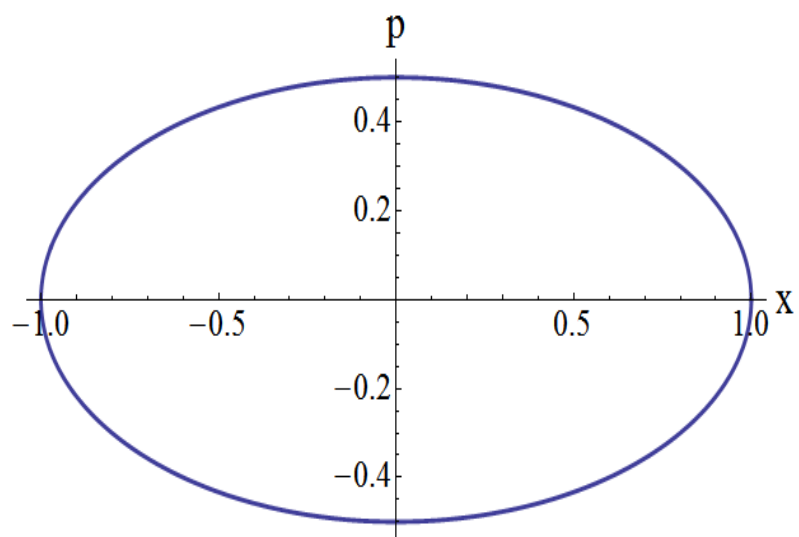
$$1 = \frac{p^2}{2mE} + \frac{m\omega^2 x^2}{2E}. \quad (3.21)$$

Definiujemy $p_0 = \sqrt{2mE}$ i $x_0 = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$. Otrzymujemy równanie elipsy postaci:

$$\frac{p^2(t)}{p_0^2} + \frac{x(t)^2}{x_0^2} = 1. \quad (3.22)$$

Poniżej przedstawiono wykres (rys.3.3.) trajektorii w przestrzeni fazowej, gdzie oś pozioma odpowiada zmiennej $x(t)$, a oś pionowa zmiennej $p(t)$. Przedstawiona trajektoria odpowiada krzywej zakreślonej przez punkt (x, p) , w miarę upływu czasu t .

Z zasady zachowania energii wynika, że trajektorie muszą być elipsami, czyli trajektoriami zamkniętymi. Dla innych układów trajektorie fazowe nie są elipsami, ale tworzą krzywe zamknięte lub powracają bardzo blisko punktu początkowego [3]. Sprawia to, że układ nieskończenie wiele razy powróci do stanu początkowego, co w oczywisty sposób koresponduje z twierdzeniem o powtarzalności. Częstotliwość powracania ω , wiąże się z czasem Poincare T_p , poprzez $\omega = \frac{2\pi}{T_p}$. Wynika z tego, że $T_p = \frac{\pi}{2\omega}$. Trajektoria w przestrzeni fazowej dokonuje pełnego obiegu w ciągu jednego cyklu, którego czas trwania jest równy czasowi Poincare.



Rysunek 3.3: Trajektoria punktu w przestrzeni fazowej

Rozdział 4

Czas Poincare w mechanice kwantowej

4.1 Pojęcie ogólne

W tym rozdziale przedstawimy istotę czasu Poincare w mechanice kwantowej. Stan układu w chwili $t = 0$, określamy jako:

$$|s\rangle. \quad (4.1)$$

Jako bazę przyjmujemy bazę różnych stanów energii:

$$\{|E_n\rangle\}, \quad (4.2)$$

gdzie $n = 1, 2, 3, \dots, N_{tot}$.

$$\{|E_n\rangle\} = \{|E_1\rangle, |E_2\rangle, \dots, |E_{N_{tot}}\rangle\}. \quad (4.3)$$

W niniejszej pracy będą rozważane przypadki dla $N_{tot} = 2, 10, 100, 1000$.

Równanie własne ma postać:

$$\hat{H} |E_n\rangle = E_n |E_n\rangle, \quad (4.4)$$

gdzie \hat{H} - operator Hamiltona naszego układu. Wybieramy, że $E_1 = 1$, $E_2 = 2$, $E_3 = 3, \dots, E_{N_{tot}} = N_{tot}$ (dla dowolnej jednostki).

Każdy stan jest superpozycją różnych stanów, które mają określone energie. Stan układu wyraża zatem suma:

$$|s\rangle = \sum_n C_n |E_n\rangle. \quad (4.5)$$

Prawdopodobieństwo tego, że układ jest w stanie $|s\rangle$ o energii E_n , oznaczamy jako $|C_n|^2$. Zatem $|C_1|^2$ to prawdopodobieństwo, że stan $|s\rangle$ ma energię E_1 , $|C_2|^2$ to prawdopodobieństwo, że stan $|s\rangle$ ma energię E_2 , itd.

$C_1, C_2, \dots, C_{N_{tot}}$ to liczby zespolone.

$|C_n|^2$ to liczba rzeczywista ≥ 0 .

Należy zaznaczyć, że z warunku normalizacji suma wszystkich $|C_n|^2$ wynosi 1.

$$|C_1|^2 + |C_2|^2 + \dots + |C_{N_{tot}}|^2 = 1. \quad (4.6)$$

Według równania Shrödingera:

$$i \frac{\partial |\Psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H} |\Psi(t)\rangle, \quad [5] \quad (4.7)$$

gdzie $\hbar = 1$. Możemy określić stan początkowy jako:

$$|\Psi(0)\rangle = |s\rangle. \quad (4.8)$$

Stan układu w czasie t , jest określony jako:

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t} |s\rangle, \quad (4.9)$$

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t} \sum_{n=1}^{N_{tot}} C_n |E_n\rangle = \sum_{n=1}^{N_{tot}} C_n e^{-i\hat{H}t} |E_n\rangle. \quad (4.10)$$

Stanem własnym \hat{H} jest $|E_n\rangle$, zatem:

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{n=1}^{N_{tot}} C_n e^{-iE_n t} |E_n\rangle. \quad (4.11)$$

Prawdopodobieństwo tego, że w chwili t , gdy dokonamy pomiaru układ znalazł się w stanie $|s\rangle$, takim jak początkowy wynosi:

$$P(t) = |\langle \Psi(t) | s \rangle|^2 = \left| \langle s | e^{-i\hat{H}t} | s \rangle \right|^2, \quad (4.12)$$

co przedstawiamy jako:

$$P(t) = \left| \sum_{n=1}^{N_{tot}} W_n e^{-iE_n t} \right|^2, \quad (4.13)$$

gdzie $W_n = |C_n|^2$, i jest prawdopodobieństwem tego, że stan $|s\rangle$ ma energię E_n .

Przyjmijmy, że $E_n = n$, gdzie $n = 1, 2, 3, \dots$. Otrzymujemy wtedy:

$$P(t) = \left| \sum_{n=1}^{N_{tot}} W_n e^{-int} \right|^2. \quad (4.14)$$

Prawdopodobieństwa $P(t = 0)$ i $P(t = T_p)$, muszą być sobie równe i wynosić 1. Przyjmując, że $T_p = 2\pi$, otrzymamy:

$$P(t = T_p = 2\pi) = \left| \sum_{n=1}^{N_{tot}} W_n e^{-in(2\pi)} \right|^2 = \left| \sum_{n=1}^{N_{tot}} W_n e^{-2in\pi} \right|^2 = 1 = P(0). \quad (4.15)$$

Powyższą równość można uargumentować następująco.

W ogólnej formie e^{-int} ma postać $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$. Przyjmując $\varphi = nt = n2\pi$ otrzymamy:

$$e^{-in2\pi} = \cos(-2\pi n) + i \sin(-2\pi n) = \cos(2\pi n) - i \sin(2\pi n). \quad (4.16)$$

Podstawiając kolejne wartości n do wzoru otrzymamy:

$$\begin{aligned} \cos(0) &= 1 & \sin(0) &= 0 \\ \cos(2\pi) &= 1 & \sin(2\pi) &= 0 \\ \cos(2\pi n) &= 1 & \sin(2\pi n) &= 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

Z czego wynikają następujące równości:

$$\cos(2\pi n) - i \sin(2\pi n) = 1, \quad (4.18)$$

$$e^{-i2\pi n} = 1, \quad (4.19)$$

$$T_p = 2\pi. \quad (4.20)$$

Co dowodzi, że czas Poincare wynosi 2π .

W niniejszej pracy będą rozważane dwa układy różniące się warunkami początkowymi. W przypadku pierwszego układu prawdopodobieństwo W_n , jest stałe dla każdej wartości energii E_n , natomiast w przypadku drugim, prawdopodobieństwo to się zmienia wraz ze zmianą energii.

W ogólności dla przyrostu energii $\Delta E = 1$, gdzie $E_1 = \Delta E$, $E_2 = 2\Delta E \dots$ $E_{N_{tot}} = N_{tot}\Delta E$ czas Poincare wynosi:

$$T_p = \frac{2\pi}{\Delta E}. \quad (4.21)$$

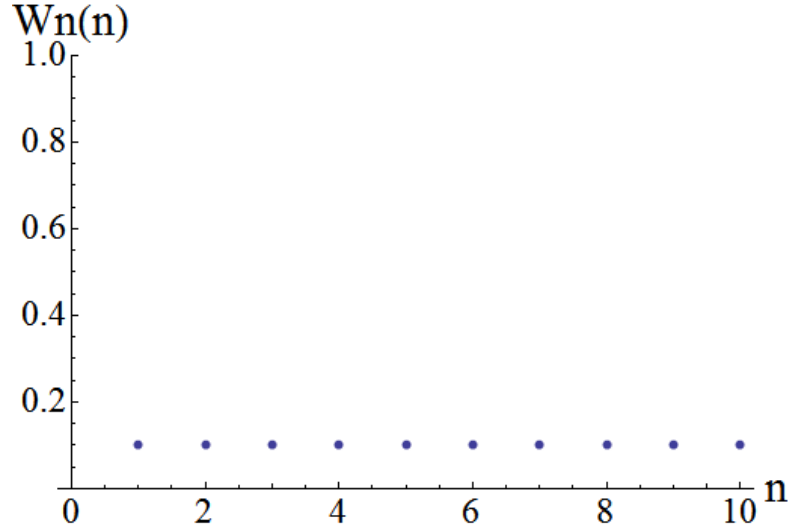
Im ΔE mniejsze, tym bardziej czas Poincare się wydłuża. Jeśli $\Delta E \rightarrow 0$, to $T_p \rightarrow \infty$. Im bardziej skomplikowany stan, tym czas Poincare jest dłuższy, znacznie dłuższy niż czas istnienia Wszechświata.

4.2 Równe prawdopodobieństwa

Rozważmy układ, w którym prawdopodobieństwa W_n , że stan ma energię E_n , są takie same dla każdego n :

$$W_1 = W_2 = \dots = W_{N_{tot}}. \quad (4.22)$$

Zależność $W_n(n)$ gdy $n = 1, 2, \dots, 10$ przedstawia rys.4.1.



Rysunek 4.1: Rozkład prawdopodobieństwa $W_n(n)$ gdy $W_1 = W_2 = \dots = W_{N_{tot}}$ dla $N_{tot} = 10$

Prawdopodobieństwo tego, że układ jest w stanie o energii E_n , oznaczamy:

$$W_n = |C_n|^2 = \frac{1}{N_{tot}}. \quad (4.23)$$

Przyjmijmy, że $E_n = n$. Prawdopodobieństwo tego, że w chwili t , układ jest w stanie takim jak początkowy można zapisać jako:

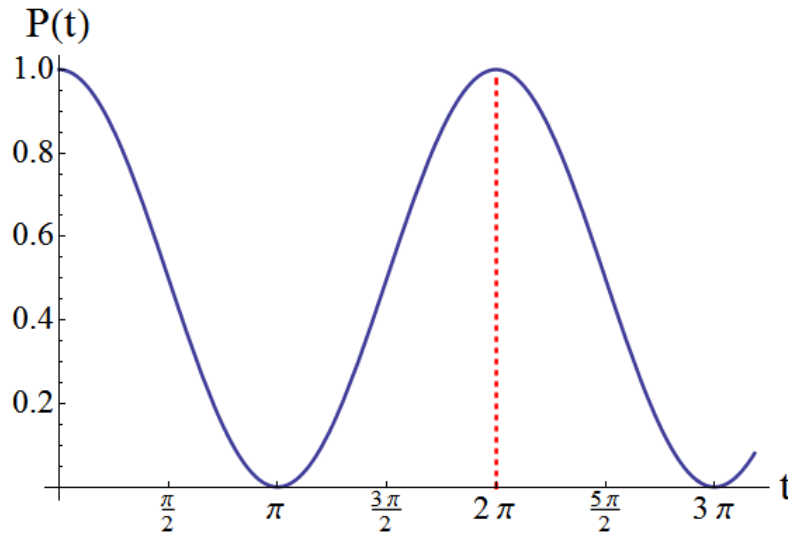
$$P(t) = \left| \sum_{n=1}^{N_{tot}} \frac{1}{N_{tot}} e^{-int} \right|^2. \quad (4.24)$$

Prawdopodobieństwo $P(t)$, zarówno $t = 0$, jak i $t = T_p$, wynosi 1. Wobec powyższego oraz formuły $P(t) = \left| \sum_{n=1}^{N_{tot}} W_n e^{-int} \right|^2$, można zauważyć, że $T_p = 2\pi$.

