

# Ein effektives chirales Modell der QCD mit Vektormesonen, Dilaton und Tetraquarks: Physik im Vakuum und bei nichtverschwindender Dichte und Temperatur

Francesco Giacosa  
*Institut für Theoretische Physik*  
*Johann Wolfgang Goethe - Universität*  
*Max von Laue-Str. 1, D-60438 Frankfurt am Main, Deutschland*

## Zusammenfassung

Diese Arbeit befasst sich mit den Eigenschaften von Hadronen, die als gebundene Zustände von Quarks und Gluonen auftreten. Zunächst wird eine allgemeine Studie der hadronischen Modelle der QCD präsentiert: hierbei spielen Eigenschaften im Limes einer großen Zahl  $N_c$  von Quark Farbtransformationen und die Diskussion über die Zusammensetzung von Resonanzen eine wichtige Rolle. Mit Hilfe eines einfachen Modells werden auch einige komplexe Aspekte der niederenergetischen Hadronphysik diskutiert.

Nach dieser allgemeinen Beschreibung wird die explizite Konstruktion eines Modells mit den relevanten niederenergetischen Freiheitsgraden beschrieben: neben den üblichen pseudoskalaren und skalaren Mesonen werden auch die vektoriellen und axialvektoriellen Mesonen berücksichtigt. Überlegungen, die auf der Dilatationsinvarianz der QCD beruhen, erlauben, die Form des effektiven Modells zu vereinfachen: nur Terme mit (exakt) Dimension 4 dürfen auftreten. Als Nebenprodukt dieses Verfahrens ist der skalare Glueball automatisch in das chirale Modell eingeschlossen. Die Konstruktion des Modells ist ganz allgemein für eine beliebige Anzahl  $N_f$  von Quark-Flavors gültig. Resultate für den Fall  $N_f = 2$  werden hier ausführlich präsentiert.

Die Frage, ob auch zusätzliche mesonartige Zustände wie Tetraquarks berücksichtigt werden müssen, ist im Zentrum einer langjährigen wissenschaftlichen Debatte. Es ist durchaus möglich, dass die leichten skalaren Resonanzen gar keinen Quark-Antiquark-Konfigurationen entsprechen, sondern Tetraquark-Feldern. In dieser Arbeit wird die entsprechende mathematische Sprache für Tetraquark-Felder präsentiert, die ihre Einführung in das chirale Modell erlaubt. Die daraus entstehenden Mischungseffekte werden dargelegt.

Die Baryonen werden ebenfalls im Modell berücksichtigt. Die Entstehung der Nukleonmasse und die Frage über die Natur des chiralen Partners des Nukleons können im Rahmen des chiralen Modells beantwortet werden. Es wird gezeigt, dass nicht nur das chirale Kondensat, sondern auch das Gluon-Kondensat und womöglich das Tetraquark-Kondensat auf eine nicht vernachlässigbare Weise zur Nukleonmasse beitragen.

Als letzter Schritt werden erste Studien bei nicht-verschwindender Dichte und Temperatur durchgeführt. Dabei wird der Einfluss eines skalaren Tetraquarks auf den chiralen Phasenübergang untersucht. Die dichteabhängigen und temperaturabhängigen Mischungsprozesse, der Verlauf von Tetraquark- und Quarkonium-Kondensat und der Massen bei wachsender Dichte/Temperatur werden studiert.

Zuletzt werden die vielfältigen Ausblicke dieser Arbeit präsentiert.

# 1 Einleitung

Ein großer Teil des ‘Particle Data Group’ Buches [1] widmet sich einer Zusammenfassung der Eigenschaften von hadronischen Resonanzen. Viele Experimente sind notwendig gewesen, um Informationen über diese kurzlebigen ( $\tau \sim 10^{-20}$  s) Zustände zu gewinnen.

Die grundlegende Theorie, die Quantenchromodynamik (QCD), beschreibt Quarks und Gluonen, die die Bestandteile von Hadronen sind. Sie basiert auf einer exakten, lokalen  $SU_c(3)$  Farbgruppe, deren Eichfelder die acht Gluonen sind. Außerdem sind sechs Quarkflavors bekannt: die Flavors  $u, d, s$  sind die leichten Quarks mit nackten Quarkmassen  $m_u = 1.5\text{-}3.3$  MeV,  $m_d = 5\text{-}10$  MeV,  $m_s = 104^{+26}_{-34}$  MeV; die Flavors  $c, b, t$  sind die schweren Quarks mit nackten Quarkmassen  $m_c = 1.27^{+0.07}_{-0.11}$  GeV,  $m_b = 4.20^{+0.17}_{-0.07}$  GeV,  $m_t = 171.2 \pm 2.1$  GeV.

Trotz bedeutender theoretischer Fortschritte wurde die QCD analytisch nicht gelöst. Obwohl die Bewegungsgleichungen der Felder bekannt sind, erlaubt ihre Nicht-Linearität keine exakte Lösung. Überdies versagt im Niederenergiebereich auch die Störungstheorie, da die ‘laufende’ Kopplungskonstante wächst. Eine damit verbundene und zentrale, obwohl mathematisch nicht bewiesene, Eigenschaft der QCD ist Confinement<sup>1</sup>: nur ‘farblose’ Objekte (invariant unter einer  $SU_c(3)$ -Transformation) werden in der Natur realisiert. Farbige Zustände, wie Quarks und Gluonen, aber auch wie Diquarks, sind keine asymptotischen Zustände, die in einem Detektor gemessen werden können.

Die asymptotischen physikalischen Zustände sind die Hadronen, die in Mesonen und Baryonen eingeteilt werden. Um sie genau zu definieren, muss man beachten, dass jedes Quark eine Baryonenzahl  $B_q = 1/3$  und jedes Gluon hingegen eine Baryonenzahl  $B_g = 0$  trägt. Dann gilt die folgende Klassifizierung:

- Die Mesonen sind farblose Zustände, die eine Gesamtbaryonenzahl  $B = 0$  tragen. Quarkonia  $|\bar{q}q\rangle$ , wie z.B. die Pionen, sind Mesonen:  $B_{\bar{q}q} = B_q + B_{\bar{q}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$ . Es gibt aber andere Möglichkeiten: Gluebälle  $|gg\rangle$ , d.h. gebundene Zustände aus zwei (oder mehr) Gluonen, und Tetraquarks  $|(\bar{q}q)(qq)\rangle$ , die aus einem Diquark und einem Antidiquark bestehen, tragen auch  $B = 0$  und sind somit Mesonen. Nicht zuletzt gibt es mesonische Moleküle  $|(\bar{q}q)(\bar{q}q)\rangle$ , die gebundene Zustände aus zwei  $|\bar{q}q\rangle$  Objekten sind.
- Die Baryonen sind farblose Zustände, die eine Gesamtbaryonenzahl  $B = 1$  tragen. Zustände der Form  $|qqq\rangle$ , die aus drei Quarks bestehen wie z.B. das Proton, sind Baryonen. Auch in diesem Fall gibt es andere Möglichkeiten: Pentaquarks  $|(qq)(qq)\bar{q}\rangle$  (Diquark-Diquark-Antiquark), und Moleküle der Form  $|(qqq)(\bar{q}q)\rangle$  (bestehend aus drei Quarks und einem Quark-Antiquark).

Die Existenz von  $|\bar{q}q\rangle$  und  $|qqq\rangle$  gilt als erwiesen. Im Niederenergiebereich, in dem nur die leichten Quarks  $q = u, d, s$  berücksichtigt werden, gibt es Multipletts von Zuständen, die aus der approximierten Flavorsymmetrie folgen. Wenn die schweren Quarks  $q = c, b, t$  betrachtet werden, findet man auch die erwarteten Quark-Antiquark-Zustände. Dennoch gibt es sowohl für die leichten Quarks als auch für die schweren Quarks Objekte, die nicht in das ‘naive’ Quark-Antiquark-Bild passen. Die Frage, wie solche Objekte interpretiert werden und welche Rolle sie spielen, ist besonders spannend und aktuell. In dieser Arbeit wird die Aufmerksamkeit auf den mesonischen und baryonischen Niederenergiebereich für die Fälle  $N_f = 2$  und  $N_f = 3$  beschränkt, wobei  $N_f$  die Anzahl der berücksichtigten Flavors ist.  $N_f = 2$  bedeutet, dass nur die Quarks  $u$  und  $d$  berücksichtigt werden, so als ob das  $s$ -Quark sehr schwer wäre. Obwohl das nicht der realistische Fall ist, sind Studien für  $N_f = 2$  wichtig und wegweisend.  $N_f = 3$  bedeutet, dass all die leichten Quarks  $u, d$  und  $s$  mitgenommen werden. Die schweren Quarks

---

<sup>1</sup>Die mathematische Lösung dieses Problems wird mit einer Million Dollar belohnt, siehe die Webseite des Clay-Institutes: [http://www.claymath.org/millennium/Yang-Mills\\_Theory/](http://www.claymath.org/millennium/Yang-Mills_Theory/)

$c, b,$  und  $t$  sind schwer genug, um für die Zwecke der hadronischen Niederenergiephysik ( $\lesssim 2$  GeV) vernachlässigt zu werden.

Da die QCD analytisch (noch) nicht lösbar ist, ist die Benutzung von effektiven Methoden sowohl im Vakuum als auch bei endlicher Temperatur und Dichte notwendig, um eine theoretisch konsistente Beschreibung der hadronischen Resonanzen zu bekommen. Besonders wichtig ist die Frage, welche Kriterien ein effektives Modell erfüllen soll, das nicht nur  $|\bar{q}q\rangle$  und  $|qqq\rangle$  Zustände enthält, sondern auch einige von den oben aufgelisteten zusätzlichen Mesonen wie Tetraquarks und Gluebälle. Außerdem kann die Frage untersucht werden, wie diese zusätzlichen Felder die Physik bei endlicher Temperatur und Dichte beeinflussen. Ein wichtiges Ziel dieser Studie ist, die Resultate von Experimenten mit Schwerionenkollisionen besser zu verstehen und interpretieren.

Diese Arbeit beruht auf den Artikeln in Refs. [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11], die einen wichtigen Teil meiner Forschungsarbeiten in den letzten vier Jahren darstellen. Sie bietet die Möglichkeit, die verschiedenen Themen in einem einheitlichen Kontext zu präsentieren. Das wiederum erlaubt auch, neue Aspekte zu diskutieren und Ausblicke für künftige Projekte zu schildern.

Die Arbeit ist wie folgt strukturiert:

- Abschnitt 2 beruht auf [2, 3]: die Eigenschaften der QCD für  $N_c \gg 3$ , wobei  $N_c$  die Farbanzahl ist (Large- $N_c$  Limes), werden zusammengefasst und eine allgemeine Diskussion über die Form einer hadronischen Theorie der QCD und über die dynamische Generierung von Resonanzen wird präsentiert.
- Abschnitt 3 beruht auf [4, 5]: die Zusammenfassung der QCD-Eigenschaften und ihre Anwendung zur Erstellung einer mesonischen Theorie, die sowohl (pseudo)skalare als auch (axial)vektorielle Mesonen enthält, wird dargelegt. Überdies wird das skalare Dilaton/Glueball-Feld vom Anfang an eingekoppelt. Unterschiedliche Zuordnungen der skalaren Resonanzen werden untersucht.
- Abschnitt 4 beruht auf [6, 7, 8]: Die Eigenschaften von Diquarks und von Tetraquarks werden zusammengefasst. Tetraquark-Felder werden in das chirale Modell eingebaut und beschreiben zusätzliche Skalarfelder.
- Abschnitt 5 beruht auf [9, 10]: das Nukleon und sein chiraler Partner werden eingeführt. Der Ursprung der Nukleonenmasse wird beschrieben. Die mögliche Rolle eines leichten Tetraquark-Feldes für Kernmaterie wird diskutiert. Erste Resultate bei nicht verschwindender Dichte werden präsentiert.
- Abschnitt 6 beruht auf [11]: der chirale Phasenübergang bei wachsender Temperatur wird für eine vereinfachte Form des Modells studiert, wobei das Tetraquark die leichteste skalare Resonanz beschreibt. Die Konsequenzen dieses Szenarios für die thermodynamischen Eigenschaften des Systems werden dargelegt.
- Abschnitt 7: die Zusammenfassung der Arbeit und Ausblicke werden präsentiert.

Zuletzt ist eine Anmerkung über die Referenzen wichtig: es werden einige relevante Artikel im Laufe dieser Arbeit zitiert, jedoch wird auf die Referenzen in Refs. [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11] verwiesen, um eine vollständige Liste der Arbeiten über die diskutierten Themen zu bekommen.

## 2 Allgemeine Diskussion über hadronische Theorien: der Large- $N_c$ Limes und die dynamische Generierung/Rekonstruktion der Resonanzen

### 2.1 Die Suche nach einer hadronischen Theorie und der Large- $N_c$ Limes

In diesem Abschnitt wird das Problem der Konstruktion hadronischer Theorien ganz allgemein beschrieben.

Die Lagrange-Dichte der QCD als Funktion der acht Gluon-Felder  $A_\mu^a$  und der  $N_f$  Quark-Felder  $q_i$  mit entsprechenden Quarkmassen  $m_i$  ( $i = 1, \dots, N_f$ ) lautet

$$\mathcal{L}_{QCD} = \sum_{i=1}^{N_f} \bar{q}_i (i\gamma^\mu D_\mu - m_i) q - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{a,\mu\nu}, \quad D_\mu = \partial_\mu - ig_0 A_\mu^a t^a, \quad (1)$$

wobei die Größe  $G_{\mu\nu}^a$  der gluonische Feld-Tensor ist:

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g_0 f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad a, b, c = 1, \dots, 8. \quad (2)$$

Der Parameter  $g_0$  beschreibt die Quark-Gluon- und Gluon-Gluon-Wechselwirkungen. Die Matrizen  $t^a$  lauten  $t^a = \lambda^a/2$ , wobei  $\lambda^a$  die üblichen Gell-Mann-Matrizen sind. Die Konstanten  $f^{abc}$  sind die Strukturkonstanten der Gruppe  $SU(3)$ . Es sei angemerkt, dass, im sogenannten ‘chiralen Limes’  $m_i = 0$ , der dimensionslose Parameter  $g_0$  der einzige Parameter der QCD-Lagrange-Dichte ist.

Die Lagrange-Dichte in Gl. (1) ist invariant unter den lokalen Farbtransformationen der Eichgruppe  $SU(3)_c$  und, im chiralen Limes  $m_i = 0$ , unter den globalen chiralen Transformationen der Gruppen  $SU(N_f)_R \times SU(N_f)_L$ . Die genaue mathematische Diskussion dieser Symmetrien, mit besonderer Aufmerksamkeit auf die chirale Symmetrie, wird in Abschnitt 3.2 präsentiert.

Wie in der Einführung schon erwähnt, wurden die Felder der QCD Lagrange-Dichte (Quarks und Gluonen) nicht direkt gemessen und können wegen des Confinement auch prinzipiell nicht gemessen werden. Man soll also eine effektive Theorie erstellen, die die messbaren hadronischen Teilchen als Freiheitsgrade enthält. Das wiederum wirft die folgende Frage auf: Welche Felder sollten ein effektives Modell der QCD bilden? Welche Zustände sollte man hingegen als dynamisch generierte Zustände betrachten? Das ist in den letzten Jahren ein besonders wichtiges und häufig diskutiertes Thema der hadronischen Forschergemeinde.

Die Frage kann ganz allgemein wie folgt formuliert werden: wie soll man aus der QCD-Lagrange-Dichte  $\mathcal{L}_{QCD}$  eine konsistente Theorie  $\mathcal{L}_{had}$  mit hadronischen Freiheitsgraden konstruieren?

$$\mathcal{L}_{QCD} \xrightarrow{?} \mathcal{L}_{had}. \quad (3)$$

Das ist generell nicht bekannt. Es gibt aber einen wichtigen Limes, in dem das, obwohl nur ansatzweise, möglich ist. Wenn man anstatt mit der Farbgruppe  $SU_c(3)$  mit der erweiterten Gruppe  $SU_c(N_c)$  arbeitet, finden besondere Vereinfachungen im Limes  $N_c \rightarrow \infty$  statt<sup>2</sup>. Das ist der sogenannte ‘Large- $N_c$ ’ Limes der QCD, der u.a. von ’t Hooft und Witten entwickelt wurde [12, 13]. Die Tatsache, dass die QCD im Niederenergiebereich eine stark gekoppelte Theorie ist, wo keinerlei störungstheoretische Methoden anwendbar sind, war der Grund und der Anreiz für die Suche nach neuen Entwicklungsschemen. Der daraus entstandene Large- $N_c$  Limes wurde in vielen Bereichen der QCD in den letzten 30 Jahren benutzt und spielt weiter eine fundamentale Rolle in der Modellbildung und im Verständnis der fundamentalen Eigenschaften der QCD.

<sup>2</sup>Dazu muss auch angenommen werden, dass  $g_0$  wie  $N_c^{-1/2}$  skaliert. Das ist aber eine natürliche Annahme, wie im folgenden Abschnitt erklärt wird.

Das Verhalten der relevanten Größen im Large- $N_c$  Limes wird zusammengefasst:

- Quark-Antiquark- und Glueball-Mesonmassen sind konstant für  $N_c \rightarrow \infty$ :

$$M_{|\bar{q}q\rangle} \propto N_c^0, \quad M_{|gg\rangle} \propto N_c^0.$$

Es ist eine wichtige Eigenschaft, dass die Massen von Quarkonia und Gluebällen  $N_c$ -unabhängig sind.

- Die Wechselwirkungsamplitude zwischen  $n$  Quarkonia  $|\bar{q}q\rangle$  skaliert wie

$$A_{n-|\bar{q}q\rangle} \propto N_c^{-\frac{n-2}{2}}.$$

Das bedeutet, dass die Amplitude für eine  $n$ -Meson-Streuung kleiner und kleiner für wachsende Farbzahl  $N_c$  wird. Ein konkretes und wichtiges Beispiel ist die Zerfallsamplitude für ein Quark-Antiquark-Meson, das in zwei Quark-Antiquark-Mesonen zerfällt. Diese Situation entspricht dem Fall  $n = 3$ , d.h.  $A_{\text{Zerfall}} \propto N_c^{-1/2}$ . Das wiederum impliziert, dass die Breite  $\Gamma \propto 1/N_c$  skaliert. Quark-Antiquark-Zustände werden schmaler für hohes  $N_c$ .

- Die Wechselwirkungsamplitude zwischen  $n$  Gluebällen  $|gg\rangle$  skaliert wie

$$A_{n-|gg\rangle} \propto N_c^{-(n-2)}.$$

Diese Amplitude ist im Large- $N_c$  Limes noch mehr unterdrückt als die Wechselwirkung zwischen Quark-Antiquark-Resonanzen.

- Eine gemischte Wechselwirkungsamplitude zwischen  $n$  Quark-Antiquark-Zuständen und  $m$  Gluebällen skaliert wie

$$A_{(n-|\bar{q}q\rangle)(m-|gg\rangle)} \propto N_c^{-(\frac{n}{2}+m-1)} \text{ für } n \geq 1 \text{ und } m \geq 1.$$

Das ist die allgemeinste Skalierung für Gluebälle und Quarkonia. Die Mischung zwischen einem Glueball und einem Quarkonium entspricht dem Fall  $n = m = 1$ , d.h.  $A_{\text{Mischung}} \propto N_c^{-1/2}$ . Das bedeutet, dass auch die Mischung zwischen Gluebällen und Quarkonia für  $N_c \gg 1$  unterdrückt ist.