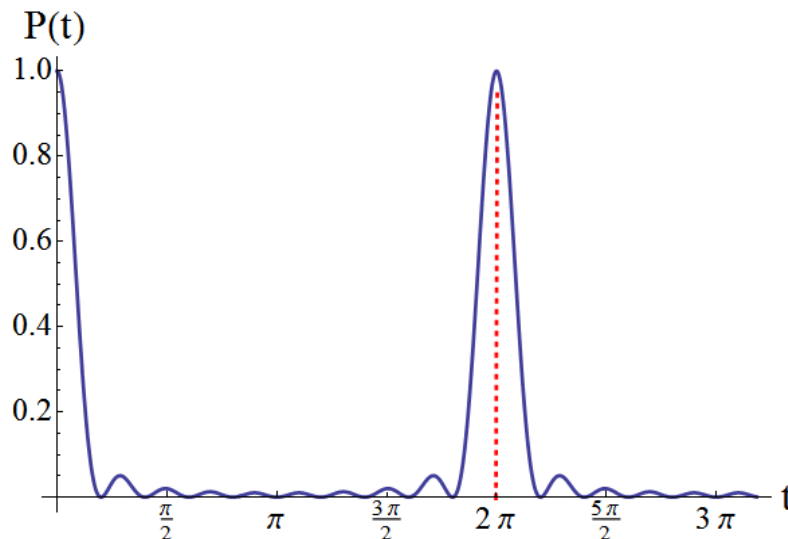
Otrzymane równania wprowadzono do programu Mathematica za pomocą odpowiednich formuł, a następnie na ich podstawie zostały wygenerowane wykresy przedstawiające prawdopodobieństwo $W_n(n)$, oraz funkcję prawdopodobieństwa $P(t)$.

Wykresy dla równych prawdopodobieństw

Poniżej przedstawiono wykresy (rys. od 4.2 do 4.7), otrzymane za pomocą programu Mathematica dla wartości $N_{tot} = 2, 10, 100$ oraz 1000 , przy założeniu, że $W_1 = W_2 = \dots = W_{N_{tot}}$. Na wykresach czerwoną przerywaną linią zaznaczony jest czas t , po którym funkcja $P(t)$ powraca do wartości początkowej, czyli czas który jest potrzebny aby stan układu powrócił do stanu pierwotnego.

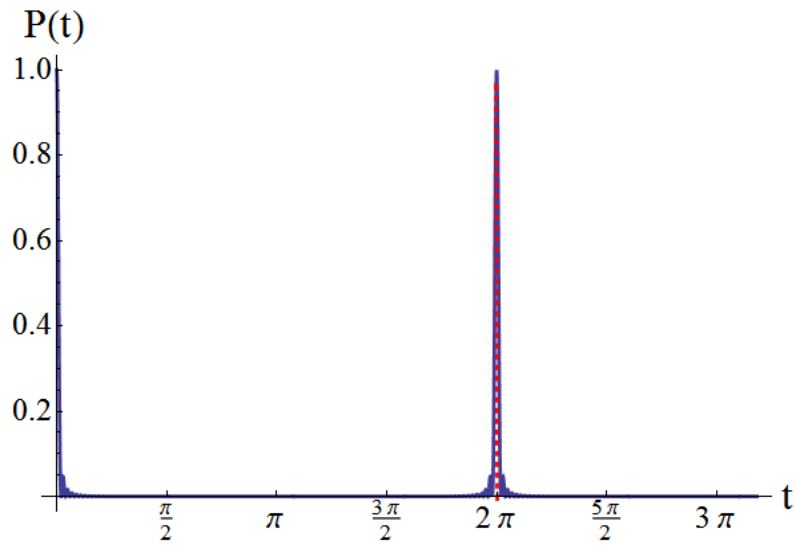


Rysunek 4.2: Zależność prawdopodobieństwa $P(t)$ od czasu t dla $N_{tot} = 2$

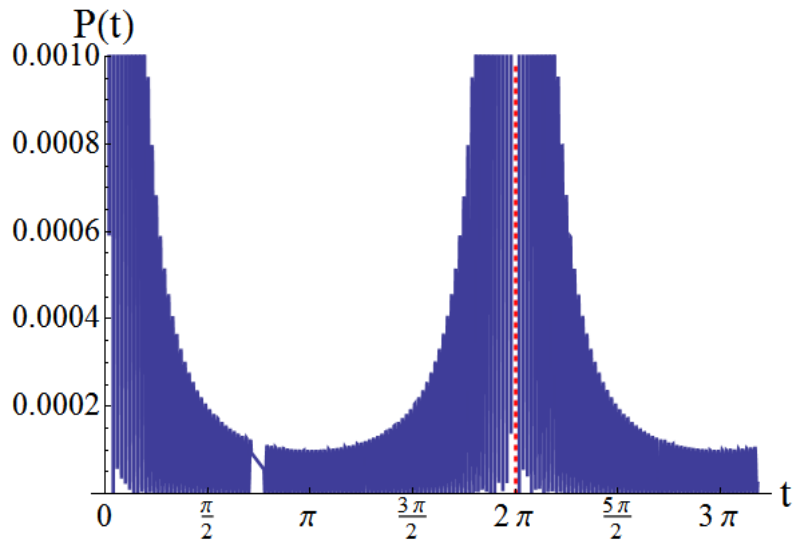


Rysunek 4.3: Zależność prawdopodobieństwa $P(t)$ od czasu t dla $N_{tot} = 10$

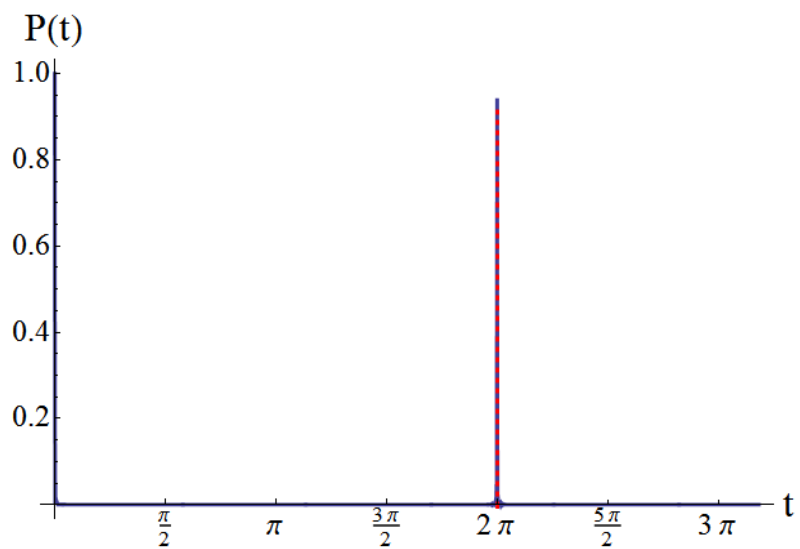
Można zauważyć, że prawdopodobieństwo tego, że układ jest w stanie takim jak początkowy, osiąga wartość 1 po upływie czasu 2π . Czas Poincare T_p , wynosi więc 2π .



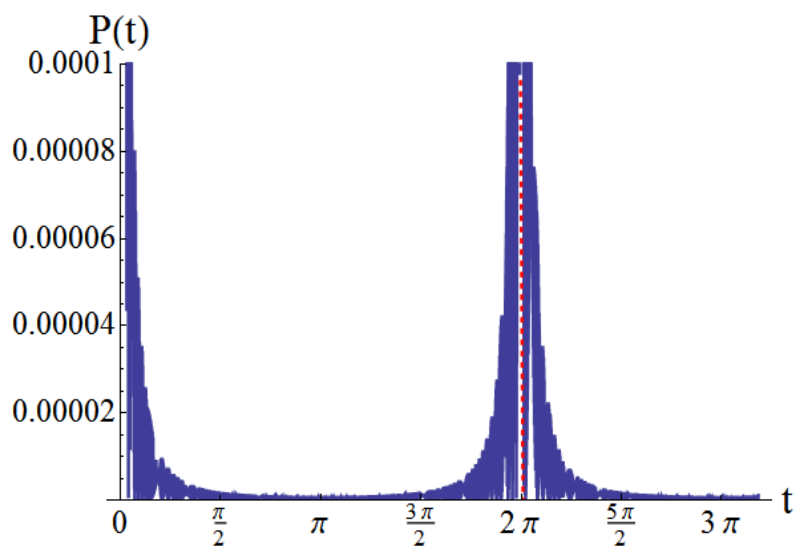
Rysunek 4.4: Zależność prawdopodobieństwa $P(t)$ od czasu t dla $N_{tot} = 100$



Rysunek 4.5: Zależność prawdopodobieństwa $P(t)$ od czasu t dla $N_{tot} = 100$ i zakresu $(0 - 0.001)$



Rysunek 4.6: Zależność prawdopodobieństwa $P(t)$ od czasu t dla $N_{tot} = 1000$



Rysunek 4.7: Zależność prawdopodobieństwa $P(t)$ od czasu t dla $N_{tot} = 1000$ i zakresu $(0 - 0.0001)$

Dla zwiększenia czytelności wykresów dla $N_{tot} = 100$ oraz $N_{tot} = 1000$, przedstawiono je również w dolnej części, tzn. dla prawdopodobieństwa z przedziału od 0 do 0.001 lub od 0 do 0.0001. Umotywowane jest to tym, że prawdopodobieństwo tego, że układ powróci do stanu początkowego jest niewielkie w chwilach różnych od całkowitej wielokrotności czasu Poincare.

Zauważmy, że im większa jest wartość N_{tot} , tym krótszy jest czas po którym prawdopodobieństwo znalezienia układu w stanie takim jak początkowy spada do wartości bliskich zeru. Inaczej mówiąc, prawdopodobieństwo tego, że układ powróci do stanu takiego jak początkowy w chwili różnej od czasu Poincare, jest tym mniejsze, im więcej jest dopuszczalnych stanów w których może znaleźć się układ. Można przypuszczać, że szybkość zmian prawdopodobieństwa $P(t)$, dla czasów bliskich T_p , jest rosnącą funkcją liczby stanów w jakich może znajdować się układ.

Nadmieńmy, że czas potrzebny do wygenerowania wykresu w programie Mathematica był tym dłuższy, im większa była liczba N_{tot} . Do wykonania jednego wykresu procesor o zegarze 1.6 GHz potrzebował nawet kilku godzin.

4.3 Różne prawdopodobieństwa

Niech prawdopodobieństwa znalezienia układu w stanie o energii E_n , będą różne dla różnych wartości n :

$$W_1 \neq W_2 \neq \dots \neq W_{N_{tot}}. \quad (4.25)$$

Rozważmy sytuację w której owe prawdopodobieństwa $W_n(n)$ dane są wzorem:

$$W_n = \frac{b}{(n - \frac{N_{tot}}{2})^2 + \frac{\lambda^2}{4}}, \quad (4.26)$$

gdzie $\lambda = N_{tot}$, natomiast b jest zdefiniowane jako:

$$b = \frac{1}{\sum_{n=1}^{N_{tot}} \frac{1}{(n - \frac{N_{tot}}{2})^2 + \frac{\lambda^2}{4}}}. \quad (4.27)$$

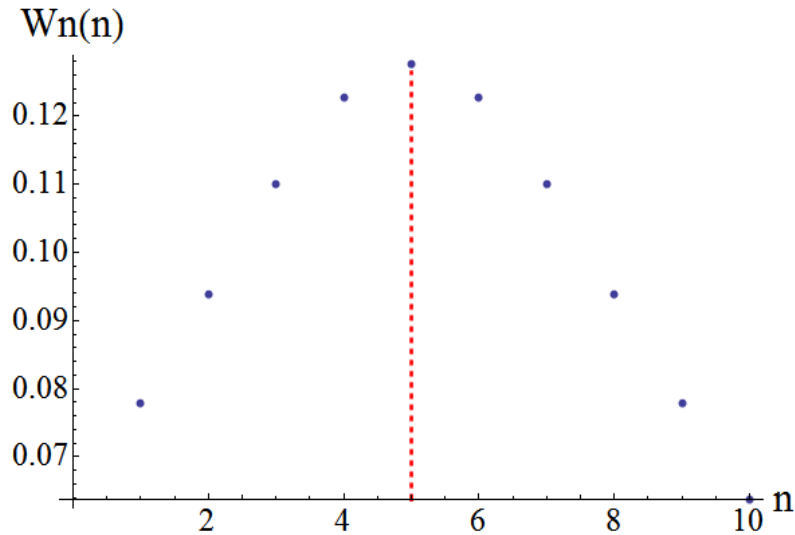
Sytuację tę zilustrowano na wykresie (rys.4.8.):

Największe prawdopodobieństwo $P(t)$ ma stan $n = \frac{N_{tot}}{2}$, ponieważ:

$$P(t) = \left| \sum_{n=1}^{N_{tot}} W_n e^{-int} \right|^2 \simeq \left| W_{\frac{N_{tot}}{2}} e^{-i\frac{N_{tot}}{2}t} \right|^2 \simeq 1, \quad (4.28)$$

jeżeli $\lambda \rightarrow 0$.

Należy pamiętać o tym, że suma wszystkich prawdopodobieństw wynosi 1.



Rysunek 4.8: Rozkład prawdopodobieństwa $W_n(n)$ dla $N_{tot} = 10$ i $\lambda = 10$. Przerywana czerwona linia odcina argument n dla którego prawdopodobieństwo W_n jest największe

$$W_1 + W_2 + \dots + W_{N_{tot}} = 1. \quad (4.29)$$

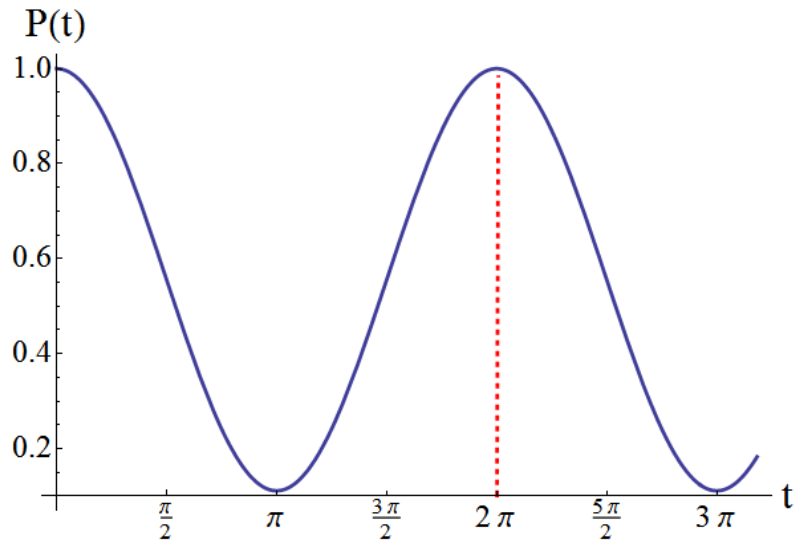
Analogicznie do sytuacji z poprzedniego podrozdziału będziemy liczyć prawdopodobieństwo $P(t)$ dla $N_{tot} = 2, 10, 100, 1000$:

$$P(t) = \sum_{n=1}^{N_{tot}} \frac{b}{(n - \frac{N_{tot}}{2})^2 + \frac{\lambda^2}{4}} e^{-int}. \quad (4.30)$$

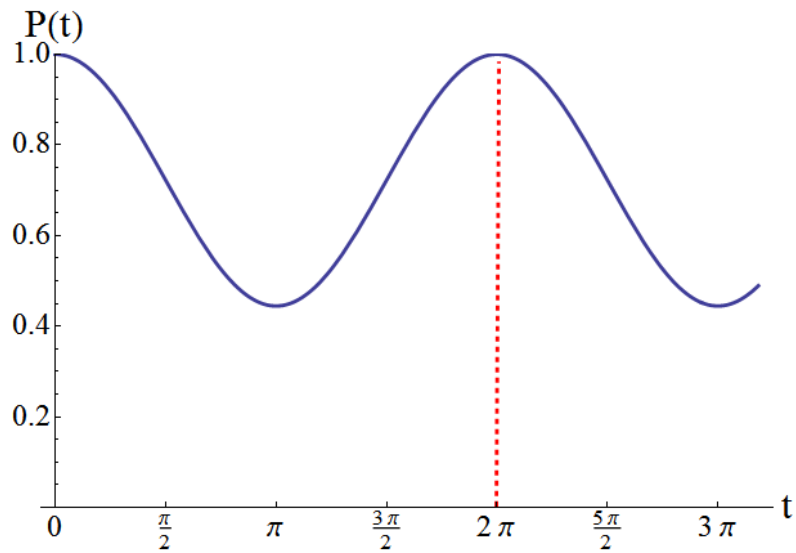
Wykresy dla różnych prawdopodobieństw

Poniżej przedstawiono wykresy (rys. od 4.9. do 4.18.) wygenerowane w programie Mathematica dla wartości $N_{tot} = 2, 10, 100$ oraz 1000 , przy założeniu, że $W_1 \neq W_2 \neq \dots \neq W_{N_{tot}}$. Na wykresach czerwoną przerywaną linią zaznaczony jest czas t , w którym funkcja $P(t)$ powraca do wartości początkowej, czyli czas który jest potrzebny aby stan układu powrócił do stanu pierwotnego.

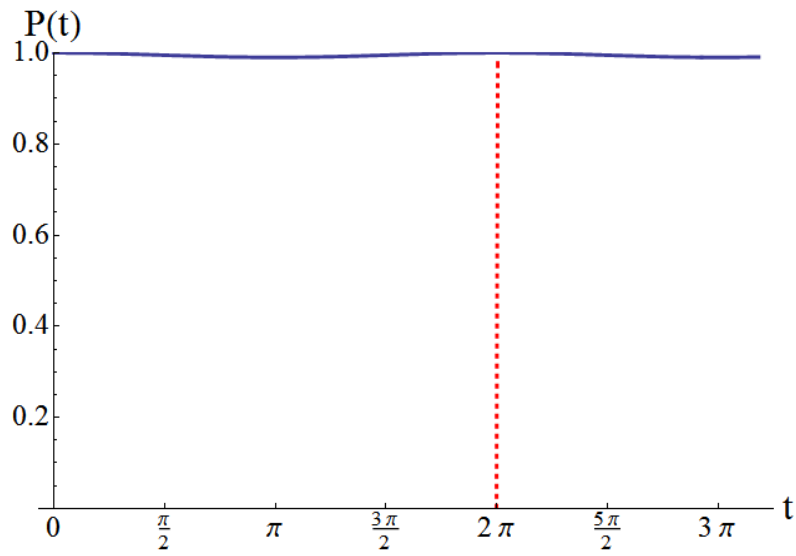
Patrząc na wykresy $P(t)$ dla tego przypadku, widać wpływ wielkości λ na przebieg funkcji. Gdy wartości λ są duże ($\lambda = N_{tot}$), to wykresy wyglądają bardzo podobnie jak w poprzednim podrozdziale, gdzie prawdopodobieństwa W_n były sobie równe. Natomiast gdy λ przyjmuje mniejszą wartość rzędu 1 lub 0.1, to wraz z upływem czasu, prawdopodobieństwo znalezienia układu w stanie takim jak na początku, jest większe niż gdy W_n były takie same dla każdego n . Dla małych



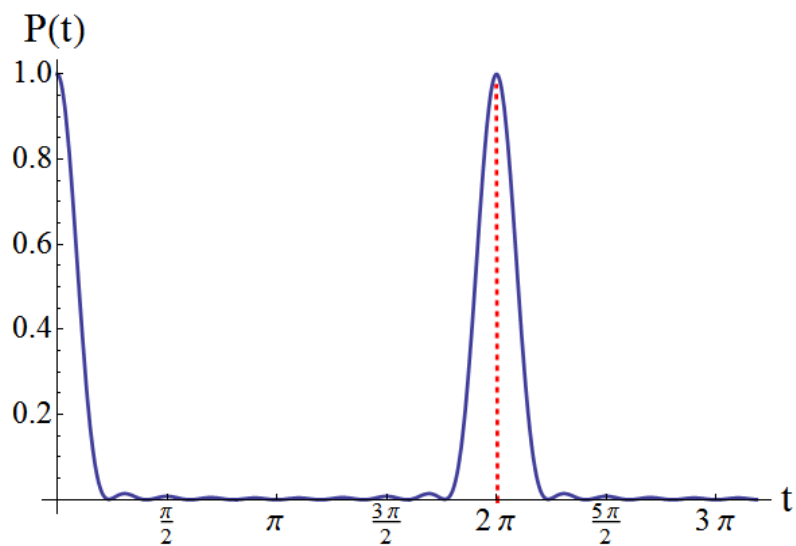
Rysunek 4.9: Prawdopodobieństwo $P(t)$ w funkcji czasu dla $N_{tot} = 2$ i $\lambda = N_{tot}$



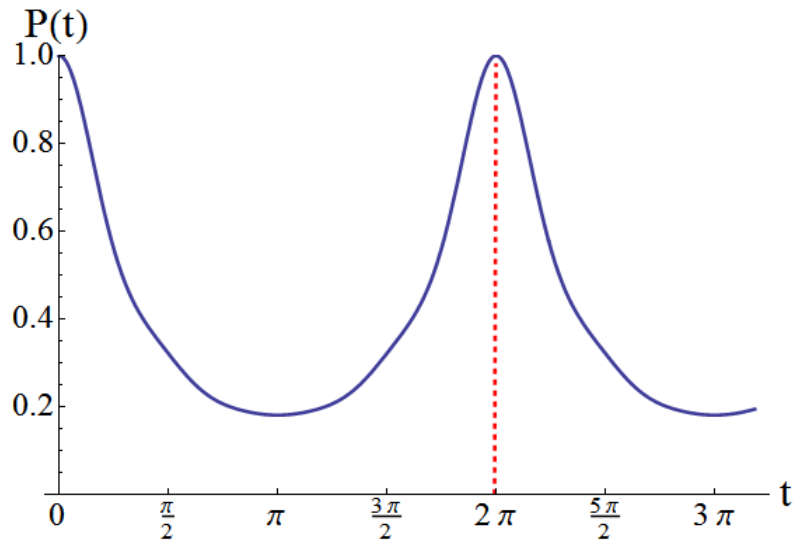
Rysunek 4.10: Prawdopodobieństwo $P(t)$ w funkcji czasu dla $N_{tot} = 2$ i $\lambda = 1$



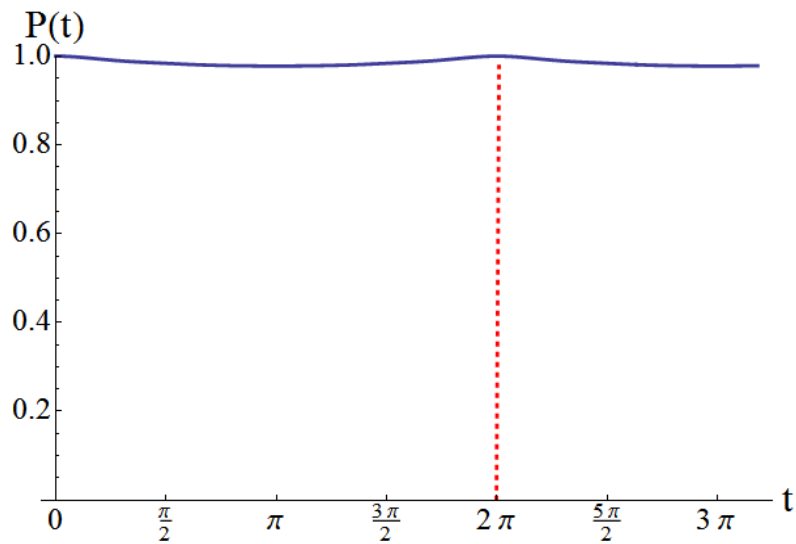
Rysunek 4.11: Prawdopodobieństwo $P(t)$ w funkcji czasu dla $N_{tot} = 2$ i $\lambda = 0.1$



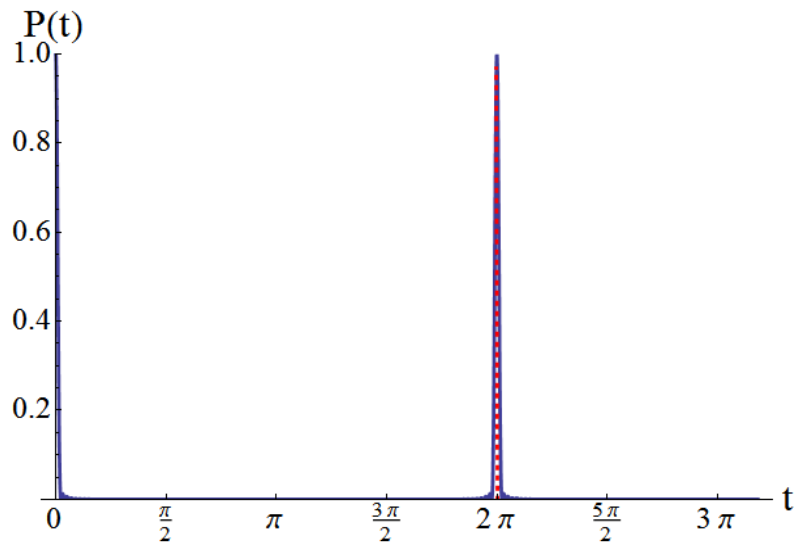
Rysunek 4.12: Prawdopodobieństwo $P(t)$ w funkcji czasu dla $N_{tot} = 10$ i $\lambda = N_{tot}$