- Die Baryonen bestehen aus  $N_c$  Quarks für ein beliebiges  $N_c$ . Nur auf diese Weise kann man weiße baryonische Feldkonfigurationen konstruieren. Als Konsequenz wächst die Masse eines Baryons mit  $N_c$ :

$$M_B \propto N_c.$$

- Die Tetraquarks, im Sinne von vier-Quark Zuständen, ‘verschwinden’ im Large- $N_c$  Limes. Dennoch ist ein anderer Limes möglich, in dem die Tetraquarks als Multiquark-Objekte im Large- $N_c$  Limes interpretiert werden. Die genaue Beschreibung wird in Abschnitt 4 präsentiert.

Ganz allgemein suchen wir die effektive Theorie  $\mathcal{L}_{had}(N_c, E_{\max})$  der QCD, wobei  $N_c$  die Anzahl der Farben ist und  $E_{\max}$  die maximale Energie ist, bei der die effektive Theorie gültig ist. Im Prinzip könnte man die effektive hadronische Theorie für  $E_{\max} \simeq M_{Planck}$  suchen (d.h. bis zur Gültigkeitsgrenze der QCD selbst<sup>3</sup>), aber man ist in der Regel nur an niederenergetischen Resonanzen, die eine Masse kleiner als  $E_{\max} \simeq 2 \text{ GeV}$  besitzen, interessiert. (Folgende Nebenbemerkung ist interessant: wenn  $\mathcal{L}_{had}(E_{\max} \simeq M_{Planck}, N_c)$  bekannt wäre, dann wäre es möglich, jedes  $\mathcal{L}_{had}(E_{\max}, N_c)$  bei einer beliebigen Energie  $E_{\max}$  durch Ausintegrieren aller Felder, die schwerer als  $E_{\max}$  sind, zu bestimmen.)

Im Large- $N_c$  Limes,  $N_c \gg 1$ , besteht die Theorie  $\mathcal{L}_{had}(E_{\max}, N_c \gg 1)$  aus freien Quarkonium-Feldern  $\phi_k$  und freien Glueball-Feldern  $G_h$  bis zu einer vorgegeben maximalen Energie  $E_{\max}$ :

$$\mathcal{L}_{had}(E_{\max}, N_c \gg 1) = \sum_{k=1}^{N_{\bar{q}q}} \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_k)^2 - \frac{1}{2} M_{\bar{q}q,k}^2 \phi_k^2 \right] + \sum_{h=1}^{N_{gg}} \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu G_h)^2 - \frac{1}{2} M_{G,h}^2 G_h^2 \right], \quad (4)$$

<sup>3</sup>Es wird hier angenommen, dass das Standardmodell bis  $M_{Planck}$  gültig ist. Es könnte auch sein, dass die Grenze kleiner ist und mit  $E_{GUT} \simeq 10^{16} \text{ GeV}$  übereinstimmt. (Laut modernen Theorien könnte die Energiegrenze sogar 1 TeV sein). Das ändert nicht die Diskussion dieser Arbeit, wo nur niederenergetische Prozesse berücksichtigt werden.

wobei nur die Zustände mit Masse  $\lesssim E_{\max}$  berücksichtigt wurden. Es ist auffällig, dass Baryonen *nicht* auftreten, da ihre Masse für  $N_c \gg 1$  sicherlich größer als  $E_{\max}$  ist. Unterhalb der maximalen Energie  $E_{\max} \simeq 2$  GeV befinden sich mit Sicherheit die Quark-Antiquark-Felder mit Quantenzahlen  $J^{PC} = 0^{-+}, 0^{++}, 1^{--}, 1^{++}$ , d.h. pseudoskalare, skalare, vektorielle und axialvektorielle Quarkonium-Mesonen. Außerdem wird auch ein skalarer  $0^{++}$  Glueball mit einer Masse von etwa 1.5 GeV erwartet: das ist eine klare und wohldefinierte Vorhersage von QCD-Computersimulationen auf dem Gitter [14]. Für  $N_c = 3$  sind die Wechselwirkungen zwischen Mesonen nicht vernachlässigbar. Die Lagrange-Dichte für  $N_c = 3$  lautet

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{had}(E_{\max}, N_c = 3) = & \\ & \sum_{k=1}^{N_{\bar{q}q}} \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_k)^2 - \frac{1}{2} M_{\bar{q}q,k}^2 \phi_k^2 \right] + \sum_{h=1}^{N_{gg}} \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu G_h)^2 - \frac{1}{2} M_{G,h}^2 G_h^2 \right] \\ & + \mathcal{L}_{int}^{\bar{q}q-gg}(E_{\max}, N_c = 3) + \mathcal{L}_{new-mes}(E_{\max}, N_c = 3) + \mathcal{L}_{bar}(E_{\max}, N_c = 3), \end{aligned} \quad (5)$$

wobei folgendes gilt:

- (i)  $\mathcal{L}_{int}^{\bar{q}q-gg}(E_{\max}, N_c = 3)$  beschreibt die Wechselwirkung zwischen den Quarkonia und Gluebällen. Wegen der oben aufgeführten Large- $N_c$  Eigenschaften gilt  $\mathcal{L}_{int}^{\bar{q}q-gg}(E_{\max}, N_c) \propto O(1/N_c)$ .
- (ii)  $\mathcal{L}_{new-mes}(E_{\max}, N_c = 3)$  enthält die kinetischen und Wechselwirkungsterme von zusätzlichen Mesonen, die bei  $N_c = 3$  eine Masse unterhalb von  $E_{\max}$  haben. Ein explizites Beispiel für solche Felder wird in Abschnitt 4 diskutiert. Dieser Term der Lagrange-Dichte verschwindet schneller als  $O(1/N_c)$  im Large- $N_c$  Limes.
- (iii)  $\mathcal{L}_{bar}(E_{\max}, N_c = 3)$  beschreibt die kinetischen Terme und die Meson-Baryon Wechselwirkungen, die bei  $N_c = 3$  eine Masse kleiner als  $E_{\max}$  besitzen.

Wir kommen jetzt zu der Frage, ob auch mesonische Moleküle und/oder Tetraquarks in das effektive Modell durch den Term  $\mathcal{L}_{new-mes}(E_{\max}, N_c = 3)$  eingeführt werden sollten. Die Antwort ist unterschiedlich und wird in den folgenden Unterabschnitten besprochen.

## 2.2 Mesonische Moleküle sollten *nicht* als Freiheitsgrade in $\mathcal{L}_{had}(E_{\max}, N_c = 3)$ auftreten

Um zu verstehen, warum mesonische Moleküle nicht in  $\mathcal{L}_{had}(E_{\max}, N_c)$  auftreten sollten, ist es zunächst instruktiv, den nichtheadronischen Fall der Quanten-Elektrodynamik (QED) zu diskutieren.

Die Lagrange-Dichte der QED besteht aus zwei Feldern: das Elektron und das Photon. Das Energie-Intervall, in dem die Theorie gültig ist, ist sehr groß: zwischen null und der Planckmasse. Bei einer Energie von etwa  $2m_e$  gibt es zusätzliche Zustände: die Positronia. Diese Resonanzen sind nicht elementar, sondern gebundene, molekülartige Zustände, die aus einem Elektron und einem Positron bestehen. Theoretisch können Positronia mit Hilfe der Bethe-Salpeter-Gleichung beschrieben werden. Positronia sind nicht direkt in der QED-Lagrange-Dichte enthalten und sind keine Elementarteilchen. Sie sind dynamisch generierte Resonanzen, die aus der Wechselwirkung zwischen den in der Lagrange-Dichte vorhandenen Elektron- und Photonfeldern entstehen.

Das Deuteron stellt eine ähnliche physikalische Situation dar. Das Deuteron besteht aus einem Proton und einem Neutron. Wenn man also eine Theorie erstellt, sollte man nur das Proton und das Neutron, und eventuell Austauschpartikel wie Pionen, berücksichtigen. Das Deuteron tritt als ein gebundener Zustand auf, der keinem Feld des Lagrangians entspricht<sup>4</sup>.

<sup>4</sup>Es ist eigentlich schon möglich, eine Lagrange-Dichte hinzuschreiben, in der das Deuteron und seine Konstituenten, das Proton und das Neutron, gleichzeitig auftreten. Jedoch muss man die sogenannte Zusammensetzungsbedingung einführen, die sicherstellt, dass das Deuteron kein elementares Teilchen der Theorie ist. Für eine genauere Diskussion siehe Ref. [2].

Diese Beispiele zeigen, was man im Grunde unter einem ‘dynamisch generierten Feld’ versteht. Es ist dann klar, dass Meson-Meson-Moleküle nicht direkt in  $\mathcal{L}_{had}$  auftreten sollten, da sie ganz analog dem Positronium oder dem Deuteron sind. Molekülartige mesonische Zustände entstehen, falls sie existieren, durch die Large- $N_c$  unterdrückten Wechselwirkungsterme der Lagrange-Dichte  $\mathcal{L}_{int}^{\bar{q}q-gg}(E_{\max}, N_c = 3)$ . Genau wie im QED-Fall muss man die Bethe-Salpeter-Gleichung für Meson-Meson Streuung lösen und prüfen, ob gebundene (oder quasi-gebundene) Zustände entstehen. Solche mesonischen Moleküle verschwinden im Large- $N_c$  Limes, da  $\mathcal{L}_{int}^{\bar{q}q-gg}(E_{\max}, N_c = 3)$  kleiner und kleiner wird. Die Anziehungskraft ist für  $N_c \gg 1$  nicht ausreichend, um solche Zustände zu generieren.

Es gibt eine wichtige Bedingung, die mit der möglichen Entstehung eines mesonischen Moleküls betrachtet werden muss: die Masse des neu entstandenen Zustands muss kleiner als  $E_{\max}$  sein, damit man über eine ‘dynamisch generierte’ Resonanz sprechen kann. Die Energie  $E_{\max}$  ist nämlich die maximale Energie, bei der die hadronische effektive Theorie gültig ist. Wenn die Molekülmasse  $E_{\max}$  überschreitet, liegt dieser generierte Zustand nicht innerhalb der Gültigkeit der Theorie. Es kann keine Aussage über die Natur dieses Objektes gemacht werden, siehe Abschnitt 2.5 für eine explizite Rechnung.

### 2.3 Tetraquarks sollten als Freiheitsgrade in $\mathcal{L}_{had}(E_{\max}, N_c = 3, )$ auftreten

Ein Tetraquark kann *nicht* durch Meson-Meson-Wechselwirkungen erzeugt werden, weil die Farbstruktur eines Tetraquarks irreduzibel ist<sup>5</sup>. Ein Tetraquark besteht aus zwei farbigen Diquarks, die ein farbloses Objekt bilden, und nicht –wie die vor kurzem besprochenen mesonischen Moleküle– aus zwei farblosen Bestandteilen.

Im Gegensatz dazu beschreibt die Lagrange-Dichte  $\mathcal{L}_{int}^{\bar{q}q-gg}(E_{\max}, N_c = 3)$  die Wechselwirkungen zwischen farblosen Quarkonia und Gluebällen. Ein daraus entstehender Zustand besteht aus zwei (oder mehr) weißen Objekten (d.h., ist farb-reduzibel) und ist daher kein Tetraquark.

Man kann folgern, dass die Tetraquarks direkt in  $\mathcal{L}_{new-mes}(E_{\max}, N_c = 3)$  eingeschlossen werden müssen, vorausgesetzt, dass ihre Masse kleiner als  $E_{\max}$  ist. Die Frage ist dann eher phänomenologischer Natur: sind die Tetraquarks leicht und schmal genug, um gemessen zu werden? Oder sind die (meisten) Tetraquarks so breit, dass sie im Kontinuum verschwinden? Wie später diskutiert, trifft die letzte Bemerkung zu: die meisten Tetraquarks sind zu breit, um gemessen zu werden. Es gibt eine mögliche, aber potentiell sehr wichtige, Ausnahme: die leichten skalaren Tetraquarks mit einer Masse kleiner als 1 GeV.

Im Large- $N_c$  Limes verschwinden alle Tetraquarks. Es gibt jedoch eine Möglichkeit, eine konsistente und wohldefinierte Verallgemeinerung eines Tetraquarks zu bestimmen, die im Large- $N_c$  Limes überlebt. Die Details werden in Abschnitt 4 beschrieben.

Diese Konzepte gelten nicht nur für Tetraquarks, sondern allgemein für jedes nicht farb-reduzible Objekt, wie Pentaquarks, Hexaquarks, usw. Wenn solche Zustände existieren, sollten sie direkt in der Lagrange-Dichte auftreten.

### 2.4 Niederenergetische effektive Theorien und Unitarisierungen

Oft ist man nur an physikalischen Prozessen interessiert, die im Niederenergiebereich stattfinden. Man muss dafür die Lagrange-Dichte  $\mathcal{L}_{had}(E_{\max}, N_c = 3)$  für eine kleine Energie  $E_{\max}$  bestimmen. Wegen der sogenannten spontanen Brechung der chiralen Symmetrie gibt es leichte Quark-Antiquark-Mesonen, die drei Pionen, die eine Masse  $M_\pi = 139$  MeV besitzen. Die anderen Hadronen sind wesentlich

<sup>5</sup>Es sei bemerkt, dass die Farbstruktur eines Tetraquarks nicht lokal ist. Das Diquark und das Anti-Diquark sind selbst nicht punktförmig, liegen nämlich auseinander und ziehen sich auf eine ähnliche Art wie Quark und Antiquark an. Im lokalen Limes wäre es durchaus möglich, die Farbstrukturen von Quarkonia und Tetraquarks ineinander zu transformieren. Das entspricht aber nicht der physikalischen Situation.

schwerer als 200 MeV. Wenn man also  $E_{\max} = E_{\chi PT} \simeq 300$  MeV setzt, enthält die Lagrange-Dichte  $\mathcal{L}_{had}(N_c = 3, E_{\max} \simeq 300 \text{ MeV})$  nur die drei Pionfelder

$$\mathcal{L}_{\chi PT} = \mathcal{L}_{had}(E_{\max} = E_{\chi PT}, N_c = 3) = \sum_{k=1}^3 \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \pi_k)^2 - \frac{1}{2} M_\pi^2 \pi_k^2 \right] + \mathcal{L}_{int}^\pi, \quad (6)$$

wobei  $\mathcal{L}_{int}^\pi$  die Wechselwirkung zwischen den Pionen beschreibt. Dies ist die Lagrange-Dichte der chiralen Störungstheorie ( $\chi PT$ ) [15]. Der Term  $\mathcal{L}_{int}^\pi$  enthält Operatoren, die aus Symmetrie-Überlegungen bestimmt werden können. Jedoch ist die Bestimmung der entsprechenden Kopplungskonstanten (die sogenannten ‘Low Energy Constants’, LECs) theoretisch nicht möglich. Diese Konstanten werden durch Vergleich mit den experimentellen Resultaten festgelegt. Es ist möglich,  $\mathcal{L}_{int}^\pi$  als Summe von Termen mit anwachsender Anzahl von Ableitungen des Pion-Feldes auszudrücken. Je höhere Ableitungen mitgenommen werden, desto größer ist die Anzahl von Termen und von unbekanntem LECs. Obwohl es prinzipiell möglich ist, bis zu einer beliebigen Ordnung zu gehen, ist die Benutzung der  $\chi PT$  von einem praktischen Standpunkt für die niedrigsten Ordnungen möglich.

Die Lagrange-Dichte  $\mathcal{L}_{had}(N_c = 3, E_{\max})$  für  $E_{\max} > 400$  MeV enthält nicht nur Pionen, sondern auch die Mesonen und Baryonen, die leichter als  $E_{\max}$  sind. Wenn man zum Beispiel  $E_{\max} \simeq 1$  GeV setzt, erhält man eine Lagrange-Dichte, die im Meson-Sektor außer den pseudoskalaren Mesonen auch die Vektormesonen enthält:

$$\mathcal{L}_{had}(E_{\max} \simeq 1 \text{ GeV}, N_c = 3) = \mathcal{L}_{\chi PT+VM}. \quad (7)$$

$\mathcal{L}_{\chi PT+VM}$  beschreibt die freien Teilchen und die gegenseitige Wechselwirkung [16]. Auch in diesem Fall ist es möglich, die Operatoren zu bestimmen, jedoch nicht die LECs. (Die skalaren Mesonen werden hier vernachlässigt, siehe die Diskussion in den nächsten Kapiteln).

Wenn  $\mathcal{L}_{had}(E_{\max} \simeq 2 \text{ GeV}, N_c = 3)$  bekannt ist, kann  $\mathcal{L}_{\chi PT}$  (oder  $\mathcal{L}_{\chi PT+VM}$ ) aus  $\mathcal{L}_{had}(E_{\max} \simeq 2 \text{ GeV}, N_c = 3)$  bestimmt werden, indem man alle Felder, die schwerer als  $E_{\chi PT} \simeq 300$  MeV (oder  $E_{\chi PT+VM} \simeq 1$  GeV) sind, ausintegriert. Ganz allgemein: die Kenntnis einer effektiven Theorie mit höherer Gültigkeitsgrenze erlaubt, eine effektive Theorie mit niedrigerer Gültigkeitsgrenze zu bestimmen.

Die Kenntnis von  $\mathcal{L}_{\chi PT}$  erlaubt hingegen nicht,  $\mathcal{L}_{had}(E_{\max} > E_{\chi PT}, N_c = 3)$  eindeutig zu bestimmen: die Extrapolation einer effektiven Theorie mit einer kleinen Gültigkeitsenergie zu einer anderen Theorie mit einer größeren Gültigkeitsenergie ist nicht eindeutig. Dennoch ist es möglich, aus einer Theorie mit einer maximalen Energie  $E_{\max}$  Information außerhalb dieser Energie zu gewinnen. Es gibt sogenannte Unitarisierungsmethoden, d.h. ‘Extrapolationen’, die erlauben, Einsichten und Eigenschaften jenseits des Gültigkeitsbereichs  $E_{\max}$  zu bekommen. Obwohl im Prinzip unendlich viele solche Methoden existieren, wurden bessere mathematische Verfahren in diesem Zusammenhang entwickelt. Wir beschreiben kurz drei solcher Methoden. (Eine vollständige und rigorose Beschreibung dieses Problems ist in den Referenzen von Ref. [2] präsentiert.)

Sei  $S = 1 + iT$  die S-Matrix für den Streuprozess zweier Teilchen  $a + b \rightarrow a + b$ . Wegen der Unitarität der S-Matrix gilt:  $S^\dagger S = 1$ .

(i) *K*-Matrix Unitarisierung.

Die *T* Matrix kann als Reihe in der Kopplungskonstante  $\alpha$  entwickelt werden:

$$T(n) = a_1 \alpha + a_2 \alpha^2 + \dots + a_n \alpha^n + O(\alpha^{n+1}).$$

Die S-Matrix  $S = 1 + iT(n)$  ist dann nur bis zur Ordnung  $n$  unitär. Man kann aber  $S$  wie folgt unitarisieren:

$$S = 1 + iT(n) \Rightarrow S_K = \frac{1 + \frac{i}{2}T(n)}{1 - \frac{i}{2}T(n)}.$$



Dadurch wird die Unitarität von  $S_K$  erzwungen. Der Ausdruck  $S_K$  enthält auch Terme  $\alpha^{m>n}$ : das bedeutet, dass man über die ursprüngliche Gültigkeit hinausgeht. Verschiedene Variationen dieser Unitarisierung werden in Ref. [17] beschrieben.

(ii) Bethe-Salpeter-Unitarisierung.