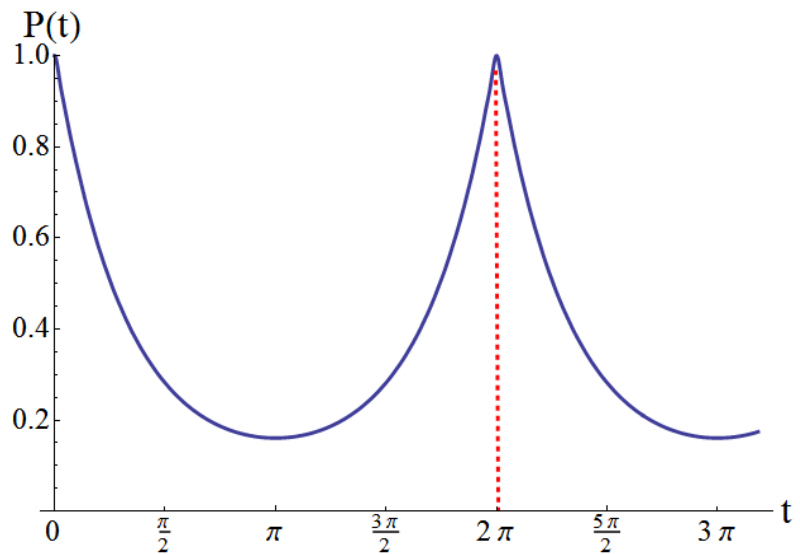
Rysunek 4.13: Prawdopodobieństwo $P(t)$ w funkcji czasu dla $N_{tot} = 10$ i $\lambda = 1$



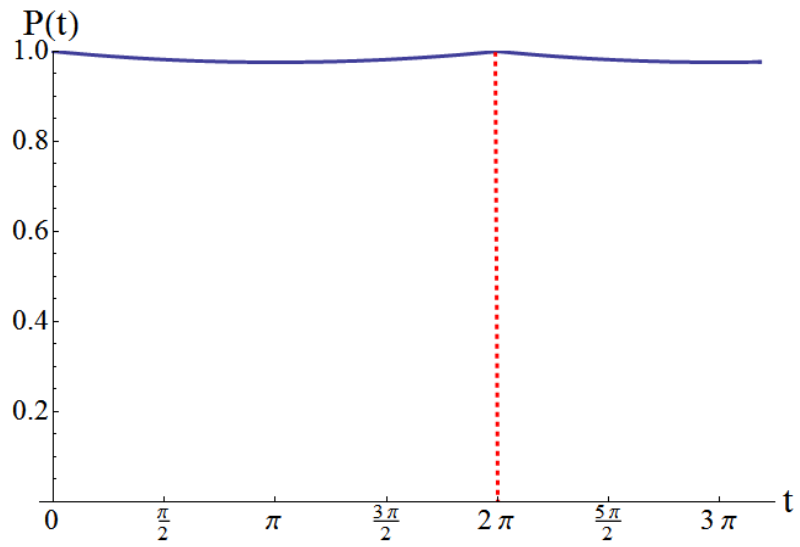
Rysunek 4.14: Prawdopodobieństwo $P(t)$ w funkcji czasu dla $N_{tot} = 10$ i $\lambda = 0.1$



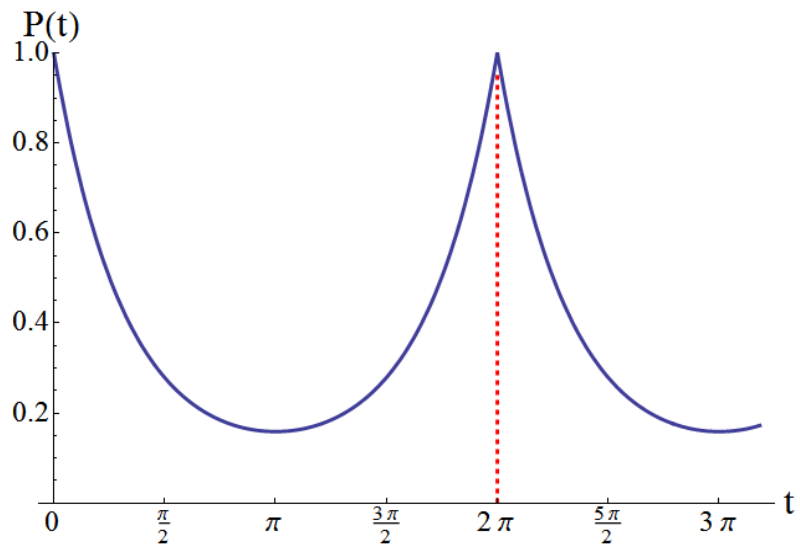
Rysunek 4.15: Prawdopodobieństwa $P(t)$ w funkcji czasu dla $N_{tot} = 100$ i $\lambda = N_{tot}$



Rysunek 4.16: Prawdopodobieństwo $P(t)$ w funkcji czasu dla $N_{tot} = 100$ i $\lambda = 1$



Rysunek 4.17: Prawdopodobieństwo $P(t)$ w funkcji czasu dla $N_{tot} = 100$ i $\lambda = 0.1$



Rysunek 4.18: Prawdopodobieństwo $P(t)$ w funkcji czasu dla $N_{tot} = 1000$ i $\lambda = 1$.

wartości λ funkcja $P(t)$ nie osiąga wartości 0, przyjmuje wartości zbliżone do 1, co świadczy o większej stabilności takiego układu.

4.4 Korespondencja pomiędzy formalizmem Shrödingera i Heisenberga

W niniejszej pracy używaliśmy formalizmu Heisenberga z notacją Diraca. Istnieje również formalizm Shrödingera, który używa funkcji falowej. W tabeli poniżej przedstawiono jak wygląda korespondencja pomiędzy tymi formalizmami.

	Notacja Diraca	Funkcja falowa
Stan w $t = 0$	$ s\rangle$	$\psi(\vec{x})$
Stany własne energii	$ E_n\rangle$	$\varphi_n(\vec{x})$
Operator Hamiltona	$\hat{H} E_n\rangle = E_n E_n\rangle$	$\hat{H}\varphi_n(\vec{x}) = E_n\varphi_n(\vec{x})$
Superpozycja energii	$ s\rangle = \sum_{n=1}^N C_n E_n\rangle$	$\psi(\vec{x}) = \sum_{n=1}^N C_n \varphi_n(\vec{x})$
Stan w chwili t	$ \Psi(t)\rangle$	$\Psi(t, \vec{x})$
Równanie Schrödingera	$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t)\rangle = \hat{H} \Psi(t)\rangle$	$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t, \vec{x}) = \hat{H} \Psi(t, \vec{x})$
Formalne rozwiązanie	$ \Psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t} s\rangle$	$\Psi(t, \vec{x}) = e^{-i\hat{H}t} \psi(\vec{x})$
Rozwiązanie w bazie energii	$ \Psi(t)\rangle = \sum_{n=1}^N C_n e^{-iE_n t} E_n\rangle$	$\Psi(t, \vec{x}) = \sum_{n=1}^N C_n e^{-iE_n t} \varphi_n(\vec{x})$

Tab.2 Korespondencja pomiędzy formalizmem Shrödingera i formalizmem Heisenberga.

Jak widać, te formalizmy są ze sobą spójne. Wszystkie nasze rozwiązania mogą być również przedstawione za pomocą formalizmu Shrödingera i funkcji falowej. Jednak w tym przypadku wygodniejsze było posłużenie się formalizmem Heisenberga.

Rozdział 5

Opis tworzenia wykresów w programie Mathematica

Celem tego rozdziału jest wprowadzenie do środowiska programu Mathematica, który posłużył jako narzędzie do wykonania obliczeń oraz wykreślenia wykresów użytych w niniejszej pracy. Mathematica jest programem wszechstronnym, używanym zarówno przy wykonywaniu prostej arytmetyki jak i skomplikowanych rachunków na większą skalę.

Aby przybliżyć działanie programu zostały opisane i przedstawione na rysunkach ogólne zasady działania programu oraz wszystkie funkcje i polecenia użyte w tej pracy.

W celu rozpoczęcia obliczeń uruchamiamy program Wolfram Mathematica. Wybieramy zakładkę File ->New ->Notebook(.nb) (rys.5.1.). Otwiera to nowy zeszyt do obliczeń.

Aby otrzymać wykresy takie jak użyte w niniejszej pracy postępujemy według następującego planu.

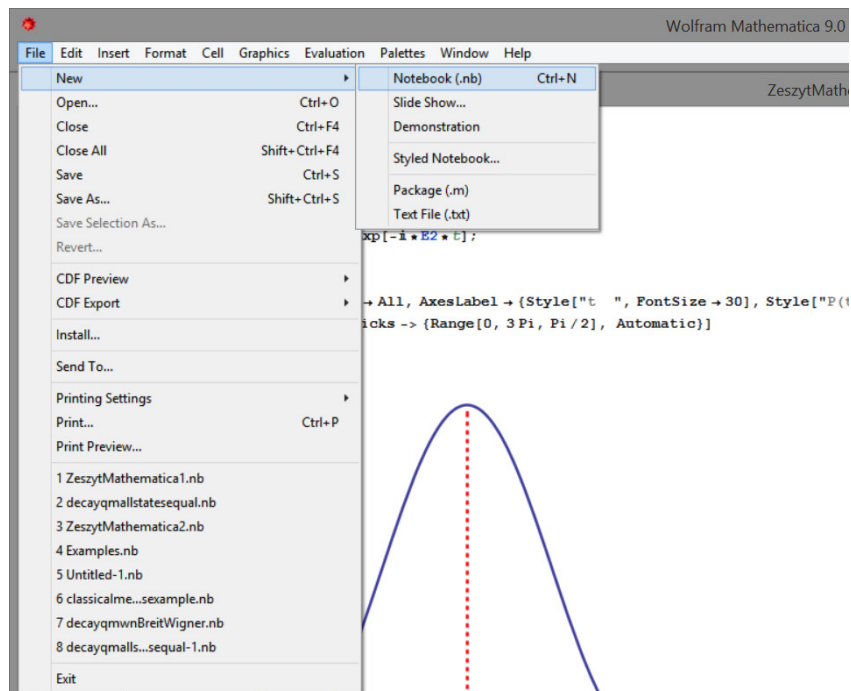
Po otwarciu nowego notatnika, pierwszym krokiem jest przypisanie wartości dla każdego W_n i E_n (rys.5.2). Można to zrobić poprzez wprowadzenie symbolu i wartości którą chcemy do niego przypisać, a następnie postawienie między nimi znaków $:=$. W celu uruchomienia kompilatora naciskamy klawisze *Shift + Enter*.

Wpisywane wyrażenia oznaczane są jako $In[...] :=$ a ich wyniki jako $Out[...] =$.

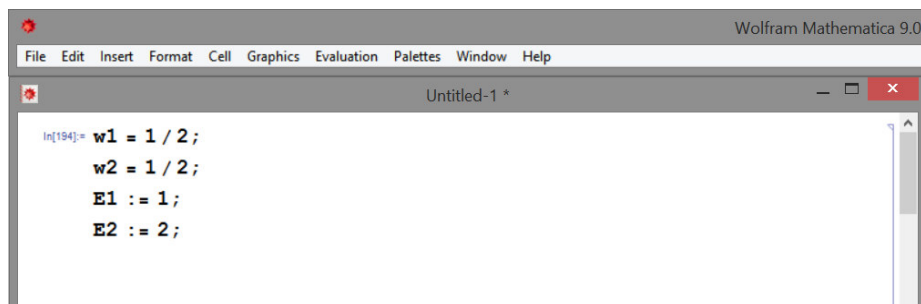
Niestety takie wprowadzanie danych w przypadku dużej liczby wartości n nie miałyby sensu ze względu na zbyt długi czas wpisywania po kolei wszystkich danych. Należy zatem zmienne E_n oraz W_n zdefiniować jako funkcje zależne od n (rys.5.3).

Definiując funkcję musimy pamiętać o tym, żeby:

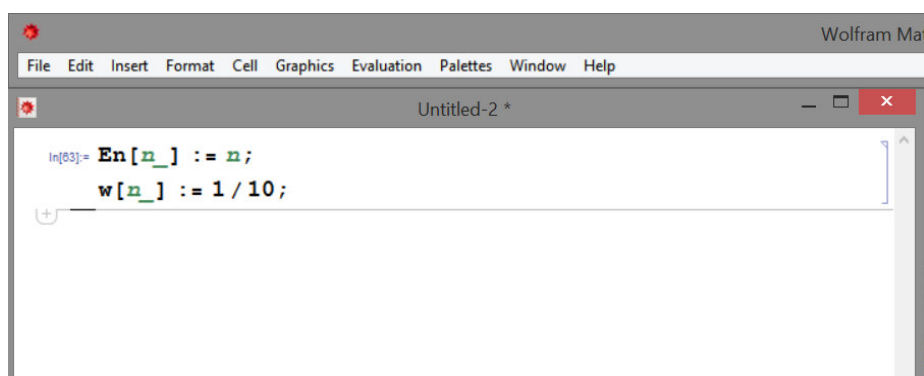
- nazwa funkcji zaczynała się literą i nie zawierała znaków specjalnych,
- funkcjom własnym nadawać nazwę zaczynającą się od małej litery, aby odróżnić je od funkcji programu (Mathematica odróżnia małe i wielkie litery) [4].



Rysunek 5.1: Otwieranie nowego pliku w programie Mathematica.

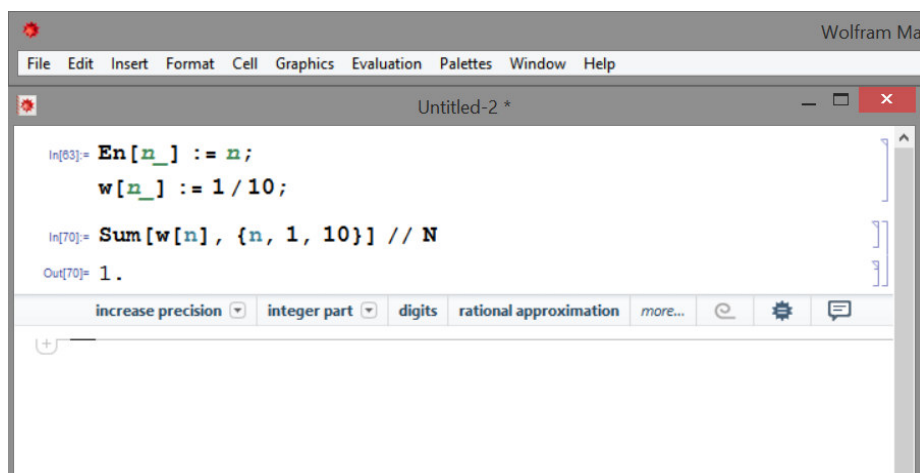


Rysunek 5.2: Przypisywanie danych w programie Mathematica



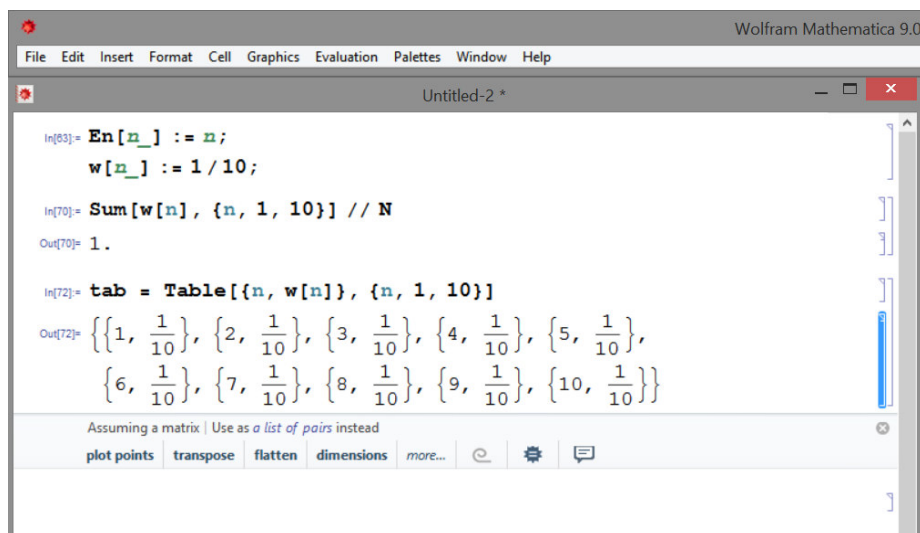
Rysunek 5.3: Definiowanie funkcji w programie Mathematica

Sprawdźmy jeszcze czy suma wszystkich prawdopodobieństw $\sum_{n=1}^{N_{tot}} W_n$ wynosi 1. Robimy to wpisując formułę $Sum[...]$ (rys.5.4).



Rysunek 5.4: Liczenie sumy w programie Mathematica

Utwórzmy listę wszystkich $W_n(n)$ przy pomocy opcji $Table[...]$ (rys.5.5).

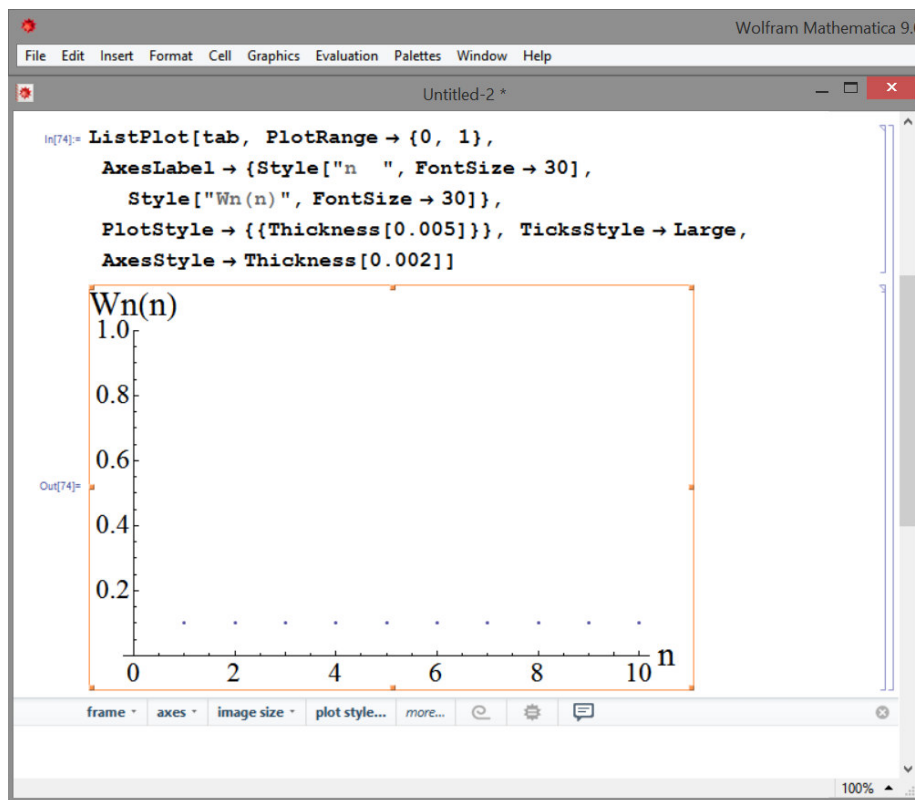


Rysunek 5.5: Tworzenie listy za pomocą funkcji $Table$ w programie Mathematica

Pośród instrukcji graficznych są takie, dzięki którym możemy przedstawić graficznie dane liczbowe. Jedną z nich jest $ListPlot$, która wykreśla punkty (x_1, y_1) , (x_2, y_2) itd. Użyjemy jej aby przedstawić funkcję $W_n(n)$ za pomocą wykresu punktowego (rys.5.6). Aby określić wielkość plamki oznaczającej punkty używamy opcji $PlotStyle$ i dyrektywy $PointSize [4]$. Możemy ją zmienić, a także inne właściwości graficzne wykresu, również posługując się oknem $Drawing Tools$ z zakładki $Graphics$.

Mathematica posiada wiele opcji graficznych, które modyfikują wygląd wykresów. Przy opracowaniu wykresów znajdujących się w niniejszej pracy użyto następujących:

- *PlotRange* - określa zakres współrzędnych osi OY;
- *Ticks, TicksStyle* - pozwalają odpowiednio na zmianę skali osi i modyfikowanie jej wielkości;
- *AxesLabel* - opisuje osie OX i OY;
- *AxesStyle* - określa grubość osi;
- *PlotStyle* - pozwala na zmianę grubości linii wykresu [4].

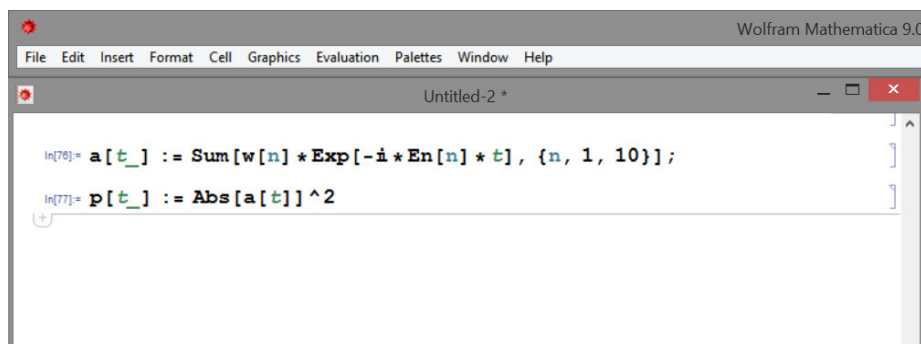


Rysunek 5.6: Tworzenie wykresu punktowego w programie Mathematica

Po wpisaniu wybranych formuł i wczytaniu ich, otrzymujemy zbiór punktów, które zgodnie z założeniem mają tę samą wartość prawdopodobieństwa W_n dla każdego n . Wykres można modyfikować przy użyciu zakładki wyświetlających się bezpośrednio pod wykresem.

W kolejnym kroku definiujemy funkcję $a(t) = \sum_{n=1}^N W_n e^{-iE_n t}$, oraz funkcję $P(t)$ która jest równa kwadratowi modułu $a(t)$. W celu otrzymania modułu z danego wyrażenia należy użyć formuły $Abs[...]$ wpisując w nawias kwadratowy odpowiednie wyrażenie (rys.5.7).

Mamy już wczytane wszystkie dane potrzebne do graficznej prezentacji funkcji



Rysunek 5.7: Definiowanie funkcji w programie Mathematica

$P(t)$ dla równych prawdopodobieństw W_n .

Podstawową instrukcją służącą do tego jest instrukcja $Plot[f(x), \{x, x_{\min}, x_{\max}\}]$, która tworzy wykres funkcji $f(x)$ w przedziale $[x_{\min}, x_{\max}]$ (rys.5.8) [4].

W ten sposób otrzymaliśmy wykres funkcji $P(t)$ w przedziale $[0, 10]$ dla pełnego zakresu współrzędnych osi OY. Na koniec używając opcji z okna *Drawing Tools* z zakładki *Graphics* rysujemy czerwoną przerywaną linię znaczącą moment w którym wykres powraca do wartości początkowej (rys.5.9).

W miarę wzrostu wartości N_{tot} prawdopodobieństwo $P(t)$ w chwilach różnych od całkowitej wielokrotności czasu Poincare, jest niewielkie, przyjmuje wartości bliskie zeru, przez co takie wykresy dla pełnego zakresu osi OY nie są w pełni czytelne. Dlatego przedstawione są one również dla prawdopodobieństw z przedziału od 0 do 0.001 lub od 0 do 0.0001.

Aby wygenerować taki wykres zmieniamy zakres osi OY za pomocą opcji *PlotRange* (rys.5.10).

W przypadku wykresów gdy prawdopodobieństwa W_n są różne postępujemy podobnie. Należy tylko zdefiniować wartość W_n zgodnie z wartościami jakie przyjmuje w tym przypadku oraz przypisać wartości zmiennym λ i b (rys.5.11).