Sei  $T = T(1) = a_1\alpha$ . Die Bethe-Salpeter-Unitarisierung erfolgt durch eine Resummation der Schleifen-Diagramme:

$$T_{BS} = T(1) + T(1)KT(1) + \dots = \frac{T(1)}{1 - K \cdot T(1)} ,$$

wobei  $K$  die sogenannte Schleifen-Funktion ist und explizit vom Impuls  $p^2 = s$  abhängt. Der Prozess gilt natürlich auch, wenn  $T = T(n)$  bis zu einer höheren Ordnung  $n$  bekannt ist. Für eine genauere Diskussion dieser Methode siehe z.B. Ref. [18] und Referenzen darin. Ein explizites Beispiel wird in Abschnitt 2.5 diskutiert.

(iii) IAM-Unitarisierung.

Man braucht die störungstheoretische Form bis (mindestens) Ordnung zwei,

$$T(n=2) = a_1\alpha + a_2\alpha^2 \rightarrow T_1 = a_1\alpha, T_2 = a_2\alpha^2 .$$

Die unitarisierte Form lautet (die Kanäle  $t$  und  $u$  werden vernachlässigt):

$$T_{\text{IAM}} \simeq T_1 (T_1 - T_2 - iT_1\sigma T_1)^{-1} T_1 ,$$

wobei  $\sigma = \sqrt{\frac{p^2}{4} - m^2}$  und  $m$  die Masse aller Teilchen ist. Es ist wichtig zu beachten, dass diese Methode nur für  $n \geq 2$  anwendbar ist. Zahlreiche Anwendungen dieser Unitarisierung sind in Refs. [19] zu finden.

Ein wichtiges Beispiel für diese Konzepte stammt aus dem schwachen Sektor des Standardmodells.

- Im schwachen Sektor des Standardmodells gibt es das nahezu masselose Neutrino, das leichte Elektron und, aufgrund der spontanen Symmetriebrechung im Higgs-Sektor, das schwere  $W$ -Boson ( $M_W \sim 80$  GeV). Das  $W$ -Boson verursacht die Neutrino-Elektron-Wechselwirkung. Da das  $W$ -Boson so schwer ist, kann es ausintegriert werden. Man kann eine effektive Theorie erstellen, in der nur das Elektron und das Neutrino auftreten. Das ist die berühmte Fermi-Theorie der schwachen Wechselwirkung:

$$\mathcal{L}_F = \frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{\psi}_{\nu_e} \gamma^\mu (1 + \gamma^5) \psi_e]^2 ,$$

wobei  $\psi_e$  das Elektron und  $\psi_{\nu_e}$  das Neutrino beschreibt. Die Kopplungskonstante  $G_F \sim 1/M_W^2$  stammt von der Propagation eines virtuellen  $W$ -Bosons. Der Gültigkeitsbereich dieser Theorie ist natürlich dadurch beschränkt, dass die Ausintegration des  $W$ -Bosons stattgefunden hat. Die maximale Energie  $E_{\text{max}}$  ist somit wesentlich kleiner als  $M_W$ .

- Man stelle sich vor, nur die niederenergetische Fermi-Theorie  $\mathcal{L}_F$  wäre bekannt. Kein  $W$ -Teilchen ist im Fermi-Lagrangian enthalten. Ist es möglich, auf die Existenz des  $W$ -Bosons nur aus dieser begrenzten Information zu schließen? Die Antwort ist positiv: durch (eine) Unitarisierung.

- Eine mögliche Unitarisierungsmethode besteht darin, eine Bethe-Salpeter-Gleichung für die Neutrino-Elektron-Streuung zu studieren. Obwohl das Resultat von einem physikalischen Cutoff abhängt (das ist ja zu erwarten, da die Fermi-Theorie nicht renormierbar ist) kann man tatsächlich aus der Elektron-Neutrino-Wechselwirkung ein  $W$ -Teilchen erzeugen. Man kann somit aus der Fermi-Theorie die Existenz des  $W$ -Bosons deduzieren. Wegen der Natur der BS-Gleichung könnte man auf die Idee kommen, das erzeugte  $W$ -Teilchen als einen gebundenen Zustand aus einem Elektron und einem Neutrino zu

interpretieren. Das ist aber offensichtlich falsch, da das  $W$ -Boson ein ‘fundamentales’ Teilchen ist. Dieses Beispiel zeigt, dass Vorsicht angebracht ist, wenn Unitarisierungsmethoden benutzt werden, um die Natur eines Teilchens zu interpretieren.

## 2.5 Ein konkretes Beispiel mit Hilfe eines einfachen Modells

In diesem Abschnitt wird ein einfaches Modell diskutiert, in dem all die vorherigen Themen anhand von Gleichungen besprochen werden können.

Man berücksichtigt eine einfache Lagrange-Dichte  $\mathcal{L}_{\text{toy}}$  (wobei ‘toy’ aus dem englischen Ausdruck ‘toy model’ stammt) mit zwei Feldern  $\varphi$  (mit Masse  $m$ ) und  $S$  (mit Masse  $M_0 > 2m$ ). Eine Large- $N_c$  Abhängigkeit wird eingeführt, damit beide Felder sich wie ‘Quark-Antiquark Felder’ verhalten. Die Idee ist einfach: das Feld  $S$  wird zuerst ausintegriert, um eine ‘effektive’ Lagrange-Dichte  $\mathcal{L}_{\text{le}}$  zu bekommen, die nur vom Feld  $\varphi$  abhängt. Dann können wir uns fragen, ob das Feld  $S$ , das ausintegriert wurde, durch Unitarisierungsmethoden wiedererzeugt werden kann. Man kann sich auch fragen, was man über diese Resonanz  $S$  erfahren kann, wenn nur die niederenergetische Lagrange-Dichte bekannt wäre.

Die Lagrange-Dichte lautet [2, 3]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{toy}}(E_{\text{max}}, N_c) = & \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu S)^2 - \frac{1}{2} M_0^2 S^2 \\ & + g(N_c) S \varphi^2 - \frac{g(N_c)^2}{2M_0^2} \varphi^4 \ , \end{aligned} \quad (8)$$

wobei die Large- $N_c$  Abhängigkeit durch  $g(N_c) = g_0 \sqrt{3/N_c}$  ausgedrückt wird. Durch diese Wahl sind beide Massen  $N_c$ -unabhängig.

Die Wechselwirkung besteht aus zwei Termen: eine  $S\varphi^2$  Wechselwirkung zwischen den zwei Feldern  $S$  und  $\varphi$  und eine  $\varphi^4$ -Selbstwechselwirkung des  $\varphi$ -Feldes, deren Bedeutung später klar wird.

Der  $S\varphi^2$ -Term generiert den Zerfall des Feldes  $S$ . Die Zerfallsbreite für den Prozess  $S \rightarrow 2\varphi$  lautet

$$\Gamma = \frac{\sqrt{\frac{M_0^2}{4} - m^2}}{8\pi M_0^2} \left[ \sqrt{2}g(N_c) \right]^2 \ . \quad (9)$$

$\Gamma$  skaliert wie  $g^2(N_c) \sim 1/N_c$ , genau als ob  $\varphi$  und  $S$  Quarkonia wären. Es wird angenommen, dass die Lagrange-Dichte (8) bis zu einer hohen Energie gültig ist ( $E_{\text{max}} \gg M_0$ ).

Der Propagator der Resonanz  $S$  wird durch Schleifen von  $\varphi$ -Teilchen modifiziert und nimmt die folgende Form an (auf dem resummierten 1-loop Niveau, siehe Abb. 1):

$$\Delta = i \left[ p^2 - M_0^2 + (\sqrt{2}g)^2 \Sigma_\Lambda(p^2) \right]^{-1} \ , \quad (10)$$

wobei  $\Sigma_\Lambda(p^2)$  der 1-Schleifen Beitrag ist, der durch einen Cutoff regularisiert wird (Details in Refs. [2, 3]). Die renormierte Masse  $M$  des Zustands  $S$  kann als die Nullstelle des Realteils von  $\Delta^{-1}$  definiert werden:

$$M^2 - M_0^2 + (\sqrt{2}g(N_c))^2 \text{Re} \Sigma_\Lambda(M^2) = 0 \ . \quad (11)$$

Es ist klar, dass im Limes  $N_c \rightarrow \infty$  gilt, dass  $M \rightarrow M_0$ , da  $g(N_c) = g_0 \sqrt{3/N_c}$ .

Die  $T$ -Matrix für die  $\varphi\varphi$ -Streuung im  $s$ -Kanal (auf dem 1-Schleifen Niveau, Abb. 1) lautet:

$$T(p^2) = i(\sqrt{2}g)^2 \Delta = \frac{1}{-K^{-1} + \Sigma_\Lambda(p^2)} \ , \quad K = \frac{(\sqrt{2}g)^2}{M_0^2 - p^2} - \frac{(\sqrt{2}g)^2}{M_0^2} \ . \quad (12)$$

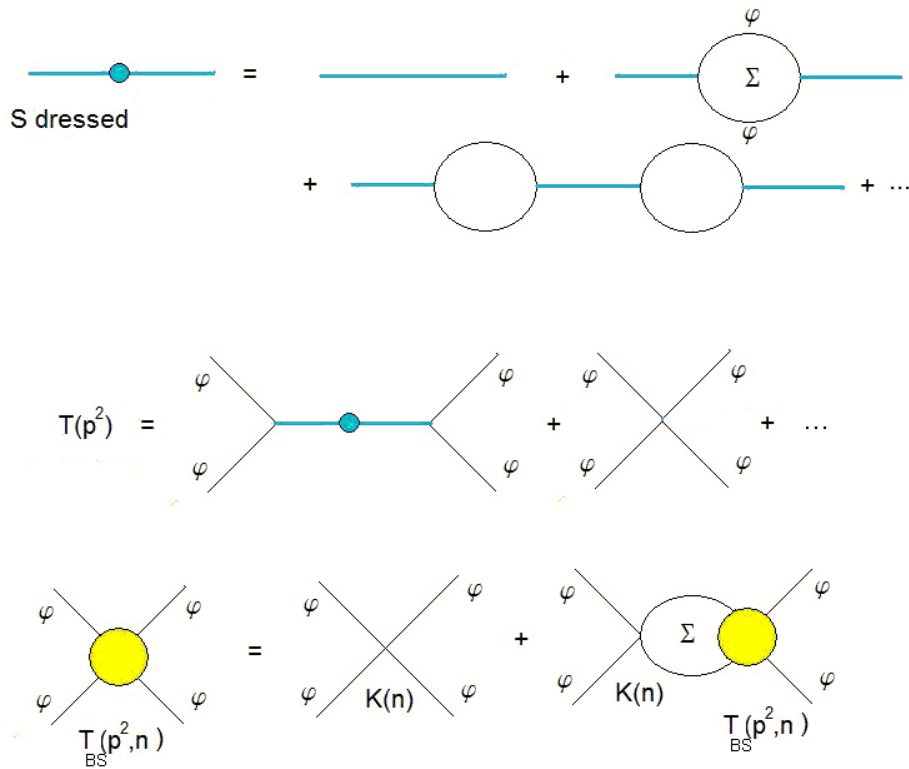


Abbildung 1: Modifikation der Resonanz  $S$  durch Schleifen von  $\varphi$ -Feldern. Graphische Darstellung der 'exakten'  $T$ -Matrix  $T = T(p^2)$  von Gl. (12) und graphische Darstellung der BS-approximierten Form der 'exakten'  $T$ -Matrix  $T_{BS} = T_{BS}(p^2, n)$  von Gl. (16).

Das ist für unsere Zwecke die ‘exakte’  $T$ -Matrix des Problems<sup>6</sup>.

Jetzt wenden wir uns der Konstruktion eines effektiven niederenergetischen Modells von  $\mathcal{L}_{\text{toy}}$  zu. Da das Feld  $S$  schwerer als das Feld  $\varphi$  ist, kann  $S$  ausintegriert werden, um eine Lagrange-Dichte herzuleiten, die nur von  $\varphi$  abhängt. Wir bekommen eine effektive Lagrange-Dichte  $\mathcal{L}_{\text{le}}$ , die bis zur Energie  $E_{\text{le}} \lesssim 2m < M_0$  gültig ist:

$$\mathcal{L}_{\text{le}}(E_{\text{le}}, N_c) = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + V, \quad V = \sum_{k=1}^{\infty} V^{(k)}, \quad (13)$$

wobei:

$$V^{(k)} = L^{(k)} \varphi^2 (-\square)^k \varphi^2, \quad L^{(k)} = \frac{g(N_c)^2}{2M_0^{2+2k}}. \quad (14)$$

Das effektive Potential  $V$  besteht aus einer Summe von Termen mit höheren Ableitungen. Der erste Term in der Entwicklung entspricht  $k = 1$  und kein Term ohne Ableitungen ist anwesend. Dadurch ist die  $\varphi\varphi$ -Streuung dem realistischen Fall der  $\pi\pi$ -Streuung ähnlich. Der Grund dafür ist, dass ein  $\varphi^4$ -Term in unser Modell von Gl. (8) eingefügt wurde: dadurch bleibt in der effektiven niederenergetischen Lagrange-Dichte  $\mathcal{L}_{\text{le}}$  kein  $\varphi^4$ -Term ohne Ableitungen übrig.

#### BS-Unitarisierung

Sei das Potential  $V$  bis zur Ordnung  $n$  approximiert:  $V(n) = \sum_{k=1}^n V^{(k)}$ . Durch eine Bethe-Salpeter-Studie, siehe Abb. 1, bekommt man die folgende approximierte  $T$ -Matrix  $T_{BS}$ :

$$T_{BS}(p^2, n) = -K(n) + K(n) \Sigma_\Lambda(p^2) T_{BS}(p^2, n), \quad (15)$$

$$T_{BS}(p^2, n) = \frac{1}{-K(n)^{-1} + \Sigma_\Lambda(p^2)}, \quad K(n) = \frac{(\sqrt{2}g)^2}{M_0^2} \sum_{k=1}^n \left( \frac{p^2}{M_0^2} \right)^k, \quad (16)$$

wobei  $K(n)$  die ‘nackte’ Baumniveau-Amplitude ist, die aus der niederenergetischen effektiven Lagrange-Dichte  $\mathcal{L}_{\text{le}}(E_{\text{le}}, N_c)$  folgt. Sie ist die Summe aller Vierbeinterme bis zur Ordnung  $n$ . Man muss beachten, dass  $T_{BS}(p^2, n)$  eine approximierte Form von  $T(p^2)$  in Gl. (12) darstellt. Je größer  $n$ , desto besser die Näherung. Formell gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_{BS}(p^2, n) = T(p^2). \quad (17)$$

Wir können jetzt einen Pol der Bethe-Salpeter-Amplitude bestimmen; dieser Pol entspricht einer Resonanz, die *nicht* in der effektiven Lagrange-Dichte  $\mathcal{L}_{\text{le}}(E_{\text{le}}, N_c)$  enthalten ist. Wie der Limes in Gl. (17) zeigt, entspricht diese Resonanz dem Zustand  $S$  der ursprünglichen Lagrange-Dichte  $\mathcal{L}_{\text{toy}}$ . Es wurde insofern eine dynamische *Rekonstruktion* des Zustands  $S$  durch eine BS-Analyse der niederenergetischen Lagrange-Dichte  $\mathcal{L}_{\text{le}}(E_{\text{le}}, N_c)$  durchgeführt. Der Zustand  $S$  wurde zuerst ausintegriert, und dann aus der effektiven Lagrange-Dichte  $\mathcal{L}_{\text{le}}$  wieder generiert. Eine numerische Studie wird in Abb. (2) gezeigt: die approximierte Form  $T_{BS}(p^2, n = 1)$  (wobei  $n = 1$  bedeutet, dass nur der erste Term in der Entwicklung berücksichtigt wurde) und die ‘exakte’ Funktion  $T(p^2)$  werden verglichen. Man kann leicht beobachten, dass  $T_{BS}(p^2, n = 1)$  tatsächlich  $T(p^2)$  reproduzieren kann. Subtilitäten, die der Wahl des Cutoffs entsprechen, werden ausführlich in Ref. [2] besprochen.

Jetzt wird ein anderer Standpunkt betrachtet: wenn nur  $\mathcal{L}_{\text{le}}(E_{\text{le}}, N_c)$  bekannt wäre (d.h. die Form der ursprünglichen, exakten Lagrange-Dichte  $\mathcal{L}_{\text{toy}}(E_{\text{max}}, N_c)$  wäre unbekannt), könnte man aus der BS-Rechnung -zu Unrecht- behaupten, dass der Pol der BS-Gleichung ein Molekül beschreibt. Es wurde

<sup>6</sup>Natürlich ist diese Form der  $T$ -Matrix nur in der 1-Schleifen-Näherung gültig. Selbst diese einfache Feldtheorie ist nicht exakt lösbar. Dennoch sind dank der Resummation alle erwünschten mathematischen Eigenschaften erfüllt. Sie ist aber ‘exakt’ nur im Vergleich zu der später diskutierten Bethe-Salpeter-approximierten Form.

nämlich aus einer BS-Studie bestimmt und hat den ‘Anschein’, ein molekulartiger Zustand aus zwei  $\varphi$ -Mesonen zu sein.

Diese Schlussfolgerung ist aber *nicht* korrekt: es ist eben von Anfang an klar, dass der Zustand  $S$  -per Konstruktion- ein fundamentaler (quarkoniumartiger) Zustand ist. Was ist dann falsch gelaufen? Man muss aufpassen, wenn man Informationen über die Resonanz  $S$  aus der effektiven niederenergetischen Lagrange-Dichte  $\mathcal{L}_{1e}(E_{1e}, N_c)$  gewinnen will: die Masse der Resonanz  $S$  ist größer als die Energiegrenze  $E_{1e}$  des effektiven Modells  $\mathcal{L}_{1e}(E_{1e}, N_c)$ . Das bedeutet, dass die Natur dieser Resonanz ohne weitere Informationen nicht in diesem Rahmen bestimmt werden kann. Die Bethe-Salpeter-Methode soll hier zuerst als Unitarisierungsmethode verstanden werden. Sie ist *nicht* auf derselben theoretischen Ebene wie eine BS-Studie im Rahmen der QED-Lagrange-Dichte, die erlaubt, Positronia zu bestimmen. Im QED-Fall ist die Gültigkeitsgrenze der Energie sehr groß (viel größer als  $2m_e$ ). Also ist die Interpretation der Positronia als Moleküle durchaus erlaubt und korrekt. In unserem Beispiel ist das nicht der Fall: die BS-Gleichung geht über die Gültigkeitsgrenze der effektiven Theorie hinaus. Obwohl die Existenz der Resonanz  $S$  korrekterweise vorhergesagt wird, kann keine Aussage über ihre Natur gemacht werden.

Es ist sehr instruktiv, eine Large- $N_c$  Studie dieses einfachen Systems durchzuführen. Wenn die Zahl  $n$  festgehalten ist und der Limes  $N_c \rightarrow \infty$  ausgeführt wird, stellt sich heraus, dass der korrekte Large- $N_c$  Limes im Rahmen der BS-Unitarisierung nicht reproduziert werden kann. Es gilt nämlich:

$$T_{BS}(p^2, n) \stackrel{N_c \rightarrow \infty}{\simeq} -K(n) . \quad (18)$$

Dieses Resultat gilt für jedes  $n$ , da  $K(n)$  wie  $1/N_c$  skaliert und  $\Sigma_\Lambda(p^2)$   $N_c$ -unabhängig ist. Aber  $K(n)$  ist ein Polynom der Ordnung  $n$  in  $p^2$  und hat keinen Pol. Das wiederum bedeutet, dass die Masse  $M$  des Zustandes  $S$  unendlich ist. Dieses Resultat ist offensichtlich falsch, da  $M = M_0$  für  $N_c \rightarrow \infty$  sein muss. Dieses Beispiel zeigt, dass die BS-Studie, so wie sie hier formuliert wurde, nicht fähig ist, das korrekte Large- $N_c$  Resultat wiederzugeben. Dieses Versagen ist besonders gefährlich, weil vom Standpunkt der effektiven Theorie  $\mathcal{L}_{1e}(E_{1e}, N_c)$  eine weitere Bestätigung zu existieren scheint, dass der Zustand  $S$  ein Molekül ist.

*IAM-Unitarisierung:* Wenn hingegen die sogenannte IAM-Unitarisierung gewählt wird, kann das korrekte Large- $N_c$  Resultat reproduziert werden. Bis zur Ordnung  $n = 2$  gilt:

$$T_{\text{IAM}} \simeq T_2 (T_2 - T_4 - iT_2 \sigma T_2)^{-1} T_2 , \quad (19)$$

wobei  $\sigma = \sqrt{\frac{p^2}{4} - m^2}$ . Da in unserem Fall  $T_2 = -\frac{(\sqrt{2}g)^2}{M_0^2} p^2$  und  $T_4 = \frac{(\sqrt{2}g)^2}{M_0^2} p^4$ , folgt:

$$T_{\text{IAM}} \simeq (\sqrt{2}g)^2 \left[ M_0^2 - p^2 - i(\sqrt{2}g)^2 \sigma \right]^{-1} . \quad (20)$$

Die letzte Gleichung stellt eine approximierete Form der  $T$ -Matrix dar, wenn  $g$  nicht zu groß ist ( $M \simeq M_0$ ). Es ist einfach zu zeigen, dass man für hohes  $N_c$  das korrekte Resultat  $M \rightarrow M_0$  und eine skalierende Zerfallsbreite  $1/N_c$  bekommt. Das zeigt, dass die IAM-Unitarisierung den richtigen Large- $N_c$  Limes reproduziert. Dennoch benötigt diese Unitarisierung zumindest zwei Terme in der Entwicklung der entsprechenden niederenergetischen Theorie.

#### *K-Matrix-Unitarisierung*

Die unitarisierte Form der  $S$ -Matrix lautet für  $n = 1$

$$S_K = \frac{1 + i\sigma T(1)}{1 - i\sigma T(1)} . \quad (21)$$

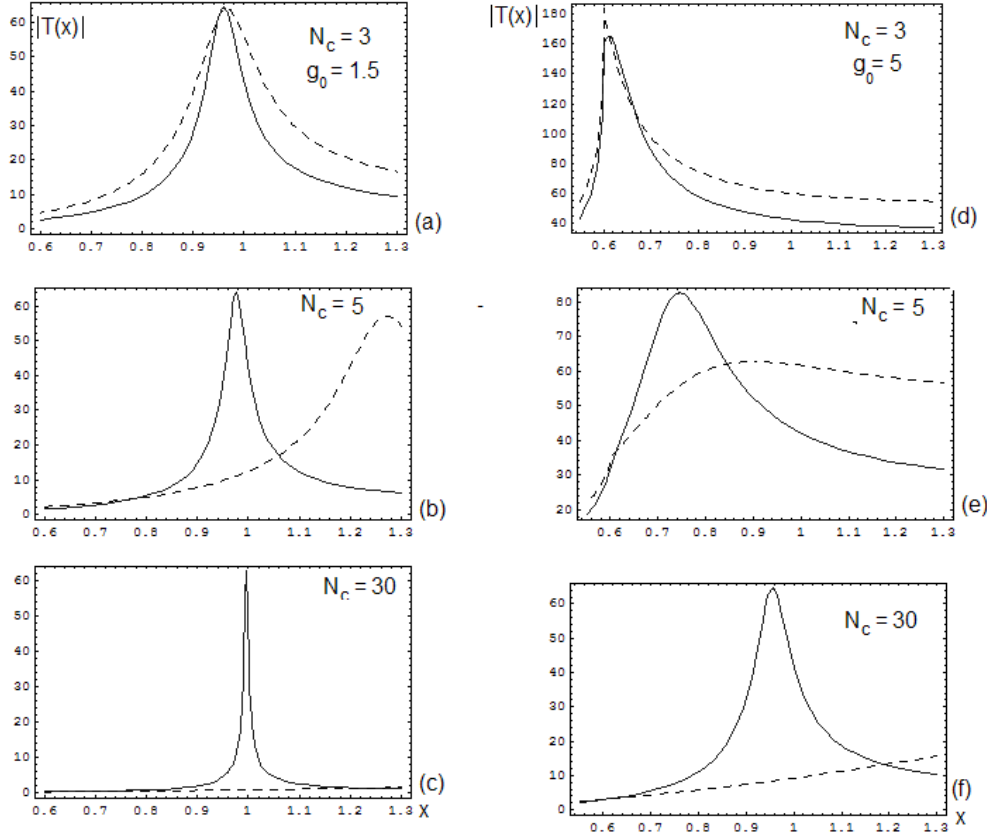


Abbildung 2: Betrag der Streumatrix  $T$  als Funktion der Variable  $x = p^2$  für  $N_c = 3, 5$  und  $30$  für die zwei Fälle  $g_0 = 1.5$  GeV (links) und  $g_0 = 5$  GeV (rechts). Die durchgezogene Kurve entspricht der ‘exakten’  $T$ -Matrix von Gl. (12), die gestrichelte Linie der approximierten Bethe-Salpeter  $T$ -Matrix  $T_{BS}$  von Gl. (16). Obwohl die zwei Kurven qualitativ für  $N_c = 3$  übereinstimmen, ist das Verhalten für großes  $N_c$  ganz anders: während die richtige Kurve  $T$  im Einklang mit dem Large- $N_c$  Limes schmaler wird, wird die BS-approximierte Kurve  $T_{BS}$  breiter und der Peak wandert nach rechts.

Der Pol der  $S$ -Matrix skaliert wie  $p^2 \propto \sqrt{N_c}$ , was nicht im Einklang mit dem richtigen Large- $N_c$  Resultat ist. Diese Tatsache zeigt, dass die Eigenschaften der rekonstruierten Resonanz  $S$  entscheidend von der Wahl der Unitarisierungsmethode abhängt. Das ist im Sinne dieser Diskussion ein Grund mehr, vorsichtig zu sein, wenn Resonanzen als Pole von Unitarisierungsverfahren einer niederenergetischen Lagrange-Dichte diskutiert werde.

*Analogie mit der realen, hadronischen Welt*

Das besprochene Modell ist nützlich, um einige Eigenschaften der realen Welt zu verstehen. In Tabelle 1 wird eine Analogie dargestellt.  $\mathcal{L}_{\text{toy}}$  entspricht der vollständigen hadronischen Lagrange-Dichte  $\mathcal{L}_{\text{had}}(E_{\text{max}}, N_c)$  von Gl. (5) mit  $E_{\text{max}} \simeq 2$  GeV, und die niederenergetische Lagrange-Dichte  $\mathcal{L}_{\text{le}}$  entspricht der chiralen Störungstheorie  $\chi PT$  oder der chiralen Störungstheorie plus Vektormesonen  $\chi PT + VM$ .

**Tabelle 1:** Hadronen-Analogie

Modell	Hadronische Welt
$\mathcal{L}_{\text{toy}}(E_{\text{max}}, N_c)$	$\mathcal{L}_{\text{had}}(E_{\text{max}}, N_c)$
$\mathcal{L}_{\text{le}}(E_{\text{le}}, N_c)$	$\mathcal{L}_{\chi PT}$ , oder $\mathcal{L}_{\chi PT+VM}$
$L^{(k)}$	LECs
Feld $S$	Felder $a_1(1260)$ , $f_2(1270)$ , ...

Natürlich ist diese Analogie nur schematischer Natur. Sie trifft aber einen wichtigen Punkt. Das wahre Problem der heutigen niederenergetischen hadronischen Physik ist, dass  $\mathcal{L}_{\text{had}}(E_{\text{max}}, N_c)$  nicht bekannt ist. Nur niederenergetische Lagrange-Dichten -wie die Chirale Störungstheorie  $\mathcal{L}_{\chi PT}$  gültig bis  $E_{\chi PT}$  oder die chirale Störungstheorie mit Vektormesonen  $\mathcal{L}_{\chi PT+VM}$  gültig bis  $E_{\chi PT+VM} \simeq 1$  GeV- sind aus Symmetriegründen bekannt. Sie bestehen aus einer unendlichen Reihe von Termen, genau wie unsere effektive Lagrange-Dichte  $\mathcal{L}_{\text{le}}(E_{\text{le}}, N_c)$ . Aber, im Gegensatz zu unserem Modell, wo die genaue Kenntnis der ursprünglichen Lagrange-Dichte  $\mathcal{L}_{\text{toy}}(E_{\text{max}}, N_c)$  die Herleitung von  $\mathcal{L}_{\text{le}}(E_{\text{le}}, N_c)$  bis zu einer beliebigen Ordnung  $n$  erlaubt, sind in der realen hadronischen Welt  $\mathcal{L}_{\chi PT}$  oder  $\mathcal{L}_{\chi PT+VM}$  nur ‘teilweise’ bekannt: wie zuvor schon angesprochen, sind die verschiedenen Terme der effektiven Lagrange-Dichte zwar bekannt, die entsprechenden Kopplungskonstanten  $L^{(k)}$  sind aber unbekannt (da  $\mathcal{L}_{\text{had}}(E_{\text{max}}, N_c)$  nicht bekannt ist). Diese Konstanten (LECs) müssen durch experimentelle Werte bestimmt werden. Diese Tatsache setzt auch eine klare Grenze der effektiven niederenergetischen Theorien: obwohl es prinzipiell möglich ist, bis zu einer beliebigen Ordnung  $n$  zu arbeiten, sind Rechnungen nur für die niedrigsten Ordnungen durchführbar.

In vielen Studien zur ‘dynamischen Generierung’ der Resonanzen mit BS-Gleichung wird nur der erste Term in der Entwicklung der effektiven Lagrange-Dichte in Betracht gezogen. Einige Resonanzen oberhalb 1 GeV wurden auf diese Weise bestimmt, wie z.B.  $a_1(1260)$ ,  $f_2(1270)$ ,  $f_0(1370)$ , ...:  $a_1(1260)$  wird als  $\pi\rho$ -Molekül,  $f_2(1270)$  und  $f_0(1370)$  werden als  $\rho\rho$ -Moleküle interpretiert (siehe Ref. [18] und Referenzen darin). Diese Resonanzen entstehen als Pole in den BS-Gleichungen, die aus der Unitarisierung von  $\mathcal{L}_{\chi PT+VM}$  entstehen. Wie mit Hilfe des obigen Modells erklärt, kann das ein Fall von ‘dynamischer Rekonstruktion’ sein, genau wie bei dem  $W$ -Meson in der elektroschwachen Theorie oder bei der Resonanz  $S$  in unserem einfachen Modell.

Die Resonanzen  $a_1(1260)$ ,  $f_2(1270)$  und  $f_0(1370)$  können problemlos als Quark-Antiquark Zustände interpretiert werden [20]. Viele Studien mit dem ‘naiven’ Quark-Modell bestätigen eigentlich diese Einsicht. Die Resonanzen  $f_2(1275)$ ,  $f_2(1525)$ ,  $a_2(1320)$  und  $K_2(1430)$  stellen ein tensorielles  $J^{PC} = 2^{++}$  Quark-Antiquark-Nonett dar:  $f_2(1275) = \bar{n}n$ ,  $f_2(1525) = \bar{s}s$ ,  $a_2(1320) = u\bar{d}$ , ...  $K_2(1430) = s\bar{d}$ , u.s.w. Die (beinahe) ideale Mischung und die genau gemessenen starken und elektromagnetischen

Zerfallsbreiten passen sehr gut in dieses Bild (siehe auch Ref. [21] und Referenzen darin). Ähnlich können  $f_1(1285)$ ,  $f_1(1510)$ ,  $a_1(1260)$  und  $K_1(1270)$  erfolgreich als das leichteste  $1^{++}$  Nonett verstanden werden. Selbst der skalare Sektor zwischen 1-2 GeV (siehe später für eine genauere Beschreibung) ist mit dem Bild eines Quarkonium-Nonetts plus einem skalaren Glueball konsistent, obwohl die Situation noch nicht eindeutig ist [25].

Die geführte Diskussion zeigt, dass es keinen Konflikt zwischen auf Bethe-Salpeter basierten Rechnungen und den Standard-Quark-Modell-Rechnungen gibt. Sie beschreiben dieselben Objekte aus unterschiedlichen Perspektiven. Was hier kritisiert wird, ist nicht die Gültigkeit der Rechnungen selbst, sondern die daraus folgende molekülartige Interpretation vieler Resonanzen oberhalb 1 GeV, die viele Autoren vertreten haben. Sicherlich wird es in der Zukunft interessant (obwohl zugleich kompliziert), solche moderne Studien mit Hilfe der IAM-Methode im Large- $N_c$  Limes zu wiederholen; wenn diese Resonanzen oberhalb 1 GeV tatsächlich Quarkonia (oder Gluebälle) sind, müssen sie schmaler werden. Die hier geschilderte Situation ist generell und gilt mit geringen Änderungen auch für Baryonen (z.B. was die Natur von  $N(1535)$  betrifft, mehr darüber im Abschnitt 5) und auch im schweren Quark-Bereich.

Wir wenden uns den Prinzipien, die die Erstellung eines hadronischen Modells ermöglichen, zu. Das wird uns erlauben, eine explizite Form einer hadronischen Lagrange-Dichte für  $E_{\max} \simeq 2$  GeV herzuleiten.



## 3 Die Erstellung des Modells: Meson-Sektor

### 3.1 Ziel des Abschnittes

Die hadronische Lagrange-Dichte  $\mathcal{L}_{had}(E_{\max}, N_c = 3)$  mit  $E_{\max} \simeq 2$  GeV ist nicht analytisch aus dem QCD-Lagrange-Dichte  $\mathcal{L}_{QCD}$  herleitbar, siehe Gl. (3). Um  $\mathcal{L}_{had}(E_{\max}, N_c = 3)$  explizit zu konstruieren, ist eine genaue Betrachtung der Symmetrien der QCD notwendig.  $\mathcal{L}_{had}$  soll nämlich dieselben Symmetrien (und Symmetriebrechungen) der ursprünglichen QCD-Lagrange-Dichte haben. Natürlich bleiben einige Konstanten der hadronischen Lagrange-Dichte nicht bestimmbar, da wir keine exakte Rechnung durchführen können.

Das Ziel dieses Abschnittes ist die Konstruktion eines mesonischen Modells, das nicht nur skalare und pseudoskalare Quarkonia enthält, sondern auch von Anfang an vektorielle und axialvektorielle Quarkonia. Außerdem wird ein Kriterium diskutiert, das nur eine endliche (und relativ kleine) Anzahl von Termen im hadronischen Potential erlaubt. Dieses Kriterium basiert auf den Eigenschaften der Dilatationssymmetrie und ihrer expliziten Brechung. Die Fluktuation des Dilaton-Feldes, der Glueball, wird auch von Anfang an eingekoppelt.

Da die genaue Beschreibung der Konstruktion des Modells noch nicht Teil einer Veröffentlichung ist, werden zuerst grundlegende Konzepte wiederholt und ihre Bedeutung für das chirale Modell dargelegt. Das Modell wird für eine beliebige Flavor-Anzahl  $N_f$  und Farbanzahl  $N_c$  konstruiert, was künftige Studien erleichtern wird. Die Resultate des expliziten Falles  $N_f = 2$  werden zusammengefasst.

### 3.2 Symmetrien der QCD

Um die Diskussion dieses Abschnitts zu vereinfachen, wird die Lagrange-Dichte der QCD für eine beliebige Anzahl von Farben  $N_c$  und eine beliebige Anzahl von Quark-Flavors  $N_f$  in der Matrix-Form hingeschrieben:

$$\mathcal{L}_{QCD} = \text{Tr} \left[ \bar{q}_i (i\gamma^\mu D_\mu - m_i) q_i - \frac{1}{2} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} \right], \quad D_\mu = \partial_\mu - ig_0 A_\mu, \quad (22)$$

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig_0 [A_\mu, A_\nu], \quad A_\mu = A_\mu^a t^a, \quad a, = 1, \dots, N_c^2 - 1, \quad (23)$$

wobei  $i = 1, \dots, N_f$ , die Matrizen  $t^a$  sind die Generatoren der Gruppe  $SU(N_c)$  in der fundamentalen Darstellung, und  $f_{abc}$  sind die Strukturkonstanten. (Unten wird eine Zusammenfassung der mathematischen Eigenschaften dargelegt.)

Wir listen zuerst die Symmetrien von  $\mathcal{L}_{QCD}$  und ihrer spontanen und expliziten Brechungen auf:

- (a) Lokale Farbsymmetrie  $SU(N_c)$ .
- (b) Spursymmetrie und ihre Anomalie, d.h. ihre Brechung durch Quantenfluktuationen.
- (c) Chirale Symmetrie  $U(N_f)_R \times U(N_f)_L \equiv U(1)_V \times SU(N_f)_V \times U(1)_A \times SU(N_f)_A$ .
- (d)  $U(1)_A$  Anomalie. Die klassische  $U(1)_A$  Symmetrie wird auch durch Quantenfluktuationen gebrochen.
- (e) Spontane Symmetriebrechung  $SU(N_f)_V \times SU(N_f)_A \rightarrow SU(N_f)_V$ .
- (f) Explizite Brechung von  $U(1)_A$  und  $SU(N_f)_A$  durch nicht verschwindende Quarkmassen.

Bevor wir ausführlich diese Symmetrien diskutieren, werden die Eigenschaften der Gruppen  $U(N)$  und  $SU(N)$  kurz zusammengefasst.

*Gruppen  $U(N)$  und  $SU(N)$ :* Diese Gruppen sind im Rahmen der QCD allgegenwärtig (sowohl im Farb- als auch im Flavor-Raum). Ein Element der  $U(N)$ -Gruppe ist eine komplexe  $N \times N$ -Matrix, die die folgende Bedingung erfüllt:

$$U^\dagger U = U U^\dagger = 1_N. \quad (24)$$

$U$  kann als

$$U = e^{i\theta_a t^a}, \quad a = 0, 1, \dots, N^2 - 1 \quad (25)$$

ausgedrückt werden, wobei die Matrizen  $t^a$  eine Basis von linearunabhängigen  $N \times N$ -Matrizen darstellen. Es ist üblich,  $t^0 = \frac{1}{\sqrt{2N}} 1_N$  zu setzen. Für die restlichen Matrizen  $t^a$  mit  $a = 1, \dots, N^2 - 1$ , wird in den Fällen  $N = 2$  und  $N = 3$  folgende, nützliche Wahl getroffen:  $t^a = \frac{\tau^a}{2}$  für  $a = 1, 2, 3$ , wobei  $\tau^a$  die Pauli-Matrizen sind, und  $t^a = \frac{\lambda^a}{2}$  für  $a = 1, \dots, 8$ , wobei  $\lambda^a$  die Gell-Mann-Matrizen sind. Ganz allgemein werden die Matrizen so gewählt, dass folgende Normierung gilt:

$$\text{Tr} [t^a t^b] = \frac{1}{2} \delta^{ab} \quad \text{mit } a, b = 0, 1, \dots, N^2 - 1 . \quad (26)$$

Eine  $N \times N$  komplexe Matrix gehört zu der Untergruppe  $SU(N)$ , wenn sie folgende Eigenschaften erfüllt:

$$U^\dagger U = U U^\dagger = 1_N, \quad \det U = 1 ; \quad (27)$$

die zusätzliche Bedingung  $\det U = 1$  wird hinzugefügt. Es ist deutlich, dass Matrizen in der Form  $U = e^{i\theta_a t^a}$  mit  $a = 1, \dots, N^2 - 1$  (wobei die Identitätsmatrix ausgelassen wird) zu der Gruppe  $SU(N)$  gehören. Die Matrizen  $t^a$  mit  $a = 1, \dots, N^2 - 1$  sind die Generatoren der Gruppe  $SU(N)$  und erfüllen folgende Gleichung:

$$[t^a, t^b] = i f^{abc} t^c \quad \text{mit } a, b, c = 1, \dots, N^2 - 1 , \quad (28)$$

wobei  $f^{abc}$  die (antisymmetrischen) Strukturkonstanten sind.