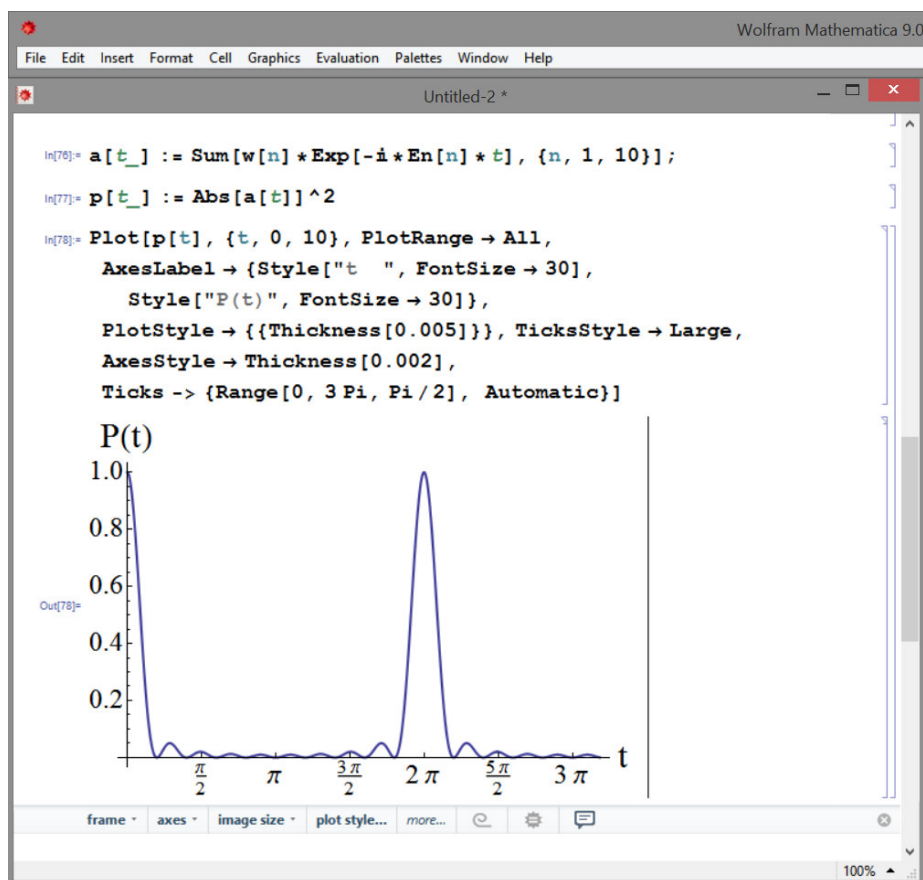
Sprawdzamy czy suma wszystkich prawdopodobieństw W_n jest równa 1 (rys.5.12).

W kolejnych krokach postępujemy analogicznie jak w przypadku wykresów dla równych prawdopodobieństw W_n .

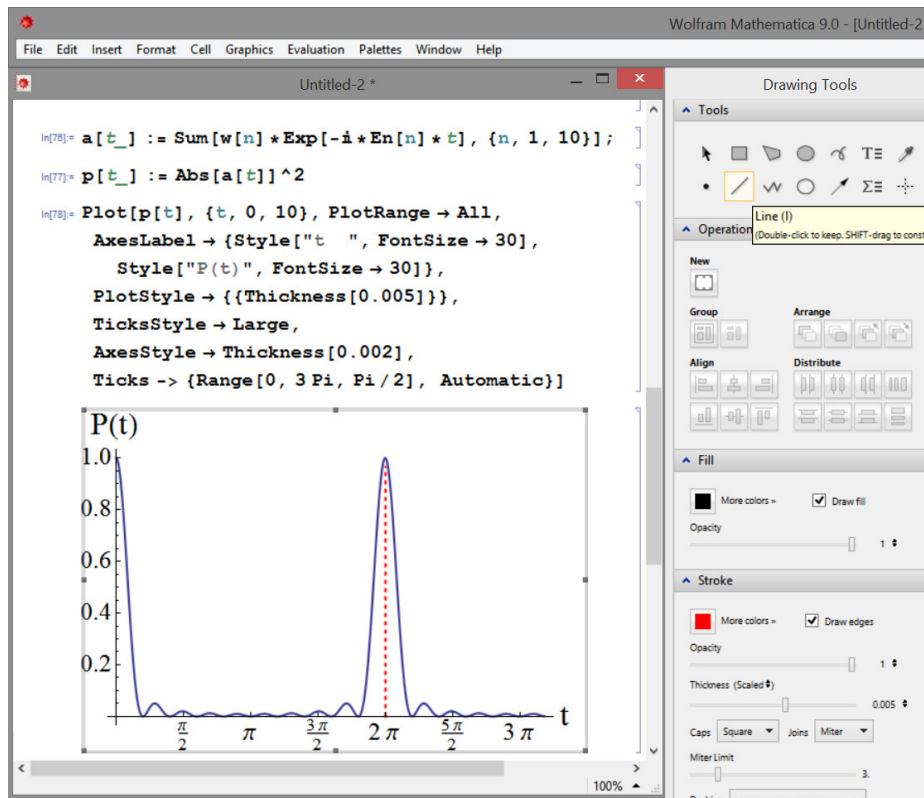
Wykresy użyte w rozdziale pierwszym (rozpad neutronu (rys.5.13), spin elektronu (rys.5.14)) oraz w rozdziale drugim (rys.5.15, rys.5.16) otrzymano używając formuły *Plot* oraz odpowiednich funkcji. Poniżej przedstawiono formuły potrzebne by otrzymać każdy z tych wykresów.

Po skończonej pracy zapisujemy nasze dane. Z zakładki *File* wybieramy opcję *Save As* (rys.5.17).

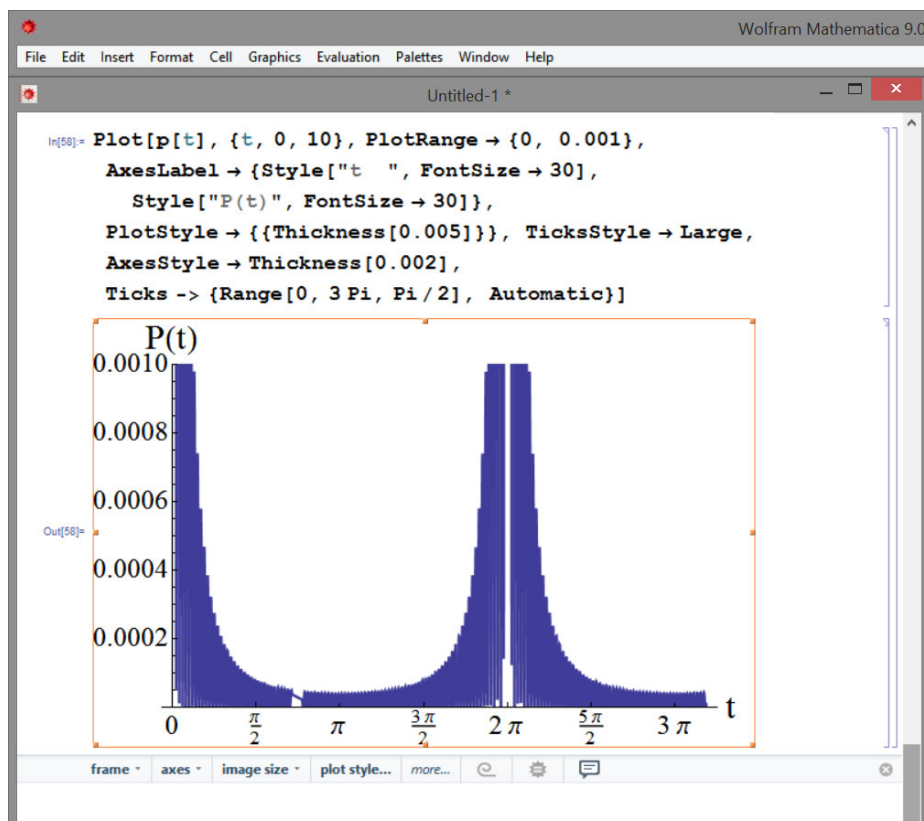
Plik programu Mathematica możemy zapisać również z rozszerzeniem .pdf, .html



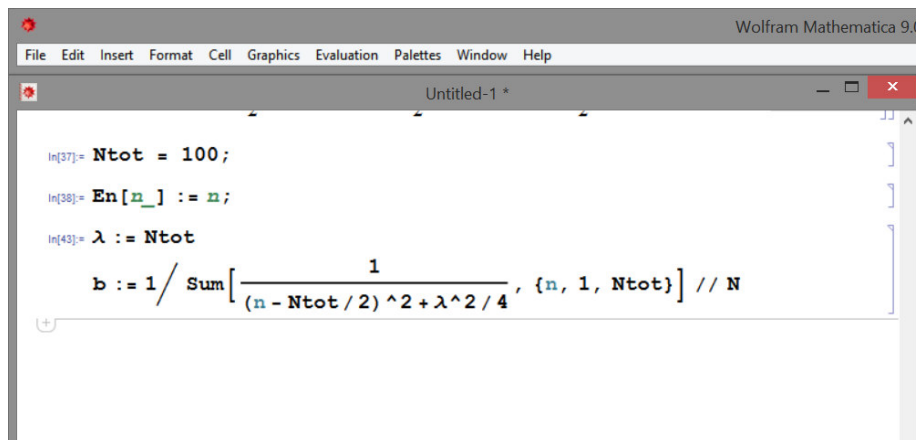
Rysunek 5.8: Tworzenie wykresu w programie Mathematica



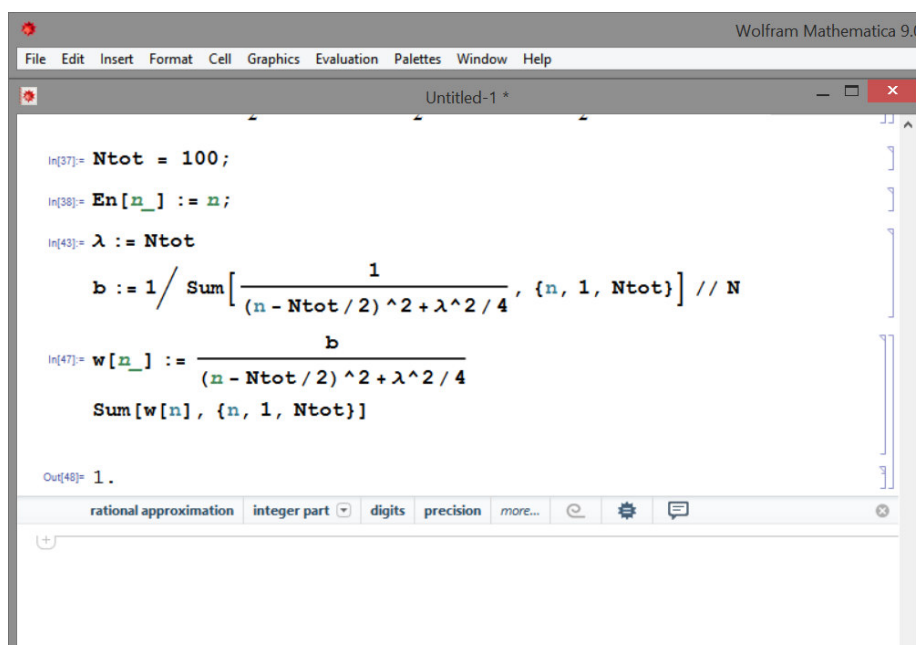
Rysunek 5.9: Używanie zakładki *Graphics* w programie Mathematica



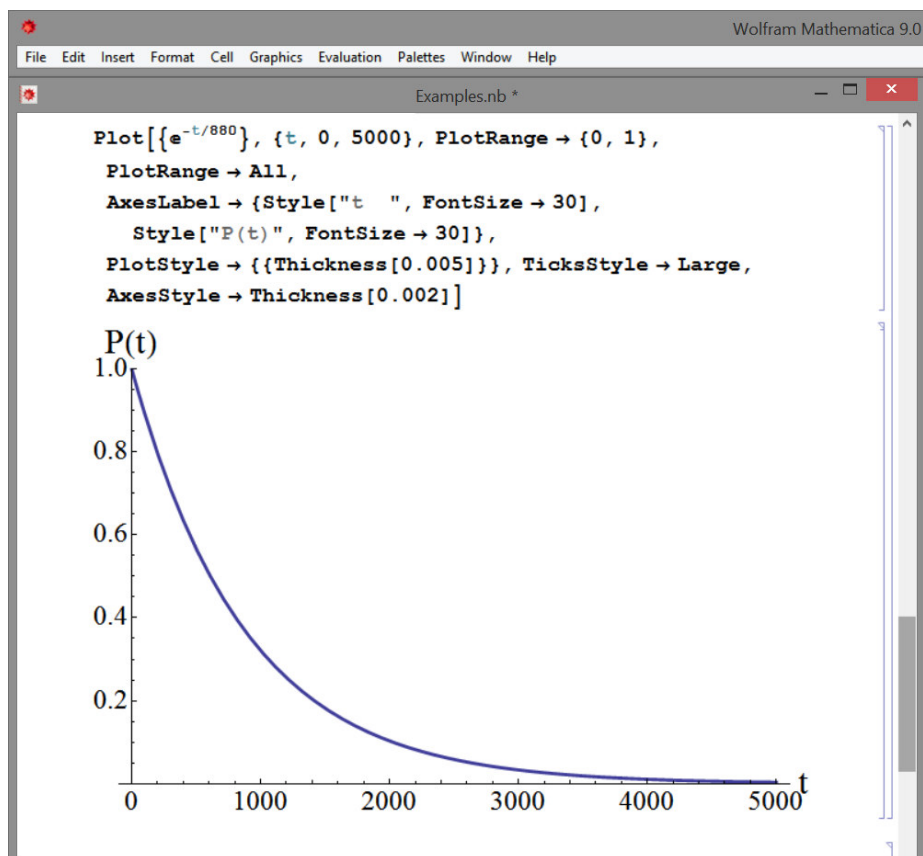
Rysunek 5.10: Zmianie zakresu osi w programie Mathematica



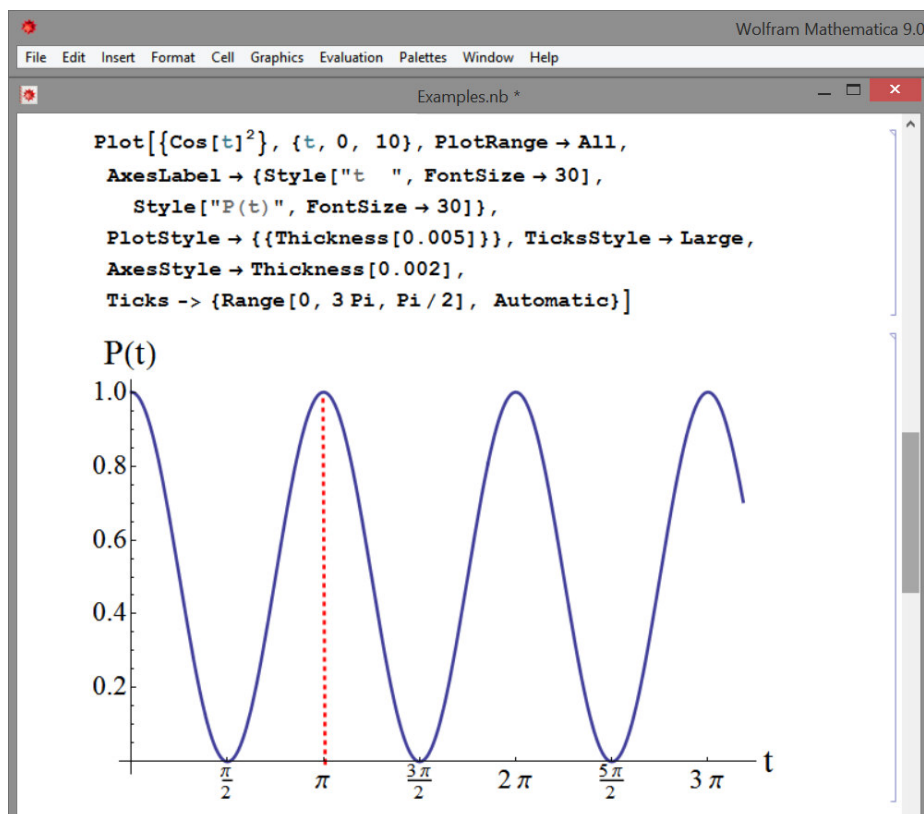
Rysunek 5.11: Przypisywanie wartości w programie Mathematica



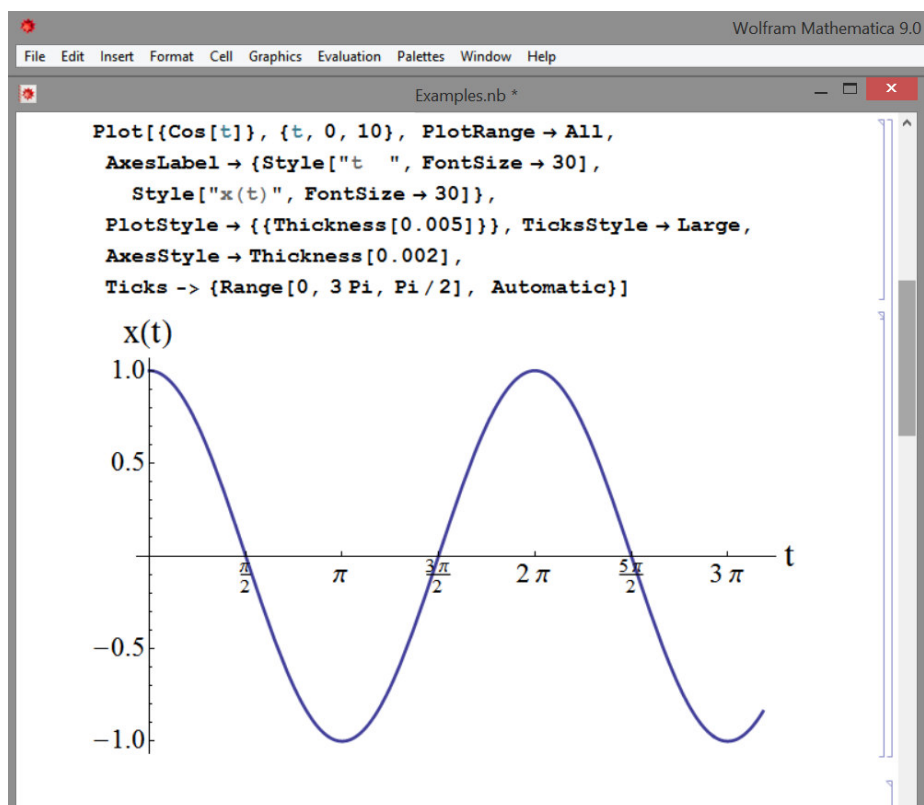
Rysunek 5.12: Liczenie sumy w programie Mathematica



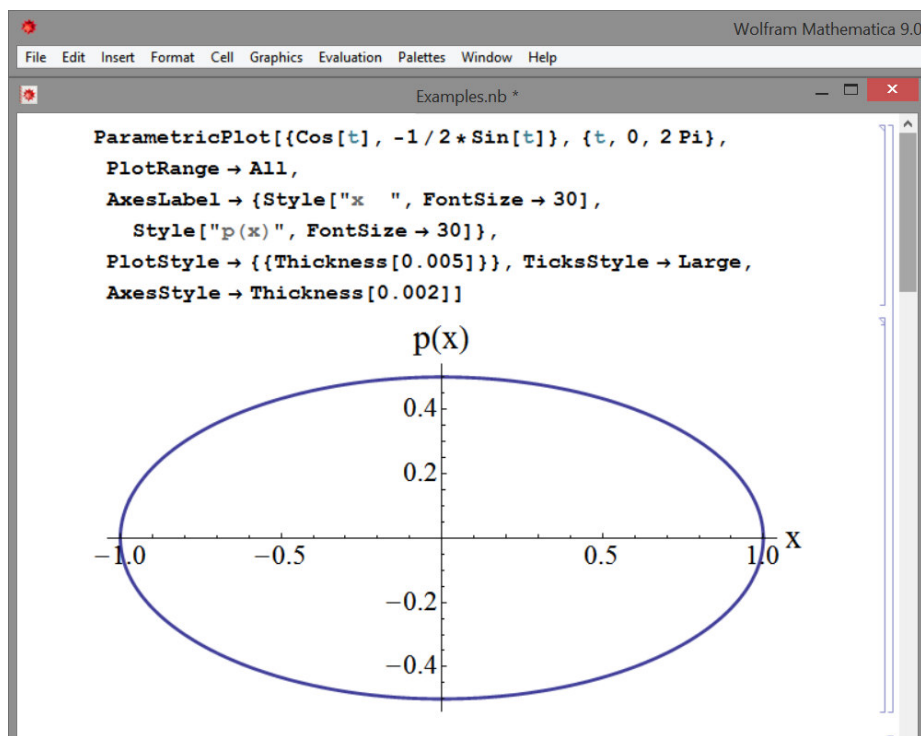
Rysunek 5.13: Instrukcja otrzymania wykresu w programie mathematica dla rozpadu neutronu



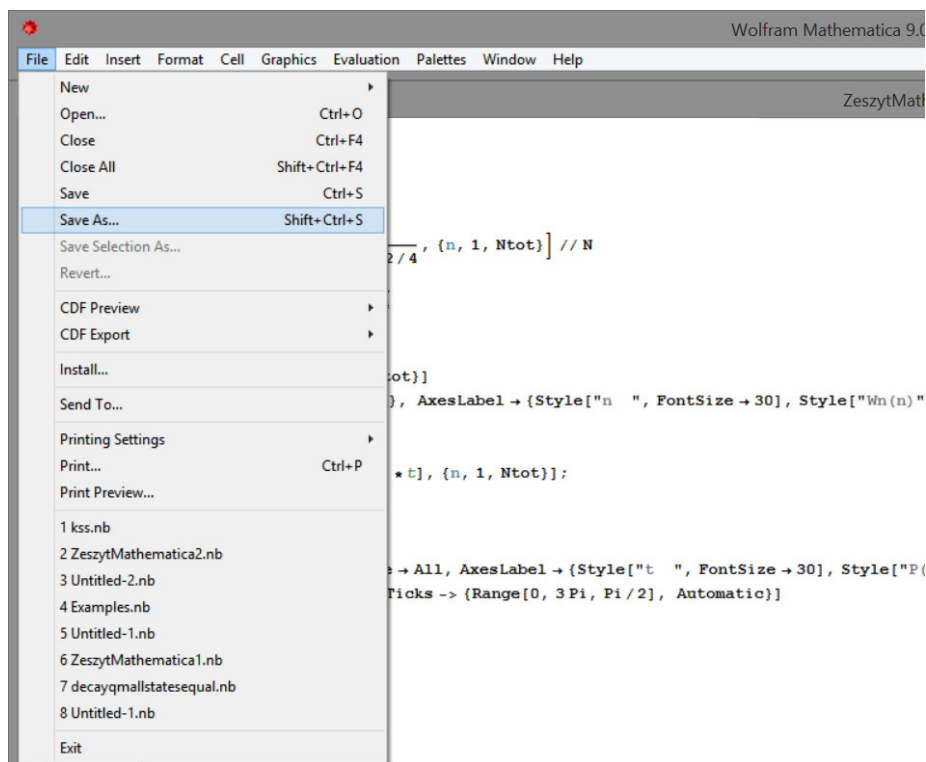
Rysunek 5.14: Instrukcja otrzymania wykresu dla spinu elektronu.



Rysunek 5.15: Instrukcja otrzymania wykresu dla oscylatora harmonicznego.

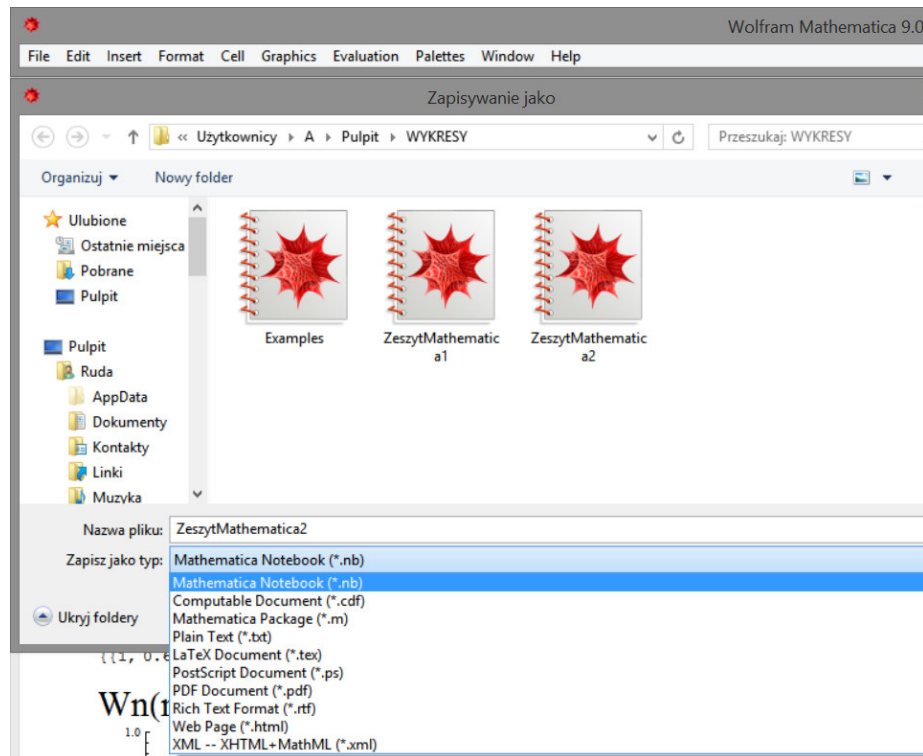


Rysunek 5.16: Instrukcja otrzymania wykresu trajektorii w przestrzeni fazowej.