Die allgemeine Form einer Matrix  $U$  der  $SU(N)$ -Gruppe enthält auch die sogenannten Elemente des Zentrums:

$$U = Z e^{i\theta_a t^a}, \quad a = 1, \dots, N^2 - 1 , \quad (29)$$

wobei

$$Z = Z_n = e^{i\frac{2\pi n}{N}} 1_N, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N - 1 . \quad (30)$$

Die Zentrum-Elemente erfüllen auch die Bedingung  $\det U = 1$ . Die Zentrum-Gruppe wird auch als  $Z(N)$  bezeichnet. Grob gesagt, es ist als ob einige Elemente der Gruppe  $U(1)$  (von der Form  $U = e^{-i\theta^0 t^0}$ ) bei  $SU(N)$  in diskreter Form ‘weiterleben’.

Nach dieser kurzen Abschweifung über Gruppentheorie ist eine genauere Diskussion der schon aufgeführten Eigenschaften der QCD an der Reihe.

(a) *Lokale Farbsymmetrie  $SU(N_c = 3)_c$*

Die  $N_c \times N_c$  Matrix der Yang-Mills-Felder  $A_\mu(x) = A_\mu^a(x) t^a$  und die  $N_f$ -Vektorspalten  $q_i$  ( $q_i^t = (q_{i,1}, \dots, q_{i,N_c})$ ,  $i = 1, \dots, N_f$ ) transformieren unter einer lokalen  $SU(N_c)_c$ -Transformation wie folgt:

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = U(x) A_\mu(x) U^\dagger(x) - \frac{i}{g_0} U(x) \partial_\mu U^\dagger(x), \quad q_i \rightarrow U(x) q_i , \quad (31)$$

wobei

$$U(x) = e^{i\theta_a(x) t^a}, \quad a = 1, \dots, N_c^2 - 1 \quad (= 8 \text{ für } N_c = 3) . \quad (32)$$

Der  $QCD$ -Lagrangian  $\mathcal{L}_{QCD}$  ist invariant unter der lokalen Transformation (31). Diese lokale Symmetrie ist in einem hadronischen Modell automatisch erfüllt, da man von Anfang an mit farblosen Feldern (Farbsingulets) arbeitet. Dennoch ist sie nützlich: die Betrachtung des ‘Large- $N_c$ ’ Limes, in dem die Gruppe  $SU(N_c \gg 3)_c$  in Betracht gezogen wird, spielt eine zentrale Rolle in hadronischen Modellen. Obwohl die Felder automatisch  $SU(N_c)_c$ -invariant sind, *skalieren* die Parameter des Modells mit Potenzen von  $N_c$ . *Es sind nicht die Felder, sondern die Parameter, die die Abhängigkeit von  $N_c$  in einem effektiven Modell der QCD tragen.*

Die  $SU(N_c)_c$ -Gruppe involviert auch die Transformationen unter den Elementen des Zentrums, die in Gl. (31) nicht berücksichtigt wurden. Die entsprechenden Transformationen lauten

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = Z A_\mu Z^\dagger = A_\mu, \quad q_i \rightarrow Z q_i \quad (33)$$

mit

$$Z = Z_n = e^{i \frac{2\pi n}{N_c}} 1_N, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N_c - 1. \quad (34)$$

Selbstverständlich lassen diese Transformationen der Lagrange-Dichte invariant. Wenn aber die Temperatur ins Spiel gebracht wird, finden zwei wichtige Phänomene statt: (i) bei großem  $T$  wird im Eichsektor (QCD ohne Quarks) die Zentrum-Symmetrie spontan gebrochen. Die spontane Brechung dieser Symmetrie signalisiert Deconfinement der Gluonen. (ii) Wenn Quarks dabei sind, ist die Zentrum-Gruppe keine exakte Symmetrie, da die notwendigen antisymmetrischen Randbedingungen für die Fermionfelder nicht erfüllt werden.

Obwohl die Zentrum-Symmetrie in den folgenden Überlegungen keine weitere Rolle spielen wird, ist es aus zwei Gründen wichtig, sie zu erwähnen: (i) sie ist ein wichtiger Bestandteil vieler moderner Forschungsarbeiten in der hadronischen Physik bei nicht verschwindender Temperatur und Dichte. Das erfolgt durch den Polyakov-Loop, der den Ordnungsparameter der spontanen Symmetriebrechung der Zentrum-Gruppe  $Z(N_c)$  bei hohem  $T$  darstellt. (ii) Das hadronische Modell, das wir später diskutieren werden, kann leicht verallgemeinert werden, um den Polyakov-Loop mit zu berücksichtigen.

(b) *Spursymmetrie und Spuranomalie*

Die klassische Lagrange-Dichte der QCD ist im Limes  $m_i \rightarrow 0$  invariant unter Raum-Zeit-Dilatationen. Das ist einfach zu verstehen, da kein dimensionsbehafteter Parameter in der Lagrange-Dichte auftaucht. Zuerst beschränken wir unsere Aufmerksamkeit auf den Eichsektor (QCD ohne Quarks):

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{a,\mu\nu} \quad (35)$$

Die Dilatationstransformation lautet

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \lambda^{-1} x^\mu, \quad A'_\mu(x') = \lambda A_\mu(x). \quad (36)$$

Es ist bekannt, dass schon im Eichsektor diese Symmetrie durch Quantenfluktuationen gebrochen wird. Es ist eben auf diesem Niveau (und nicht wegen der nackten Quarkmassen), dass der Skalierungsfaktor  $\Lambda_{QCD} \simeq 250$  MeV entsteht und die Größenordnung aller hadronischen Prozesse bestimmt. Die Brechung der klassischen Skaleninvarianz stellt ein sehr wichtiges und tiefes Phänomen dar, das zentral für die gesamte QCD ist.

Man kann diesen sehr wichtigen Prozess auf eine einfache Weise erklären: der klassische Noetherstrom, der aus der Dilatationssymmetrie stammt, lautet

$$J^\mu = x_\nu T^{\mu\nu} \rightarrow \partial_\mu J^\mu = T^\mu_\mu = 0, \quad (37)$$

wobei  $T^{\mu\nu}$

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}_{YM}}{\partial (\partial_\mu A_\rho)} \partial^\nu A_\rho - g^{\mu\nu} \mathcal{L}_{YM} + \text{'sym'}$$
(38)

der Energie-Impuls-Tensor der Yang-Mills Lagrange-Dichte ist. (Der Term 'sym' ist ein Symmetrisierungsterm, der in Eichtheorien gebraucht wird, um den Tensor symmetrisch zu machen).

Die explizite Berücksichtigung von gluonischen Schleifen (Quantenfluktuationen) bricht diese Symmetrie. Anstatt einer konstanten Kopplungskonstante  $g_0$  entsteht durch Renormierung (d.h. durch Quanten-Schleifen-Berechnungen) eine energieabhängige 'laufende' Kopplung  $g(\mu)$ :

$$g_0 \xrightarrow{\text{Renormierung}} g(\mu), \quad (39)$$

wobei  $\mu$  die Energieskala ist, bei der die Kopplung festgelegt wird (wie z.B. die Energie im Schwerpunktsystem in einem Streuprozess) .

Folgende Gleichung wird im Rahmen störungstheoretischer QCD hergeleitet:

$$\partial_\mu J^\mu = T_\mu^\mu = \frac{\beta(g)}{4g} G_{\mu\nu}^a G^{a,\mu\nu} \neq 0 \text{ wobei } \beta(g) = \mu \frac{\partial g}{\partial \mu} . \quad (40)$$

Auf dem 1-Schleifen-Niveau gilt:

$$\beta(g) = \mu \frac{\partial g}{\partial \mu} = -bg^3 \text{ mit } b = \frac{11N_c}{48\pi^2} . \quad (41)$$

Wenn  $g$  konstant wäre ( $g = g_0$ ), hätte man tatsächlich  $\partial_\mu J^\mu = T_\mu^\mu = 0$ . Das ist aber wegen der Renormierung nicht der Fall. Die Lösung der Differentialgleichung (41) lautet

$$g^2(\mu) = \frac{g_*^2}{1 + 2bg_*^2 \log \frac{\mu}{\mu_*}} . \quad (42)$$

Da in der Yang-Mills-Theorie (wie auch in der QCD mit Quarks, siehe unten)  $b > 0$ , wird die laufende Kopplungskonstante  $g(\mu)$  kleiner, wenn  $\mu$  wächst. Das ist die berühmte asymptotische Freiheit der QCD und Grund für den Nobelpreis im Jahr 2004. Andererseits wächst für kleine  $\mu$ , also im Niederenergiebereich, die Kopplung  $g(\mu)$  und somit die Intensität der Wechselwirkung zwischen Gluonen (und Quarks). Das ist einer der Gründe für die Entstehung von Confinement: die Gluonen (und die Quarks) können sich nicht frei bewegen, sondern sind in farbneutralen eingeschlossenen Zuständen gefangen. Es ist auch interessant zu bemerken, dass aus Gl. (42) folgt:  $g \propto 1/\sqrt{N_c}$ . Das ist die Grundlage für viele Large- $N_c$  Resultate, die im vorherigen Abschnitt zusammengefasst wurden.

Die störungstheoretische Gleichung (42) hat einen Pol für

$$\mu_{Pol} = \Lambda_{Landau} = \Lambda_{YM} = \mu_* e^{\frac{-1}{2bg_*^2}} . \quad (43)$$

Natürlich ist eine störungstheoretische Rechnung im Niederenergiebereich nicht gültig. Diese Rechnung bedeutet nicht, dass  $g(\mu = \Lambda_L)$  unendlich wird. Der wichtige Punkt ist, dass diese Rechnung eine Energieskala setzt. Sie impliziert, dass QCD für  $\mu \sim \Lambda_{YM}$  stark gekoppelt wird und jede störungstheoretische Studie bei solchen Energien nutzlos macht. Leider kann  $\Lambda_{YM}$  theoretisch nicht bestimmt werden, da der Wert  $g_*$  bei einem vorgegebenen  $\mu_*$  (wie z.B. der GUT-Energie-Skala  $\mu_* = 10^{16}$  GeV) unbekannt ist. Dennoch bedeutet sie etwas sehr Wichtiges, indem sie zeigt, wie aus einer dimensionslosen Theorie eine endliche Dimension entsteht. Dieses Phänomen ist auch unter dem englischen Namen ‘Dimensional Transmutation’ bekannt.

Es ist üblich, die Funktion  $g(\mu)$  mit Hilfe von  $\Lambda_{YM}$  auszudrücken:

$$g^2(\mu) = \frac{1}{2b \log \frac{\mu}{\Lambda_{YM}}} . \quad (44)$$

Die Brechung der Skalensymmetrie generiert auch ein Gluon-Kondensat: der Vakuumerwartungswert  $\langle \text{vev} \rangle$  von Gluonfeldern verschwindet nicht und bildet das sogenannte Gluon-Kondensat:

$$\langle T_\mu^\mu \rangle = - \left\langle \frac{11N_c}{48} \frac{\alpha_s}{\pi} G_{\mu\nu}^a G^{a,\mu\nu} \right\rangle \sim - \frac{11N_c}{48} (350\text{-}600 \text{ MeV})^4 . \quad (45)$$

Die numerischen Resultate wurden für  $N_c = 3$  mit Hilfe von Gitter-Simulationen und QCD-Summenregeln berechnet [22]. Es ist insofern wichtig, dass hadronische Modelle dieses Kondensat berücksichtigen, siehe später für ein explizites Verfahren.

Wenn die Quarks berücksichtigt werden, transformieren sie unter einer Dilatationstransformation wie

$$q'(x') = \lambda^{3/2} q(x) , \quad (46)$$

da sie Dimension  $3/2$  haben. Die Diskussion ist dem vorherigen Fall ähnlich, bis auf die Konstante  $b$ , die in Anwesenheit von Quarks

$$b = \frac{11N_c - 2N_f}{48\pi^2}$$

lautet. Es gilt  $b > 0$  für  $N_f < \frac{11}{2}N_c$ . Das ist eine Bedingung, die in der Natur ( $N_f = 6$  und  $N_c = 3$ ) erfüllt ist.

(c) *Chirale Symmetrie*  $U(N_f)_R \times U(N_f)_L$

Im Limes  $m_i \rightarrow 0$  ist  $\mathcal{L}_{QCD}$  unter folgender  $U(N_f)_R \times U(N_f)_L$ -Transformation der Quark-Felder invariant:

$$q_i = q_{i,R} + q_{i,L} \rightarrow U_{R,ij}q_{j,R} + U_{L,ij}q_{j,L} , \quad (47)$$

mit

$$U_R \in U(N_f)_R , U_L \in U(N_f)_L . \quad (48)$$

Die rechtshändigen und linkshändigen Spinoren  $q_{i,R}$  und  $q_{i,L}$  sind wie folgt definiert:

$$q_{i,R} = P_R q_i , q_{i,R}^\dagger = q_i^\dagger P_R , \bar{q}_{i,R} = \bar{q}_i P_L , \quad (49)$$

$$q_{i,L} = P_L q_i , q_{i,L}^\dagger = q_i^\dagger P_L , \bar{q}_{i,L} = \bar{q}_i P_R , \quad (50)$$

und

$$P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) , P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) . \quad (51)$$

Das ist die berühmte chirale Symmetrie zwischen links- und rechtshändigen Quarks.

(d)  $U(1)_A$  *Anomalie*

Die  $U(1)_A$ -Transformation ist eine Untergruppe von  $U(N_f)_L \times U(N_f)_R$ . Sie entspricht der Wahl

$$U_A^{(1)} = U_R = U_L^\dagger = e^{i\nu t^0} , \quad (52)$$

d.h.

$$q_{i,R} \rightarrow e^{i\nu \frac{1}{\sqrt{2N_f}}} q_{i,R} , q_{i,L} \rightarrow e^{-i\nu \frac{1}{\sqrt{2N_f}}} q_{i,L} \Rightarrow q \rightarrow e^{i\nu t^0 \gamma_5} q . \quad (53)$$

Diese Symmetrie wird auch von Quantenfluktuationen explizit verletzt. Deswegen wird sie auch Anomalie genannt. Die Divergenz des axialen Stroms

$$A_\mu^0 = \bar{q} \gamma^\mu \gamma^5 q = \sum_{i=1}^{N_f} \bar{q}_i \gamma^\mu \gamma^5 q_i \quad (54)$$

verschwindet nämlich wegen der Quantenfluktuationen *nicht*. Der Ausdruck lautet

$$\partial^\mu A_\mu^0 = -\frac{g^2 N_f}{32\pi^2} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{a,\mu\nu} \neq 0 , \quad (55)$$

wobei der duale Gluon-Tensor

$$\tilde{G}^{a,\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} G_{\rho\sigma}^a \quad (56)$$

eingeführt wurde.

(e) *Spontane Symmetriebrechung der chiralen Symmetrie:  $SU(N_f)_R \times SU(N_f)_L \rightarrow SU(N_f)_V$*

Die spontane Symmetriebrechung der chiralen Symmetrie ist ein zentrales Phänomen in der niederenergetischen hadronischen Welt: sie erklärt, warum die Pionen (beinahe) masselos sind, und warum ihre Wechselwirkung schwach ist. Sie verursacht Massenunterschiede zwischen Multiplets und beeinflusst

viele Zerfallsmoden stark. Um sie genau zu verstehen, schreiben wir zuerst die chirale Symmetriegruppe der QCD wie folgt:

$$U(N_f)_R \times U(N_f)_L \equiv U(1)_V \times SU(N_f)_V \times U(1)_A \times SU(N_f)_A . \quad (57)$$

Die Transformation  $U_V(1)$  entspricht der Wahl

$$U_1 = U_L = U_R = e^{i\theta t^0} , \quad (58)$$

$SU(N_f)_V$  entspricht der Wahl

$$U_V = U_L = U_R = e^{i\theta_a^V t^a} \quad (a = 1, \dots, N_f^2 - 1) , \quad (59)$$

und  $SU(N_f)_A$  entspricht der Wahl

$$U_A = U_L = U_R^\dagger = e^{i\theta_a^A \lambda^a} \quad (a = 1, \dots, N_f^2 - 1) . \quad (60)$$

Es ist wichtig zu beachten, dass  $SU(N_f)_A$  keine Gruppe bildet, da das Produkt zweier Elemente kein neues Element der Menge ist. Es ist aber genau die Symmetrie unter den  $SU(N_f)_A$ -Transformationen, die spontan gebrochen wird. Das Vakuum der QCD  $|0_{QCD}\rangle$  ist nicht invariant unter dieser Transformation, was wegen des Goldstone-Theorems zur Folge hat, dass pseudoskalare Anregungen mit Masse Null entstehen (die oben erwähnten Pionen).

(f) *Explizite Symmetriebrechung durch die Quarkmassen*

Der Massenterm

$$\mathcal{L}_{mass} = \sum_{i=1}^{N_f} m_i \bar{q}_i q_i \quad (61)$$

in der QCD-Lagrange-Dichte bricht explizit viele der oben genannten Symmetrien.

Die Spuranomalie wird dadurch verursacht, dass die Massen dimensionsbehaftet sind. Die entstehende Verletzung ist aber deutlich kleiner als die Quantenverletzung im Eichsektor. In Anwesenheit der Quarkmassen lautet die Spur des Energie-Impuls-Tensors

$$T_\mu^\mu = \frac{\beta(g)}{4g} G_{\mu\nu}^a G^{a,\mu\nu} + \sum_{i=1}^{N_f} m_i \bar{q}_i q_i , \quad (62)$$

wobei der letzte Term die explizite Symmetriebrechung der Skalensymmetrie durch die nicht verschwindenden Quark-Massen beschreibt.

Die Symmetrie unter  $U(N_f)_V \equiv U(1)_V \times SU(N_f)_V$ -Transformationen ist nur erhalten, wenn die Massen gleich sind:  $m_1 = m_2 = \dots = m_{N_f}$ . Sobald es einen Massenunterschied gibt, ist diese Symmetrie auch verletzt. Die Divergenzen der entsprechenden Ströme,

$$V_\mu^a = \bar{q} \gamma^\mu t^a q , \quad (63)$$

lauten

$$\partial^\mu V_\mu^a = i\bar{q} [\hat{m}, t^a] q \neq 0 , \quad (64)$$

wobei  $\hat{m} = \text{diag}\{m_1, m_2, \dots, m_{N_f}\}$ . Die  $U_V(1)$ -Symmetrie, die der Wahl  $a = 0$  entspricht, bleibt von dem Massenterm ‘verschont’. Sobald zwei Massen gleich sind, wie z.B.  $m_1 = m_2$ , gibt es andere Ströme, die erhalten bleiben.

Die Symmetrie unter  $U_A(N_f) \equiv U_A(1) \times SU_A(N_f)$ -Transformationen wird verletzt, sobald  $m_i \neq 0$ . Sei

$$A_\mu^a = \bar{q} \gamma^\mu \gamma^5 t^a q , \quad (65)$$

dann gilt:

$$\partial^\mu A_\mu^a = i\bar{q}\gamma^5\{\hat{m}, t^a\}q \neq 0 \text{ für } a \neq 0. \quad (66)$$

Die explizite Brechung der  $SU_A(N_f)$ -Symmetrie verursacht eine kleine, aber nicht verschwindende Masse der Pionen, die dann Quasi-Goldstone-Bosonen sind. Die Divergenz des Stroms für den Fall  $a = 0$  besteht letztendlich aus zwei Beiträgen,

$$\partial^\mu A_\mu^0 = 2i\hat{m}\gamma^5q - \frac{g^2 N_f}{32\pi^2} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{a,\mu\nu}, \quad (67)$$

wobei der erste klassisch ist und der zweite die  $U_A(1)$ -Anomalie beschreibt. Die axiale Anomalie hat eine wichtige Folge im pseudoskalaren mesonischen Spektrum: das entsprechende isoskalare Meson ( $\eta'$  in der realen Welt) entspricht keinem Goldstone-Boson, da die Symmetrie ohnehin durch die Quantenfluktuationen verletzt ist.

Da diese Arbeit auf die leichten Quarks fokussiert ist, ist man überwiegend an den Fällen  $N_f = 2$  und  $N_f = 3$  interessiert. Für  $N_f = 2$  ist die explizite Brechung durch die Quarkmassen klein:  $m_{u,d} \ll \Lambda_{YM}$ . Außerdem werden wir in dieser Arbeit in der  $SU(2)_V$ -Näherung  $m = m_u = m_d$  arbeiten: die kleinen Brechungseffekte sind proportional zu dem kleinen Massenunterschied  $m_d - m_u$  und, obwohl interessant, wenn man bestimmte Prozesse studiert, sind sie für den Zweck dieser Arbeit vernachlässigbar. Für  $N_f = 3$  ist der Wert der  $s$ -Masse (130 MeV) zwar noch klein im Vergleich zu vielen Resonanzen, dennoch ist er von derselben Größenordnung wie  $\Lambda_{YM}$ ,  $m_s \sim \Lambda_{YM} \gg m$ . Das bedeutet, dass die explizite Brechung durch die  $s$ -Masse in der Regel nicht vernachlässigbar ist.

Als letzter Punkt beschreiben wir kurz ein physikalisches Bild, das im Rahmen des berühmten Nambu-Jona-Lasinio (NJL)-Modells entsteht [23] und das die Punkte (e) und (f) vereint. Die spontane Symmetriebrechung von  $SU(N_f)_A$  kann als Folge der dynamischen Erzeugung einer effektiven Quarkmasse beschrieben werden. Die Wechselwirkung eines Quarks mit dem nicht-trivialen QCD-Vakuum bedeutet schematisch ( $N_f = 2$  als Beispiel):

$$m \simeq 5 \text{ MeV} \rightarrow m^* \simeq 300 \text{ MeV} \gg m. \quad (68)$$

Mit solch großen Quarkmassen ist deutlich, dass die Symmetrie unter  $SU(N_f)_A$ -Transformationen nicht einmal annähernd erfüllt ist:  $\partial^\mu A_\mu^a \propto \{m^*, t^a\} \neq 0$ . Diese massiven Quarks werden auch Quark-Konstituenten genannt. Sie sind effektive Quasi-Teilchen, die die Bestandteile von Mesonen und Baryonen darstellen. Zahlreiche Modelle benutzen erfolgreich diese Ideen, um die Phänomenologie der QCD im Niederenergiebereich von einem mikroskopischen Standpunkt zu erklären.

### 3.3 Konstruktion des Modells im mesonischen Sektor

Ein effektives, niederenergetisches hadronisches Modell muss die Eigenschaften (a)-(f) besitzen. Wir besprechen die Einzelheiten der Punkte (a)-(f) unter dem Standpunkt eines mesonischen Modells, das (pseudo)skalare und (axial)vektorielle Felder enthält. Der Zusammenhang zwischen diesen Symmetrien wird uns die Möglichkeit bieten, ein Kriterium zu formulieren, das das effektive Modell wesentlich vereinfacht.

#### 3.3.1 Confinement

Wegen des Confinements arbeiten wir mit Meson-Feldern (Matrizen  $\Phi, R, \dots$ , siehe unten), die farbneutral sind:  $\Phi \rightarrow \Phi, R \rightarrow R, \dots$ . Aus diesem Grund ist die Symmetrie unter  $SU(N_c)_c$  aus Abschnitt 3.2 vom Anfang an trivial erfüllt. Dennoch ist die Large- $N_c$  Abhängigkeit in den Parametern versteckt: die Parameter skalieren mit inversen Potenzen von  $N_c$ , wie im Verlauf dieses Abschnittes erklärt wird.

### 3.3.2 Eichsektor

Wir brauchen auch auf dem confinierten Niveau die korrekte Beschreibung der Spuranomalie und der Entstehung einer Dimension im Modell. Wir führen zu diesem Zweck ein Skalarfeld  $G$  ein, das die Physik der Spuranomalie enthält.

Intuitiv gibt es die Entsprechung

$$G^4 \sim G_{\mu\nu}^a G^{a,\mu\nu}, \quad (69)$$

wobei  $G$  ein kollektives Feld ist, das die Gluonen beschreibt. Wie in Ref. [24] gezeigt wurde, erfüllt die folgende Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}_{dil} = \frac{1}{2}(\partial_\mu G)^2 - V_{dil}(G), \quad (70)$$

mit

$$V_{dil}(G) = \frac{1}{4} \frac{m_G^2}{\Lambda_G^2} \left[ G^4 \ln \left( \frac{G}{\Lambda_G} \right) - \frac{G^4}{4} \right] \quad (71)$$

die gewünschten Eigenschaften. Wegen des logarithmischen Terms ist die Dilatationssymmetrie

$$G(x) \rightarrow G'(x') = \lambda G(x) \text{ und } x^\mu \rightarrow \lambda^{-1} x^\mu$$

explizit gebrochen. Die Divergenz des Noether-Stroms lautet nun:

$$\partial_\mu J^\mu = T_\mu^\mu = -\frac{1}{4} \frac{m_G^2}{\Lambda_G^2} G^4. \quad (72)$$

Es gibt eine klare Entsprechung zu Gl. (40). Wenn man den Vakuumerwartungswert berechnet, gilt

$$\langle T_\mu^\mu \rangle = \left\langle -\frac{1}{4} \frac{m_G^2}{\Lambda_G^2} G^4 \right\rangle = -\frac{1}{4} \frac{m_G^2}{\Lambda_G^2} G_0^4 \equiv -\left\langle \frac{11N_c}{48} \frac{\alpha_s}{\pi} G_{\mu\nu}^a G^{a,\mu\nu} \right\rangle. \quad (73)$$

Der Wert  $G_0 = \Lambda_G$  entspricht dem Minimum des Potentials  $V_{dil}(G)$ . Das impliziert, dass

$$\langle T_\mu^\mu \rangle = -\frac{1}{4} m_G^2 \Lambda_G^2. \quad (74)$$

Wenn man das Feld  $G$  um  $G_0$  verschiebt,  $G \rightarrow G_0 + G$ , und wie üblich eine Taylor-Entwicklung durchführt, kann die Masse des Feldes  $G$  bestimmt werden: sie lautet einfach  $m_G$ . Dieses Teilchen ist der berühmte skalare Glueball, d.h. der leichteste gebundene Zustand, der aus Gluonen besteht. Die Existenz dieses Zustandes wurde in zahlreichen Gitter-Simulationen bestätigt [14], und der numerische Wert lautet  $m_G \sim 1.5\text{-}1.7$  GeV. Ein guter experimenteller Kandidat ist die Resonanz  $f_0(1500)$ : obwohl Beimischungen von Quarkonia erwartet werden (sie entstehen auf eine natürliche Weise, sobald Quarksfreiheitsgrade berücksichtigt werden), zeigen viele Modelle, dass diese Resonanz dominant aus Gluonen besteht [25] (siehe auch die Review-Artikel in Ref. ([26])).

Die Verbindung mit dem Yang-Mills-Sektor der QCD kann auch numerisch benutzt werden. Gittersimulationen und QCD-Summenregeln zeigen, dass

$$\left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G_{\mu\nu}^a G^{a,\mu\nu} \right\rangle = (200\text{-}600 \text{ MeV})^4. \quad (75)$$

Das impliziert den folgenden Wert für  $\Lambda_G^2$ :

$$\Lambda_G^2 = \frac{11}{4m_G^2} \left\langle \frac{\alpha_s}{2} G_{\mu\nu}^a G^{a,\mu\nu} \right\rangle \simeq \frac{(0.25\text{-}0.8 \text{ GeV})^4}{m_G^2} = (0.23\text{-}0.7 \text{ GeV})^2, \quad (76)$$

wobei im letzten Schritt der numerische Wert  $m_G \simeq 1.5$  GeV benutzt wurde.

Die Diskussion über Gluebälle kann verallgemeinert werden: es wird nämlich nicht nur ein einziger Glueball erwartet, sondern eine unendliche Reihe mit wachsenden Massen. Der skalare Glueball ist



besonders wichtig, weil er der leichteste Glueball ist und weil er mit der Spuranomalie verbunden ist. Es ist aber nicht schwierig, weitere skalare und pseudoskalare Gluebälle mitzunehmen:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{dil} + \sum_k \alpha_k G_k^2 G^2 + \sum_{k,l} \beta_{k,l} G_k^2 G_l^2, \quad (77)$$

wobei die Konstanten  $\alpha_k$  die Wechselwirkungen mit dem leichtesten Glueball  $G$  und  $\beta_{k,l}$  Selbstwechselwirkungen und gegenseitige Wechselwirkungen darstellen. (Gluebälle mit anderen Quantenzahlen können auch auf eine ähnliche Art eingeführt werden). Es wäre interessant, auf diese Weise das Glueballspektrum zu studieren; es ist aber nicht das Ziel dieser Arbeit. Da Gittersimulationen zeigen, dass weitere Gluebälle oberhalb 2 GeV liegen, können diese weiteren Zustände in den folgenden Erwägungen ausgelassen werden.

Als letzten Punkt beschreiben wir die Large- $N_c$  Abhängigkeit der Parameter. Der Parameter  $m_G$  ist  $N_c$  unabhängig, damit die Glueballmasse korrekterweise wie  $N_c^0$  skaliert. Der Skalenfaktor  $\Lambda_G$  hingegen skaliert wie  $N_c$ , damit die  $G^4$ -Wechselwirkung wie  $1/N_c^2$  skaliert. Zusammengefasst gilt:

$$m_G \propto N_c^0, \quad \Lambda_G \propto N_c. \quad (78)$$

Die Koeffizienten  $\alpha_k$  und  $\beta_{k,l}$  in Gl. (77) skalieren wie  $1/N_c^2$ .

### 3.3.3 Die Einführung von skalaren und pseudoskalaren Quark-Antiquark-Mesonen

Wir führen skalare und pseudoskalare Felder ein, die in der Meson-Matrix  $\Phi$  eingebettet werden. Die Matrix, die die Quarkfelder beschreibt, lautet:

$$\Phi_{ij} \equiv \sqrt{2} \bar{q}_{j,R} q_{i,L}. \quad (79)$$

Die Äquivalenz  $\equiv$  bedeutet, dass  $\Phi$  und  $\sqrt{2} \bar{q}_{j,R} q_{i,L}$  gleich unter chiralen Transformationen transformieren. Es bedeutet aber nicht, dass die Meson-Matrix  $\Phi$  aus einem perturbativen Quark-Antiquark-Paar besteht. Die Matrix  $\Phi$  ist ein nicht-perturbatives Objekt. Man kann sich die physikalische Situation wie folgt ausmalen: ein findet eine nicht-perturbative Modifikation der perturbativen Quarks durch Gluonen und Quark-Antiquark-Vakuumpaare statt, die den Quarks eine effektive Masse von ungefähr 300 MeV verleiht. Die Matrix  $\Phi$  kann in guter Näherung als ein zusammengesetztes Objekt interpretiert werden, das aus einem effektiven Quark und einem effektiven Antiquark besteht. Es ist wichtig zu bemerken, dass die nichtperturbative Modifikation die Transformationseigenschaften unverändert lässt. Aus diesem Grund ist es ausreichend, die Identifizierung  $\Phi_{ij} \equiv \sqrt{2} \bar{q}_{j,R} q_{i,L}$  zu machen, wenn man nur an den Transformationseigenschaften interessiert ist.

Da die Quarkfelder unter einer chiralen Transformation wie  $q_{i,L} \rightarrow U_L q_{i,L}$ ,  $q_{i,R} \rightarrow U_R q_{i,R}$  transformieren, transformiert die Matrix  $\Phi$  wie folgt:

$$\Phi \rightarrow U_L \Phi U_R^\dagger. \quad (80)$$

[Die  $U_V(1)$ -Transformation wird trivial: für  $U_L = U_R = e^{i\theta t^0}$  gilt  $\Phi \rightarrow \Phi$ ].

Die Matrix  $\Phi$  kann auch als

$$\begin{aligned} \Phi_{ij} &\equiv \sqrt{2} \bar{q}_{j,R} q_{i,L} = \sqrt{2} \bar{q}_j P_L P_L q_i = \sqrt{2} \bar{q}_j P_L q_i \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{q}_j q_i - \bar{q}_j \gamma^5 q_i) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{q}_j q_i + i \bar{q}_j i \gamma^5 q_i) \end{aligned} \quad (81)$$

geschrieben werden, wobei  $P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)$  und  $P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)$  die Chiralitätsprojektoren sind. Man erkennt in der letzten Gleichung den skalaren und den pseudoskalaren Strom:

$$S_{ij} \equiv \bar{q}_j q_i, \quad \mathcal{P}_{ij} \equiv \bar{q}_j i \gamma^5 q_i, \quad (82)$$

und letztendlich

$$\Phi = \mathcal{S} + i\mathcal{P} . \quad (83)$$

Die Matrizen  $\mathcal{S}$  und  $\mathcal{P}$  sind hermitesch. Daher können sie auch als

$$\mathcal{S} = S^a t^a, \quad \mathcal{P} = P^a t^a \quad (84)$$

$$S^a \equiv \sqrt{2} \bar{q} t^a q, \quad P^a \equiv \sqrt{2} \bar{q} i \gamma^5 t^a q. \quad (85)$$

ausgedrückt werden, wobei  $t^a$  die Generatoren der Gruppe  $U(N_f)$  sind ( $a = 0, 1, \dots, N_f^2 - 1$ ).

Eine wichtige Nebenbemerkung betrifft noch die Identifizierung  $\Phi_{ij} \equiv \sqrt{2} \bar{q}_{j,R} q_{i,L}$  (und die daraus stammenden Identifizierungen in Gl. (85)). Eine Möglichkeit, die Verbindung zwischen dem nicht-perturbativen Objekt  $\Phi_{ij}$  und den perturbativen Strömen  $\sqrt{2} \bar{q}_{j,R} q_{i,L}$  besser zu verstehen, besteht darin,  $\Phi_{ij}$  als nicht-lokale Zusammensetzung von  $\sqrt{2} \bar{q}_{j,R} q_{i,L}$  darzustellen:

$$\Phi_{ij} = \int d^4 y \sqrt{2} \bar{q}_{j,R}(x+y/2) q_{i,L}(x-y/2) f(y) , \quad (86)$$

wobei  $f(y)$  eine nicht-perturbative Vertex-Funktion ist. (Der perturbative Limes entspricht der trivialen Wahl  $f(y) = \delta(y)$ .) Eine Klasse von quark-basierten Modellen beruht auf solchen nichtlokalen Feldkonfigurationen [27]. Es ist aber deutlich, dass die Flavor-Transformationen unverändert bleiben. (Das ist nicht der Fall für lokale Eichtransformationen; es ist aber möglich, den nicht-lokalen Strom lokal farbinvariant zu machen, siehe z.B. Ref. [28]. Dieser Punkt ist aber für unsere Studie nicht relevant.)

**Tabelle 2:** Transformationseigenschaften von  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{S}$  und  $\Phi$ .

	$\mathcal{P} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=0}^8 P^i \lambda_i$	$\mathcal{S} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=0}^8 S^i \lambda_i$	$\Phi = \mathcal{S} + i\mathcal{P}$
Elemente	$\mathcal{P}_{ij} \equiv \bar{q}_j i \gamma^5 q_i$	$\mathcal{S}_{ij} \equiv \bar{q}_j q_i$	$\Phi_{ij} \equiv \sqrt{2} \bar{q}_{j,R} q_{i,L}$
Ströme	$P^i \equiv \bar{q} i \gamma^5 \frac{\lambda_i}{\sqrt{2}} q$	$S^i \equiv \bar{q} \frac{\lambda_i}{\sqrt{2}} q$	$\Phi^i \equiv \sqrt{2} \bar{q}_R \frac{\lambda_i}{\sqrt{2}} q_L$
P	$-\mathcal{P}(x^0, -\mathbf{x})$	$\mathcal{S}(x^0, -\mathbf{x})$	$\Phi^\dagger(x^0, -\mathbf{x})$
C	$\mathcal{P}^t$	$\mathcal{S}^t$	$\Phi^t$
$U(N_f)_V$	$U_V \mathcal{P} U_V^\dagger$	$U_V \mathcal{S} U_V^\dagger$	$U_V \Phi U_V^\dagger$
$U(N_f)_A$	$\frac{1}{2i} (U_A \Phi U_A - U_A^\dagger \Phi^\dagger U_A^\dagger)$	$\frac{1}{2} (U_A \Phi U_A + U_A^\dagger \Phi^\dagger U_A^\dagger)$	$U_A \Phi U_A$
$U(N_f)_R \times U(N_f)_L$	$\frac{1}{2i} (U_L \Phi U_R^\dagger - U_R \Phi^\dagger U_L^\dagger)$	$\frac{1}{2} (U_L \Phi U_R^\dagger + U_R \Phi^\dagger U_L^\dagger)$	$U_L \Phi U_R^\dagger$

Es wird zuerst der chirale Limes  $m_i \rightarrow 0$  betrachtet. In diesem Fall ist die chirale Symmetrie der QCD exakt. Insofern muss auch eine Lagrange-Dichte  $\mathcal{L}_\Phi$  für das Feld  $\Phi$  hingeschrieben werden, die diese Symmetrie exakt erfüllt (die  $U_A(1)$ -Anomalie wird zuerst vernachlässigt):

$$\mathcal{L}_\Phi = \text{Tr} \left[ (\partial^\mu \Phi)^\dagger (\partial_\mu \Phi) - m_0^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda_2 (\Phi^\dagger \Phi)^2 \right] - \lambda_1 (\text{Tr}[\Phi^\dagger \Phi])^2 . \quad (87)$$

Das ist das übliche  $\sigma$ -Modell der QCD mit (pseudo)skalaren Quarkonia, das als wichtiges Mittel zur Erforschung der QCD gedient hat.

Normalerweise werden weitere Terme, wie z.B.  $(\text{Tr}[\Phi^\dagger \Phi])^6$ , nicht mitgenommen, da man die Renormierbarkeit der effektiven Theorie fordert. Diese Motivation kann aber nicht gelten: eine effektive Theorie ist nicht bis zu einer hohen Energieskala (wie  $M_{\text{Planck}}$ ) gültig. Es spricht in dieser Hinsicht nichts dagegen, weitere Terme hinzuzufügen, die, obwohl nicht renormierbar, die Symmetrie erfüllen. In der chiralen Störungstheorie, wo die Energiegrenze so niedrig ist, dass nur die Pionen mitgenommen werden (siehe Abschnitt 2), werden tatsächlich -prinzipiell- unendlich viele Terme mit beliebiger

Dimension hingeschrieben, obwohl aus praktischen Gründen eine Rechnung nur bis zu der dritten Ordnung durchgeführt werden kann. Auch nicht-renormierbare Terme werden berücksichtigt, und ein Power-Counting-Schema wird eingeführt.