Rysunek 5.17: Zapisywanie pliku w programie Mathematica

lub innym (rys.5.18).



Rysunek 5.18: Zapisywanie pliku w programie Mathematica

Mathematica oferuje nam szeroki wybór usług graficznych. Możemy tworzyć dzięki niej wykresy funkcji jednej i dwóch zmiennych, obrazować pola wektorowe oraz eksportować wyniki pracy do innych programów. Przy tworzeniu posługujemy się głównie wpisywanymi instrukcjami, narzędzia obsługiwane myszką pełnią rolę uzupełniającą. Jest to spowodowane tym, że Mathematica tworzy grafikę będącą interpretacją obiektów matematycznych.

Jezyk programu Mathematica jest językiem wysokiego poziomu i kompilować można osobno części programów. Jest bardzo wiele gotowych poleceń umożliwiających dokonywanie obliczeń oraz tworzenie wykresów. Program pomaga nie tylko szybko otrzymywać wyniki, ale też wizualizować je ułatwiając interpretację. Otrzymane wyniki mogą być przygotowane do publikacji przy użyciu interfejsu i gotowych narzędzi [4]. Środowisko Mathematica jest bardzo przejrzyste i intuicyjne, a posługiwanie się Pomocą, jest wygodne, ponieważ znajduje się w niej wiele gotowych przykładów do samodzielnej nauki. Dzięki temu program ten jest doskonałym narzędziem pracy zarówno dla zaawansowanego użytkownika, jak i osoby początkującej.

Rozdział 6

Podsumowanie

Niniejsza praca poświęcona jest zagadnieniu czasu Poincare związanym z twierdzeniem o powracaniu które mówi, że każdy zamknięty układ może wrócić do stanu pierwotnego po pewnym czasie.

Pojęcie Poincare zostało wyjaśnione, omówiono warunki jakie musi spełniać układ by można było mówić o jego powrocie do stanu początkowego. Zaznaczono również brak sprzeczności między twierdzeniem o powracaniu, a zjawiskiem entropii. Mimo tego, że układ ewoluuje w stronę układów bardziej prawdopodobnych nie jest niemożliwe by powrócił do stanu początkowego.

Na przykładzie sprężonych cząsteczek gazu [2], spinu elektronu oraz rozpadu neutronu (dla którego czas Poincare T_p okazał się być nieskończony), wyjaśniono pojęcie prawdopodobieństwa $P(t)$, powrotu układu do stanu pierwotnego.

Jednym z celów pracy było pokazanie, że zagadnienie czasu Poincare ma swoje odzwierciedlenie również w mechanice klasycznej. W rozdziale trzecim omówiono pojęcia przestrzeni i trajektorii fazowych. Wyprowadzono równanie ruchu jednowymiarowego oscylatora harmonicznego za pomocą formalizmu Lagrange'a i formalizmu Hamiltona [3]. Zauważono, że czas Poincare w tym przypadku jest równy jednemu obiegowi trajektorii przestrzeni fazowej.

Następnie skupiono się na opisie zagadnienia czasu Poincare w języku mechaniki kwantowej, co zostało zrobione w rozdziale czwartym. Wyprowadzono wzór na prawdopodobieństwo $P(t)$, znalezienia układu podczas pomiaru w stanie takim jak pierwotny. Zdefiniowano prawdopodobieństwo W_n posiadania przez stan określonej energii E_n . Obliczono, że dla naszego układu w którym przyrost energii $\Delta E = 1$, czas Poincare T_p , potrzebny by układ wrócił do stanu początkowego wynosi:

$$T_p = \frac{2\pi}{\Delta E}. \quad (6.1)$$

Głównym celem pracy było liczenie numeryczne prawdopodobieństwa $P(t)$ i

przedstawienie tej funkcji za pomocą wykresów. Prawdopodobieństwo $P(t)$, było liczone dla różnych przypadków.

W pierwszym prawdopodobieństwo W_n posiadania przez stan energii E_n , było jednakowe dla każdego n . Obliczenia zostały wykonane dla całkowitej liczby $N_{tot} = 2, 10, 100, 1000$.

W przypadku drugim, oprócz tego że prawdopodobieństwa W_n były różne dla każdego n , to do wrozu dodano współczynniki b i λ . Tak jak w przypadku pierwszym, obliczenia wykonano dla $N_{tot} = 2, 10, 100, 1000$.

Po wygenerowaniu wykresów dla obu przypadków zaobserwowano, że prawdopodobieństwo znalezienia układu w stanie takim jak początkowy osiąga wartość 1 po upływie czasu 2π dla każdego z omówionych przypadków. Oznacza to, że czas Poincare dla naszego układu wynosi 2π zarówno dla równych jak i różnych wartości W_n oraz nie zależy od liczby N_{tot} .

Następne co zaobserwowano to czas, po którym prawdopodobieństwo znalezienia układu w stanie takim jak początkowy spada do wartości bliskich zeru. Jest on tym krótszy, im większa jest wartość N_{tot} . Z tego powodu wykresy dla $N_{tot} = 100$ oraz $N_{tot} = 1000$ należało przedstawić dla prawdopodobieństwa z przedziału od 0 do 0.001 lub od 0 do 0.0001, ponieważ prawdopodobieństwo $P(t)$ dla takich N_{tot} było niewielkie w chwilach różnych od całkowitej wielokrotności czasu Poincare.

Patrząc na wykresy dla przypadku w którym prawdopodobieństwo W_n było różne dla każdego n , zaobserwowano wpływ wielkości λ na przebieg funkcji. Gdy λ przyjmowało wartości równe liczbie N_{tot} , wykresy prawdopodobieństwa $P(t)$ w funkcji czasu wyglądały bardzo podobnie jak te dla równych prawdopodobieństw W_n . Natomiast gdy λ przyjmowało wartości mniejsze, rzędu 1 lub 0.1, wraz z upływem czasu prawdopodobieństwo znalezienia układu w stanie takim jak początkowy było znacznie większe niż dla dużych wartości λ . Dla małych λ funkcja $P(t)$ nie osiągała wartości 0, przyjmowała wartości zbliżone do 1. Świadczy to o większej stabilności takiego układu.

Według wyników opisanych powyżej wywnioskowano, że wpływ na przebieg funkcji $P(t)$ ma liczba N_{tot} oraz λ . Natomiast te liczby nie mają wpływu na długość czasu Poincare, który dla naszego układu w każdym omówionym przypadku wynosi $T_p = \frac{2\pi}{\Delta E}$. Jednak, jak wcześniej wspomniano, wybraliśmy przyrost ΔE równy 1. Ciekawe jest to, jak prezentowałyby się przebieg funkcji gdyby przyrost energii nie był stały, a prawdopodobieństwo W_n przyjmowało losowe wartości.

Ważną rolę w niniejszej pracy spełnił program Mathematica firmy Wolfram Research. Był on podstawowym narzędziem służącym do wykonywania obliczeń i sporządzania wykresów. Program okazał się być wszechstronny i prosty w obsłudze. Aby przybliżyć wygląd środowiska Mathematica w rozdziale piątym opisano krok po kroku w jaki sposób były wykonywane obliczenia oraz wykresy. Program oferuje

oczywiście większe bogactwo funkcji, niż te wykorzystane tutaj, jednak ich opisowi należałoby poświęcić osobną pracę.

Powracanie od stanu pierwotnego po określonym czasie T_p jest również znane jako ożywienie kwantowe funkcji falowej [1]. Zjawisko to zostało eksperymentalnie zaobserwowane w różnych układach. Wczesne eksperymenty opierały się na badaniach atomów Rydberga [6][7][8]. Później zaobserwowano to w kondensacji Bosego-Einsteina [9] i w układzie o niskiej temperaturze z kilkoma atomami uwięzionymi w potencjale sieci optycznej [10]. W obu przypadkach stan kwantowy był spójny z superpozycją energii oraz liczbą stanów własnych. Ostatnio zjawisko ożywienia funkcji falowej zaobserwowano w innym układzie fizycznym: stanie kwantowym fotonu w wężyce QED [11] oraz dla funkcji falowych elektronów grafenu [12].

Możemy odnieść się również do niedawnej pracy [13] w której ożywienie kwantowe funkcji falowej jest badane przy użyciu klasycznych układów imitujących równania Shrödingera.

Możliwa perspektywa obliczeń przedstawionych w tej pracy jest sugerowana przez niektóre z prac doświadczalnych cytowanych wyżej [9][10][11].

Należy rozważyć przypadek gdy $N_{tot} \rightarrow \infty$, a współczynniki:

$$C_n = e^{-|\alpha|^2/2} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}, \quad (6.2)$$

gdzie α jest liczba zespoloną. Wybór ten odpowiada tzw. koherentnemu stanowi, którego średnia energia jest obliczana jako $|\alpha|^2$ [14].

Problem liczbowy połączony z tym przypadkiem wynika z granicy $N_{tot} \rightarrow \infty$. Z praktycznego punktu widzenia, konieczne jest uwzględnienie dużej liczby poziomów energetycznych. Inną ciekawą możliwością jest rozważanie poziomów energii które nie są jednakowo odległe od siebie. W szczególności, w przypadku w którym skoki energii są losowe, mogą naśladować rzeczywistą sytuację występującą w dużych atomach lub układach molekularnych. W takim przypadku oczekuje się, że stan kwantowy nie wróci dokładnie do tego samego stanu początkowego.

Ciekawym zastosowaniem ożywienia kwantowego funkcji falowej jest związane z badaniami dotyczącymi komputerów kwantowych [15]. Kontrola kubitów odgrywa ważną rolę w pracy nad powstawaniem komputerów kwantowych. Zjawisko ożywienia funkcji falowej oznacza, że stan kwantowy nie traci swoich kwantowych właściwości. Jest to niezbędne dla rozwoju tej dziedziny.

Podziękowania

Składam serdeczne podziękowania Panu dr hab. prof. UJK Francesco Giacosa za okazywaną cierpliwość i merytoryczną pomoc w trakcie przygotowywania pracy inżynierskiej.

Dziękuję Pani mgr inż. Milenie Piotrowskiej oraz Panu mgr Mateuszowi Piwnikowi za cenne wskazówki i okazane wsparcie podczas pisania pracy.

Bibliografia

- [1] https://pl.wikipedia.org/wiki/O%C5%BCywienie_kwantowe_funkcji_falowej
- [2] Wróblewski A.K., Zakrzewski J. A., "Wstęp do fizyki", tom 1, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1984.
- [3] Taylor J.R., "Mechanika klasyczna tom 2", Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2006.
- [4] Grzymkowski R., Kapusta A., Kuboszek T., Słota D., "Mathematica 6", Wydawnictwo Pracowni Komputerowej Jacka Skalmierskiego, 2008.
- [5] Shankar R., "Mechanika kwantowa", Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2006.
- [6] Rempe G., Walther H., Klein N., "Observation of quantum collapse and revival in a one-atom maser," *Physical Review Letters*, vol. 58, pp. 353–356, jan 1987.
- [7] J. Yeazell, M. Mallalieu, and C. Stroud, "Observation of the collapse and revival of a Rydberg electronic wave packet", *Physical Review Letters*, vol. 64, pp. 2007–2010, Apr. 1990.
- [8] J. Wals, H. Fielding, J. Christian, L. Snoek, W. van der Zande, H. van Linden van den Heuvell, "Observation of Rydberg wave packet dynamics in a Coulombic and magnetic field", *Physical Review Letters*, vol. 72, pp. 3783–3786, June 1994.
- [9] M. Greiner, O. Mandel, T.W. Haensch, I. Bloch, "Collapse and revival of the matter wave field of a Bose-Einstein condensate" *Nature* 419, 2002.
- [10] S. Will, T. Best, U. Schneider, L. Hackermueller, D. Luehmann, I. Bloch "Time-resolved observation of coherent multi-body interactions in quantum phase revivals", *Nature* 465 (2010).
- [11] G. Kirchmair, B. Vlastakis, Z. Leghtas, S. E. Nigg, H. Paik, E. Ginossar, M. Mirrahimi, L. Frunzio, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf, "Observation of

- quantum state collapse and revival due to the single-photon Kerr effect,” *Nature*, vol. 495, pp. 205–209, 2013.
- [12] V. Krueckl and T. Kramer, “Revivals of quantum wave packets in graphene,” *New Journal of Physics*, vol. 11, p. 093010, 2009.
- [13] M. Dubois, G. Lefebvre, P. Sebbah, "Quantum revival for elastic waves in thin plate", arXiv:1611.05202.
- [14] https://en.wikipedia.org/wiki/Coherent_states
- [15] I. Bahari, T. P. Spiller, S. Dooley, A. Hayes, F. McCrossan, “Collapse and revival of entanglement in qubits with big spin system”, arXiv:1612.06444