Die Situation ändert sich, wenn man auch das schon diskutierte Dilaton-Feld  $G$  mitnimmt. Das erlaubt, ein Kriterium zur Erstellung eines hadronischen Modells zu formulieren.

### 3.3.4 Ein Kriterium für die Konstruktion eines hadronischen Modells

Die vollständige Lagrange-Dichte mit dem Dilaton-Feld  $G$ , mit der Quarkonium-Matrix  $\Phi$  und mit anderen Quarkonium-Feldern hat die schematische Form

$$\mathcal{L}_{had} = \mathcal{L}_{had}(G, \Phi, \dots) = \frac{1}{2}(\partial_\mu G)^2 - V_{dil}(G) + \text{Tr} [(\partial^\mu \Phi)^\dagger (\partial_\mu \Phi)] - V_{had}(G, \Phi, \dots), \quad (88)$$

wobei ... für weitere Felder steht. Sie können schwerere skalare und pseudoskalare Multipletts  $\Phi_k$  mit  $k = 1, 2, \dots$ , weitere Glueball-Felder wie in Gl. (77), Felder mit anderen Quantenzahlen (wie die in Kürze zu betrachtenden (axial)vektoriellen Felder), usw. sein.

Wir fordern die Gültigkeit der folgenden zwei Bedingungen:

(1) Im chiralen Limes ( $m_i = 0$ ) soll es im  $\mathcal{L}_{had}$  einen einzigen dimensionsbehafteten Parameter geben:  $\Lambda_G$ , der im Potential  $V_{dil}(G)$  auftaucht. Dadurch wird die Spuranomalie, genau wie in der QCD, im Eichsektor generiert.

(2) Das Potential  $V_{had}(G, \Phi, \dots)$  soll keine Singularitäten haben, wenn die Felder einen endlichen Wert annehmen.

Diese zwei Bedingungen sind allgemein, dennoch schränken sie  $\mathcal{L}_{had}$  auf eine entscheidende Art und Weise ein. Zum Beispiel verbietet Punkt (1) den Term

$$\alpha(\text{Tr}[\Phi^\dagger \Phi])^6, \quad (89)$$

weil der Parameter  $\alpha$  Dimension  $\text{Energie}^{-2}$  hat.

Der analoge Term

$$\frac{\beta}{G^2}(\text{Tr}[\Phi^\dagger \Phi])^6 \quad (90)$$

enthält die dimensionslose Konstante  $\beta$  und ist daher im Einklang mit Punkt (1). Dadurch wird aber Punkt (2) verletzt: für  $G = 0$  ist dieser Term singulär. Die Gültigkeit von Punkt (2) ist auch insofern wichtig, weil mit wachsender Temperatur das Gluonkondensat  $G_0$  verschwindet, was die Anwesenheit von Termen wie  $\frac{\beta}{G^2}(\text{Tr}[\Phi^\dagger \Phi])^6$  problematisch macht.

Man ist gezwungen, nur Terme mit Dimension exakt 4 mitzunehmen. Außerdem ist die Kopplung mit dem Dilaton-Feld festgelegt. Mit den Feldern  $G$  und  $\Phi$  lautet die allgemeinste Lagrange-Dichte, in der die Bedingungen (1) und (2) (und natürlich die chirale Symmetrie) erfüllt sind :

$$\mathcal{L}_{G\Phi} = \frac{1}{2}(\partial_\mu G)^2 - V_{dil}(G) + \text{Tr} \left[ (\partial^\mu \Phi)^\dagger (\partial_\mu \Phi) - aG^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda_2 (\Phi^\dagger \Phi)^2 \right] - \lambda_1 (\text{Tr}[\Phi^\dagger \Phi])^2. \quad (91)$$

Der zweite Term  $aG^2 \Phi^\dagger \Phi$  beschreibt auch die Wechselwirkung zwischen dem Glueball und den (pseudo)skalaren Mesonen. Die Verbindung mit  $\mathcal{L}_\Phi$  von Gl. (87) ist klar:

$$m_0^2 = aG_0^2, \quad (92)$$

wobei -wie erfordert-  $a$  dimensionslos ist. (Wenn Quarkonia anwesend sind, ist  $G_0 \simeq \Lambda_G$ , aber nicht exakt gleich, da Mischungen auftreten.) Es ist daher nicht die Renormierbarkeit, sondern die Dilatationsinvarianz, die uns zwingt, nur Terme nur mit Ordnung (exakt) 4 mitzunehmen.

Die Large- $N_c$  Abhängigkeit der Parameter steht fest:

$$a \propto N_c^{-2} \rightarrow m_0^2 \propto N_c^0 , \quad (93)$$

$$\lambda_2 \propto N_c^{-1} , \quad (94)$$

$$\lambda_1 \propto N_c^{-2} , \quad (95)$$

Der  $\lambda_2$ -Term geht wie  $N_c^{-1}$ , da er eine Vierwechselwirkung von Quark-Antiquark-Zuständen beschreibt. Der  $\lambda_1$ -Term wird um einen weiteren Faktor  $N_c$  unterdrückt und skaliert wie  $N_c^{-2}$ : das ist so, weil der Term aus dem Produkt von zwei getrennten Spuren gebildet ist. Auf dem mikroskopischen Quark-Gluon-Niveau sind weitere Large- $N_c$  unterdrückte transversale Gluonen notwendig, um diesen Term zu generieren.

### 3.3.5 Die Einführung von vektoriellen und axialvektoriellen Quark-Antiquark-Mesonen

Die frühere Argumentation bezüglich  $\mathcal{L}_{had}(G, \Phi, \dots)$  ist prinzipiell gültig, wenn alle mesonischen Felder mitberücksichtigt werden. Es handelt sich nämlich um eine unendliche Anzahl von Gluebällen und Quarkonia. Es ist aber natürlich zu erwarten, dass massive Felder (mit Masse  $\gtrsim 2$  GeV) keinen großen Einfluss auf die leichten Resonanzen haben.

Die vektoriellen und axialvektoriellen Felder sind leicht ( $\lesssim 1.4$  GeV) und müssen mitgenommen werden, damit eine konsistente und vollständige Beschreibung der mesonischen Niederenergiephysik erfolgen kann. In vielen Studien der hadronischen Welt wurden nur (pseudo)skalare Mesonen berücksichtigt und die (axial)vektoriellen Mesonen vernachlässigt. Das ist unserer Ansicht nach weder qualitativ noch quantitativ korrekt: die Einführung von (axial)vektoriellen Freiheitsgraden beeinflusst stark die physikalischen Eigenschaften von (pseudo)skalaren Mesonen. Es ist aus diesem Grund nicht möglich, diese Felder auszulassen. Dabei soll nicht vergessen werden, dass die Vektormesonen sogar leichter als die Skalarmesonen sind: sobald die Skalare eingeführt werden, was in einem linearen Schema natürlich ist, ist es nicht erlaubt, die Vektorfelder zu vernachlässigen. Die Axialvektormesonen treten dann als chirale Partner der Vektormesonen auf.

Eine erste allgemeine Studie des Problems hat es in Ref. [29] gegeben. In Ref. [30] wurde das chirale Modell für den Fall  $N_f = 2$  in dem sogenannten chiral-lokalen Limes untersucht und in Ref. [31] die (axial)vektorielle Propagatoren berechnet wurden. Jedoch ist es bemerkenswert, dass ein hadronisches Modell, das auf der einfachen Idee der globalen chiralen Symmetrie und Skaleninvarianz basiert, erst neulich erforscht wurde, siehe Ref. [4, 5], deren Resultate wir noch später diskutieren werden.

Wir widmen uns der Konstruktion einer Lagrange-Dichte, die die vorher genannten Prinzipien erfüllt und die (Axial)Vektormesonen enthält. Auf dem mathematischen Niveau führt man die folgenden  $N_f \times N_f$  Matrizen  $R_\mu$  und  $L_\mu$  ein:

$$R_{ij}^\mu \equiv \sqrt{2} \bar{q}_{j,R} \gamma^\mu q_{i,R} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{q}_j \gamma^\mu q_i - \bar{q}_j \gamma^5 \gamma^\mu q_i) , \quad (96)$$

$$L_{ij}^\mu \equiv \sqrt{2} \bar{q}_{j,R} \gamma^\mu q_{i,R} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{q}_j \gamma^\mu q_i + \bar{q}_j \gamma^5 \gamma^\mu q_i) . \quad (97)$$

Sie transformieren unter chiralen Transformation wie

$$R^\mu \rightarrow U_R R^\mu U_R^\dagger , L^\mu \rightarrow U_L L^\mu U_L^\dagger . \quad (98)$$

Die Matrizen  $R_\mu$  und  $L_\mu$  können wiederum als Funktion der vektoriellen und axialvektoriellen Matrizen  $V_\mu$  und  $A_\mu$  ausgedrückt werden

$$R^\mu = V^\mu - A^\mu , \quad (99)$$

$$L^\mu = V^\mu + A^\mu , \quad (100)$$

wobei:

$$V_{ij}^\mu \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_j \gamma^\mu \bar{q}_i = V^{\mu,a} t^a ; V^{\mu,a} \equiv \sqrt{2} \bar{q} \gamma^\mu t^a q ; \quad (101)$$

$$A_{ij}^\mu \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_j \gamma^5 \gamma^\mu \bar{q}_i = A^{\mu,a} t^a ; A^{\mu,a} \equiv \sqrt{2} \bar{q} \gamma^5 \gamma^\mu t^a q . \quad (102)$$

Die Tabellen 3 und 4 zeigen die Transformationen der Felder  $R^\mu$ ,  $L^\mu$  und  $V_\mu$  und  $A_\mu$ .

**Tabelle 3:** Transformationen von  $R_\mu$  und  $L_\mu$

	$R_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=0}^8 R_\mu^i \lambda_i$	$L_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=0}^8 L_\mu^i \lambda_i$
Elemente	$R_{ij}^\mu \equiv \sqrt{2} \bar{q}_{j,R} \gamma^\mu q_{i,R}$	$L_{ij}^\mu \equiv \sqrt{2} \bar{q}_{j,L} \gamma^\mu q_{i,L}$
Ströme	$R_\mu^i \equiv \bar{q}_R \gamma^\mu \frac{\lambda_i}{\sqrt{2}} q_R$	$L_\mu^i \equiv \bar{q}_L \gamma^\mu \frac{\lambda_i}{\sqrt{2}} q_L$
$P$	$g^{\mu\nu} L_\mu(x^0, -\mathbf{x})$	$g^{\mu\nu} R_\mu(x^0, -\mathbf{x})$
$C$	$-L_\mu^t$	$R_\mu^t$
$U(N_f)_V$	$U_V R_\mu U_V^\dagger$	$U_V L_\mu U_V^\dagger$
$U(N_f)_A$	$U_A R_\mu U_A^\dagger$	$U_A L_\mu U_A^\dagger$
$U(N_f)_R \times U(N_f)_L$	$U_R R_\mu U_R^\dagger$	$U_L L_\mu U_L^\dagger$

**Tabelle 4:** Transformationseigenschaften von  $V_\mu$  and  $A_\mu$

	$V_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=0}^8 V_\mu^i \lambda_i$	$A_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=0}^8 A_\mu^i \lambda_i$
Elemente	$V_{ij}^\mu \equiv \sqrt{2} \bar{q}_j \gamma^\mu q_i$	$A_{ij}^\mu \equiv \sqrt{2} \bar{q}_j \gamma^5 \gamma^\mu q_i$
Ströme	$V^i \equiv \bar{q} \gamma^\mu \frac{\lambda_i}{\sqrt{2}} q$	$A^i \equiv \bar{q} \gamma^5 \gamma^\mu \frac{\lambda_i}{\sqrt{2}} q$
$P$	$g^{\mu\nu} V_\mu(x^0, -\mathbf{x})$	$-g^{\mu\nu} A_\mu(x^0, -\mathbf{x})$
$C$	$-V_\mu^t$	$A_\mu^t$

Es wird oft behauptet, dass die Parität eines Vektormesons negativ ist. Das stimmt, wenn man sich auf die räumlichen Komponenten bezieht:  $\rho^i(t, \mathbf{x}) \rightarrow -\rho^i(t, -\mathbf{x})$ . Die nullte Komponente transformiert hingegen mit positiver Parität:  $\rho^0(t, \mathbf{x}) \rightarrow \rho^0(t, -\mathbf{x})$ . In einem dichten Medium kondensieren eben die Komponenten  $\omega^0$  und  $\rho^0$ .

Die Lagrange-Dichte  $\mathcal{L}_{AV}$ , die die (Axial)Vektormesonen einschließt, folgt aus denselben Prinzipien wie der (pseudo)skalaren Sektor: nur Terme mit Dimension (exakt) 4 werden berücksichtigt. Sie kann als Summe von vier Termen aufgestellt werden:

$$\mathcal{L}_{AV} = \mathcal{L}_{2,AV} + \mathcal{L}_{3,AV} + \mathcal{L}_{4,AV} + \mathcal{L}_{PS,AV} , \quad (103)$$

wobei 2,3,4 die Anzahl der Felder signalisiert und  $\mathcal{L}_{PS,AV}$  die Wechselwirkung mit den (pseudo)skalaren Mesonen darstellt.

Der Term  $\mathcal{L}_{2,AV}$  lautet

$$\mathcal{L}_{2,AV} = -\frac{1}{4} \text{Tr}[(L^{\mu\nu})^2 + (R^{\mu\nu})^2] + \frac{b}{2} G^2 \text{Tr}[(L^\mu)^2 + (R^\mu)^2] , \quad (104)$$

wobei die Feldtensoren  $L^{\mu\nu}$  und  $R^{\mu\nu}$  durch

$$L^{\mu\nu} = \partial^\mu L^\nu - \partial^\nu L^\mu, \quad R^{\mu\nu} = \partial^\mu R^\nu - \partial^\nu R^\mu \quad (105)$$

gegeben sind. Dieser Term beschreibt die Propagation der (Axial)Vektormesonen. Man erkennt aus  $\mathcal{L}_{2,AV}$  einen Massenterm für diese Felder: wenn das Gluonfeld kondensiert, gilt

$$m_1^2 = bG_0^2, \quad (106)$$

wobei  $m_1$  der Beitrag zur (axial)vektoriellen Masse ist, der aus dem Gluon-Kondensat  $G_0$  stammt. Weitere Beiträge zur Masse der (Axial)Vektormesonen stammen vom Quark-Antiquark-Kondensat  $\phi$ , siehe Ref. [4] für Details.

Die Lagrange-Dichten  $\mathcal{L}_{3,AV}$  und  $\mathcal{L}_{4,AV}$  enthalten 3- und 4-Punkt-Vertices von (Axial)Vektormesonen:

$$\mathcal{L}_{3,AV} = -2ig_2 (\text{Tr}[L_{\mu\nu}[L^\mu, L^\nu]] + \text{Tr}[R_{\mu\nu}[R^\mu, R^\nu]]) , \quad (107)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{4,AV} = & g_3 \{ \text{Tr}[L^\mu L^\nu L_\mu L_\nu] + \text{Tr}[R^\mu R^\nu R_\mu R_\nu] \} + \\ & g_4 \{ \text{Tr}[L^\mu L_\mu L^\nu L_\nu] + \text{Tr}[R^\mu R_\mu R^\nu R_\nu] \} \\ & g_5 \text{Tr}[R^\mu R_\mu] \text{Tr}[L^\mu L_\mu] + \\ & g_6 \{ \text{Tr}[L_\mu L^\mu] \text{Tr}[L_\mu L^\mu] + \text{Tr}[R_\mu R^\mu] \text{Tr}[R_\mu R^\mu] \} . \end{aligned} \quad (108)$$

Es ist wichtig zu betonen, dass  $\mathcal{L}_{4,AV}$  keinen Einfluss auf die Zerfälle hat, die wir später untersuchen werden.

Der letzte Term von Gl. (103) beschreibt die Wechselwirkung der (Axial)Vektormesonen mit den (Pseudo)Skalarmesonen:

$$\mathcal{L}_{PS,AV} = \text{Tr} [(ig_1(\Phi R^\mu - L^\mu \Phi))^\dagger (\partial^\mu \Phi)] + \text{Tr} [(\partial^\mu \Phi)^\dagger (ig_1(\Phi R^\mu - L^\mu \Phi))] \quad (109)$$

$$+ \text{Tr} [(ig_1(\Phi R^\mu - L^\mu \Phi))^\dagger (ig_1(\Phi R^\mu - L^\mu \Phi))] + \frac{h_1}{2} \text{Tr} [\Phi \Phi^\dagger] \text{Tr} [L_\mu L^\mu + R_\mu R^\mu] \quad (110)$$

$$+ h_2 \text{Tr} [\Phi^\dagger L_\mu L^\mu \Phi + \Phi R_\mu R^\mu \Phi] + 2h_3 \text{Tr} [\Phi R_\mu \Phi^\dagger L^\mu] . \quad (111)$$

(Der  $g_1^2$ -Term ist nicht unabhängig und könnte in die Konstanten  $h_2$  und  $h_3$  absorbiert werden, aber diese Form wird bevorzugt, weil der (chiral-)lokale Limes, der oft in der Literatur studiert wurde, einfacher ist, siehe später).

Die Large- $N_c$  Abhängigkeit der Parameter lautet:

$$\begin{aligned} g_1, g_2, g & \propto N_c^{-1/2}, \\ h_2, h_3, g_3, g_4 & \propto N_c^{-1}, \\ h_1, g_5, g_6 & \propto N_c^{-2}, \\ b & \propto N_c^{-2} \rightarrow m_1^2 \propto N_c^0. \end{aligned} \quad (112)$$

### 3.3.6 $U(1)_A$ -Anomalie

Die  $U(1)_A$ -Anomalie wird in Betracht gezogen, indem man den folgenden Term zur Lagrange-Dichte addiert:

$$\mathcal{L}_{U(1)_A} = c(\det \Phi^+ + \det \Phi) . \quad (113)$$

Dieser Term ist invariant unter  $SU(N_f)_R \times SU(N_f)_L$ , das die Transformation  $\Phi \rightarrow U_L \Phi U_R^\dagger$  generiert. Das ist einfach zu beweisen, indem man die Eigenschaft  $\det[ABC] = \det[A] \det[B] \det[C]$  zusammen mit der Einheit der Determinante einer  $SU(N)$ -Matrix ausnutzt.

Der Term in Gl. (113) ist aber nicht invariant unter  $U(1)_A$ . Unter einer  $U(1)_A$ -Transformation  $\Phi \rightarrow e^{2i\nu t^0} \Phi$  bekommt man nämlich:

$$c(\det \Phi^+ + \det \Phi) \rightarrow c(e^{-i\nu\sqrt{2N_f}} \det \Phi^+ + e^{i\nu\sqrt{2N_f}} \det \Phi) . \quad (114)$$

Dieser Term trägt zur Masse der isoskalaren-pseudoskalaren Bosonen bei: die Masse verschwindet auch im chiralen Limes nicht. Diese Felder sind also keine Goldstone-Bosonen. Das ist verständlich, da die Symmetrie ohnehin auf dem hadronischen Niveau gebrochen ist. Im pseudoskalaren Spektrum ist tatsächlich die Resonanz  $\eta'$  ( $\sim 1$  GeV) wesentlich schwerer als die anderen pseudoskalaren Resonanzen: der Grund dafür ist die axiale Anomalie.

Der Parameter  $c$  skaliert im Large- $N_c$ -Limes auf eine  $N_f$ -abhängige Weise:  $c \propto N_c^{-N_f/2}$ . Für  $N_f \geq 2$  verschwindet er schneller als die übliche Skalierung der anderen Parameter. Das bedeutet, dass für Large- $N_c$  die Anomalie vernachlässigbar ist. Das entsprechende Meson ist dann ein Goldstone-Boson für  $N_c \gg 1$ .

Es ist wichtig anzumerken, dass für  $N_f \neq 4$  der Parameter  $c$  dimensionsbehaftet ist. Das ist eine Ausnahme der diskutierten Regel. Das ist aber möglich, da die Anomalie auch von dem Eichsektor stammt. Es ist in dieser Hinsicht nicht notwendig (obwohl nicht verboten), diesen Term mit einer passenden Potenz vom Dilatonfeld  $G$  zu multiplizieren. Der hier präsentierte Term in Gl. (114) ist nicht die einzige Möglichkeit, die axiale Anomalie zu beschreiben. Eine andere Möglichkeit erfolgt durch einen logarithmischen Term [32]. Weitere Studien dieses Sektors im Rahmen eines chiralen Modells sind möglich und interessant.

### 3.3.7 Spontane Symmetriebrechung

Um die spontane Symmetriebrechung zu diskutieren, reicht es für eine qualitative Studie, das Potential der Lagrange-Dichte  $\mathcal{L}_{G\Phi}$  von Gl. (91) entlang der Wahl  $\Phi = \sigma t^0$  zu studieren:

$$V(G, \sigma) = V_{dil}(G) + aG^2\sigma^2 + (\lambda_2 + \lambda_1)\sigma^4. \quad (115)$$

(In diesem Unterabschnitt wird die  $U_A(1)$ -Anomalie vernachlässigt). Eine vollständige Studie erfordert die Suche der Minima. Für unsere Zwecke muss Folgendes klargestellt werden:

- $a > 0 \rightarrow$  Minimum für  $G_0 \neq 0, \sigma_0 = 0$ .
- $a < 0 \rightarrow$  Minimum für  $G_0 \neq 0, \sigma_0 \neq 0$ .

Wenn  $\sigma_0$  nicht verschwindet, ist die spontane Symmetriebrechung der chiralen Symmetrie realisiert. Die Transformation  $SU(N_f)_A$  lässt das Vakuum nicht invariant. In diesem Fall gibt es eigentlich unendlich viele Minima, wenn man die anderen Isospinrichtungen betrachtet. Die Erhaltung der Parität und der  $SU(N_f)_V$ -Symmetrie erfordert aber, dass nur der Isospin-Singulett-Zustand  $\sigma$  kondensieren kann.

Man kann heuristisch wie folgt argumentieren:  $G_0 \sim \Lambda_G$ . (Das ist exakt, wenn  $a = 0$ , d.h. wenn der Glueball von den Quark-Antiquark-Zuständen entkoppelt). Dann gilt  $\sigma_0 \sim \sqrt{\frac{-a}{\lambda_2 + \lambda_1}}$ . Es wird deutlich, dass die spontane Symmetriebrechung durch die Brechung der Dilatationssymmetrie erzeugt wird. Die Dilatationssymmetrie ist in dieser Hinsicht die ‘treibende Kraft’ für alle Phänomene der niederenergetischen QCD.

### 3.3.8 Explizite Symmetriebrechung durch Quarkmassen

Die chirale Symmetriegruppe wird auch explizit durch die Quarkmassen gebrochen. Das Modell berücksichtigt diesen Punkt mit der Aufnahme des folgenden Terms:

$$\mathcal{L}_H = \text{Tr}[H(\Phi^+ + \Phi)] , \quad (116)$$

wobei

$$H = \text{diag}\{h_0^1, h_0^2, \dots, h_0^{N_f}\} \quad (117)$$

eine diagonale Matrix ist. Die Konstante  $h_0^k$  ist proportional zum Quadrat der  $k$ -ten Quarkmasse (z.B.,  $h_0^1 \propto m_u^2$ ). Die Large- $N_c$  Abhängigkeit der Parameter lautet  $h_0^i \propto N_c^{1/2}$ .

Es ist leicht zu prüfen, dass im allgemeinsten Fall alle Symmetrien verletzt werden, bis auf die triviale  $U(1)_V$ -Symmetrie. Ein wichtiger Limes ist  $H = h_0 1_{N_f}$ : die  $SU(N_f)_V$  bleibt in diesem Fall erhalten. Im Fall  $N_f = 2$  wird tatsächlich die Wahl  $H = h_0 1_2$  getroffen.

Die Existenz einer (auch infinitesimalen) Quarkmasse impliziert, dass die Minima nicht mehr entartet sind. In dem vereinfachten Fall  $H = h_0 1_2$  gibt es tatsächlich nur ein absolutes Minimum des Potentials: für  $a < 0$  entspricht dieses Minimum  $\sigma_0 > 0$ .

Es ist auch notwendig, die explizite Symmetriebrechung im (axial)vektoriellen Kanal in Betracht zu ziehen. Das erfolgt durch einen ähnlichen Term

$$\frac{\alpha}{2} \text{Tr}[H(L^\mu)^2 + (R^\mu)^2], \quad (118)$$

wobei die Matrix  $H$  in Gl. (117) definiert wurde und  $\alpha$  ein neuer Parameter ist. Wenn  $H \propto 1_{N_f}$  hat dieser zusätzlicher Term keinen Einfluss, weil er mit dem zweiten Term von Gl. (104) übereinstimmt, wenn  $G = G_0$  gesetzt wird. Wenn aber die explizite Flavor-Symmetriebrechung berücksichtigt wird, kann man durch Gl. (118) in Betracht ziehen, dass (axial)vektorielle Zustände, die aus schwere Quarks bestehen, auch eine größere Masse bekommen.

### 3.3.9 Die gesamte Lagrange-Dichte

Die bis zu diesem Punkt durchgeführte Analyse bringt uns zum Hauptresultat dieses Abschnittes. Man kann nun all die Teile zusammenfügen und die mesonische Lagrange-Dichte für eine beliebige Flavoranzahl  $N_f$  erstellen:

$$\mathcal{L}_{mes} = \mathcal{L}_{G\Phi} + \mathcal{L}_{AV} + \mathcal{L}_{U_A(1)} + \mathcal{L}_H. \quad (119)$$

Der Teil der Lagrange-Dichte, der für die Vakuumphysik relevant ist, wird explizit hingeschrieben:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{mes} = & \frac{1}{2}(\partial_\mu G)^2 - V_{dil}(G) \\ & + \text{Tr} \left[ (D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) - aG^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda_2 (\Phi^\dagger \Phi)^2 \right] - \lambda_1 (\text{Tr}[\Phi^\dagger \Phi])^2 \\ & + c(\det \Phi^\dagger + \det \Phi) + \text{Tr}[H(\Phi^\dagger + \Phi)] \\ & - \frac{1}{4} \text{Tr}[(L^{\mu\nu})^2 + (R^{\mu\nu})^2] + \frac{b}{2} G^2 \text{Tr}[(L^\mu)^2 + (R^\mu)^2] + \frac{\alpha}{2} \text{Tr}[H(L^\mu)^2 + (R^\mu)^2] \\ & - 2ig_2 (\text{Tr}[L_{\mu\nu}[L^\mu, L^\nu]] + \text{Tr}[R_{\mu\nu}[R^\mu, R^\nu]]) \\ & + \frac{h_1}{2} \text{Tr} [\Phi \Phi^\dagger] \text{Tr} [L_\mu L^\mu + R_\mu R^\mu] + \\ & + h_2 \text{Tr} [\Phi^\dagger L_\mu L^\mu \Phi + \Phi R_\mu R^\mu \Phi] + 2h_3 \text{Tr} [\Phi R_\mu \Phi^\dagger L^\mu] + \dots, \end{aligned} \quad (120)$$

wobei

$$D^\mu \Phi = \partial^\mu \Phi - ig_1 (L^\mu \Phi - \Phi R^\mu). \quad (121)$$

Der  $g_1$ -Term wurde in einer kovarianten Ableitung absorbiert. Die 4-Felder-Wechselwirkungsterme zwischen Vektorfeldern haben keinen Einfluss auf die Vakuumphysik und werden in Gl. (120) nicht explizit hingeschrieben.

Im chiralen Limes gibt es in Gl. (120) folgende 12 für die Vakuumphysik relevante freie Parameter:

$$\Lambda_G, \xi = \frac{m_G}{\Lambda_G}, a, \lambda_1, \lambda_2, b, g_1, g_2, c, h_1, h_2, h_3, \quad (122)$$



wobei die einzigen dimensionsbehafteten Parameter  $\Lambda_G$  und  $c$  sind. Außerdem gibt es die diagonale Matrix  $H = \text{diag}\{h_0^1, h_0^2, \dots, h_0^{N_f}\}$ , die  $N_f$  dimensionsbehaftete Parameter enthält. Wenn man z.B. vom Fall  $N_f = 2$  zum Fall  $N_f = 3$  übergeht, gibt es nur einen zusätzlichen Parameter,  $h_0^3$ .

Der chiral-lokale Limes entspricht der folgenden Wahl der Parameter:

$$g_1 = g_2, \quad g_3 = \frac{g_1^2}{2}; \quad g_4 = -\frac{g_1^2}{2}; \quad g_5 = g_6 = 0. \quad (123)$$

Es ist aber bekannt, dass dieses chirale lokale Modell die physikalischen Werte von wichtigen Größen (wie z.B. die  $\rho \rightarrow \pi\pi$  Zerfallsbreite) *nicht* korrekt beschreiben kann. Es ist ein üblicher Ausweg, Terme von Dimension  $> 4$  mitzunehmen, um dieses Problem zu lösen. Dieser Weg verstößt aber gegen die vorher erwähnten Bedingungen aus Abschnitt 3.3.4, die aus der Dilatationssymmetrie stammen. Aus diesem Grund wird in dieser Arbeit die Hypothese der chiralen Lokalität nicht verwendet, weil sie zu restriktiv ist. Das ist ohnehin im Einklang mit der QCD-Lagrange-Dichte, in der die chirale Symmetrie global ist.

### 3.4 $N_f = 2$ : Resultate und Diskussion

#### 3.4.1 Resultate ohne Glueball

In Ref. [4] wurde der Fall  $N_f = 2$  im Limes  $m_G \rightarrow \infty$  (eingefrorener Glueball) ausführlich untersucht. Es gibt 16 mesonische Felder (4 skalare, 4 pseudoskalare, 4 vektorielle, 4 axialvektorielle Mesonen):

$$\begin{aligned} \Phi &= (\sigma + i\eta_N) t^0 + (\vec{a}_0 + i\vec{\pi}) \cdot \vec{t}, \\ L^\mu &= (\omega^\mu + f_1^\mu) t^0 + (\vec{\rho}^\mu + \vec{a}_1^\mu) \cdot \vec{t}, \\ R^\mu &= (\omega^\mu - f_1^\mu) t^0 + (\vec{\rho}^\mu - \vec{a}_1^\mu) \cdot \vec{t}, \end{aligned}$$

wobei  $t^0 = \frac{1}{2}1_2$  und  $\vec{t} = \frac{1}{2}\vec{\tau}$  (Pauli-Matrizen). Die Identifikation der Felder ist unproblematisch in den  $0^{-+}$ ,  $1^{-+}$  und  $1^{++}$  Sektoren: die Felder  $\vec{\pi}$  und  $\eta_N$  entsprechen dem Pion und dem  $SU(2)$ -Gegenstück des  $\eta$ -mesons,  $\eta_N \equiv (\bar{u}u + \bar{d}d)/\sqrt{2}$ . Die Masse des Feldes  $\eta_N$  wird berechnet, indem man den physikalischen Fall  $N_f = 3$  entmischt, siehe z.B. Ref. [33]. Man bekommt den Wert  $m_{\eta_N} \simeq 700$  MeV. Die Felder  $\omega^\mu$  und  $\vec{\rho}^\mu$  entsprechen den Resonanzen  $\omega(782)$  und  $\rho(770)$ , und die Felder  $f_1^\mu$  und  $\vec{a}_1^\mu$  den Resonanzen  $f_1(1285)$  und  $a_1(1260)$ .

Unglücklicherweise ist die Identifikation der skalaren Resonanzen  $\{\sigma, \vec{a}_0\}$  nicht trivial und umstritten: dieses Thema hat sich zum eigenen Untergebiet der leichten hadronischen Physik entwickelt. Die zwei (meist diskutierten, aber nicht die einzigen) Möglichkeiten sind die Paare  $\{f_0(600), a_0(980)\}$  und  $\{f_0(1370), a_0(1450)\}$ . Wir nennen diese zwei Zuordnungen jeweils Szenario I und Szenario II. Das richtige Szenario zu ermitteln ist von primärer Bedeutung nicht nur für die Vakuumphysik; auch die Phänomenologie bei nicht verschwindender Temperatur und Dichte hängt auf eine entscheidende Art und Weise davon ab.

Die Studie in Ref. [4] beruht auf bekannten experimentellen Größen, wie den Zerfallsbreiten  $\rho \rightarrow \pi\pi$ ,  $a_0 \rightarrow \pi\eta$  und den  $\pi\pi$ -Streulängen, usw. Außerdem wurde auch das Photon in das Modell (durch minimale Kopplung) eingebaut: das ist wichtig, um die Berechnung des Zerfalls  $a_1(1260) \rightarrow \pi\gamma$  durchführen zu können.

Folgende Erkenntnisse wurden gewonnen:

- Im Szenario I (leichtes  $\sigma$ ,  $M_\sigma \lesssim 500$  MeV) ist die Zerfallsbreite  $\Gamma_{\sigma \rightarrow \pi\pi}$  bei Weitem zu klein:  $\Gamma_{\sigma \rightarrow \pi\pi} \lesssim 200$  MeV. Das Experiment zeigt hingegen eine sehr breite Resonanz:  $f_0(600)$ , mit  $\Gamma_{f_0(600) \rightarrow \pi\pi} \gtrsim 500$  MeV. (Aus diesem Grund wurde sogar lange von den Experimentalphysikern bezweifelt, ob eine solche Resonanz überhaupt existiert. Mittlerweile gilt die Existenz dieser leichten skalaren Resonanz als

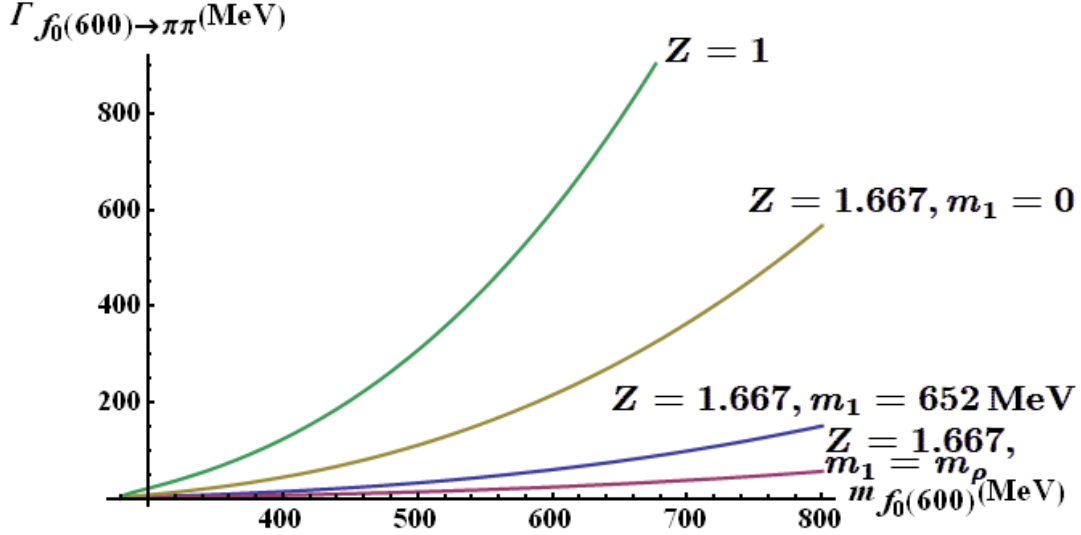


Abbildung 3: Zerfall  $\Gamma_{\sigma \rightarrow \pi\pi}$  als Funktion der  $\sigma$ -Masse im Szenario I mit ( $Z = 1.667$ ) und ohne Vektormesonen ( $Z = 1$ ). Es ist deutlich, dass der realistische Fall  $Z = 1.667$  eine wesentlich kleinere Breite als der künstliche Fall  $Z = 1$  liefert. Die Abhängigkeit von dem Parameter  $m_1$  (Beitrag zur  $\rho$ -Masse, der nicht vom Quark-Kondensat stammt, siehe Gl. (106)) wird auch geplottet.

erwiesen.) Im Rahmen unseres Modells ist es nicht möglich, die Streulängen und den Zerfall  $\sigma \rightarrow \pi\pi$  gleichzeitig zu beschreiben. Dieses Resultat zeigt deutlich, dass Szenario I nicht bevorzugt ist.

- Der Grund für eine solche schmale (und unphysikalische) leichte  $\sigma$ -Resonanz in unserem Modell ist die besondere Rolle der (axial)vektoriellen Freiheitsgrade. Ohne Vektormesonen wäre das leichte  $\sigma$ -Meson hingegen sehr breit,  $\Gamma_{\sigma \rightarrow \pi\pi} \simeq 500$  MeV, und wäre sogar im Einklang mit der  $\pi\pi$ -Streuung.

- Die vorherige Behauptung mag auf den ersten Blick unverständlich erscheinen: warum braucht man überhaupt (Axial)Vektormesonen, wenn ohne sie die Identifikation  $\sigma = f_0(600)$  so gut funktioniert? Die Antwort ist aber deutlich: die (Axial)Vektormesonen müssen wegen der Vollständigkeit des Modells berücksichtigt werden. Ohne sie würde ein wichtiger Bestandteil der Hadronenphysik fehlen, wie sie experimentell bestätigt ist. Man hätte die absurde Situation, dass  $\Gamma_\rho = 0$  und  $\Gamma_{a_1} = 0$ .

- Eine zweite Frage tritt in diesem Zusammenhang natürlich auf: wie kann es sein, dass die Einführung von Resonanzen mit verschiedenen Quantenzahlen einen solchen riesigen Einfluss auf die (pseudo)skalaren Resonanzen hat? Die Antwort ist hier eher technischer Natur: durch spontane Brechung der chiralen Symmetrie entsteht ein Mischungsterm zwischen  $a_1$  und  $\pi$ , der die Form  $\sim g_1 \phi_{a_1, \mu} \partial^\mu \pi$  hat. Diese Mischung erzeugt weitere Terme im (pseudo)skalaren Sektor und vor allem den  $\sigma \rightarrow \pi\pi$  Zerfall. Eine destruktive Interferenz wird dadurch generiert, die die  $\sigma$  Zerfallsbreite wesentlich verkleinert. Das wiederum führt dazu, dass Szenario I keine gute Übereinstimmung mit dem Experiment liefert. Die Tatsache, dass in vielen Studien die (Axial)Vektormesonen nicht einbezogen wurden, ist der Grund dafür, dass die Identifikation  $\sigma = f_0(600)$  oft vertreten wurde.

Diese Diskussion wird in den Abbildungen (3) und (4) zusammengefasst. Der Parameter  $Z$  tritt wegen der oben erwähnten  $a_1$ - $\pi$  Mischung auf.  $Z$  kann aus der Zerfallsbreite  $a_1(1260) \rightarrow \pi\gamma$  bestimmt werden:  $Z = 1.67 \pm 0.2$ . Der Limes  $Z \rightarrow 1$  ist theoretisch interessant, weil er die komplette Entkopplung von (pseudo)skalaren und (axial)vektoriellen Mesonen bedeutet.

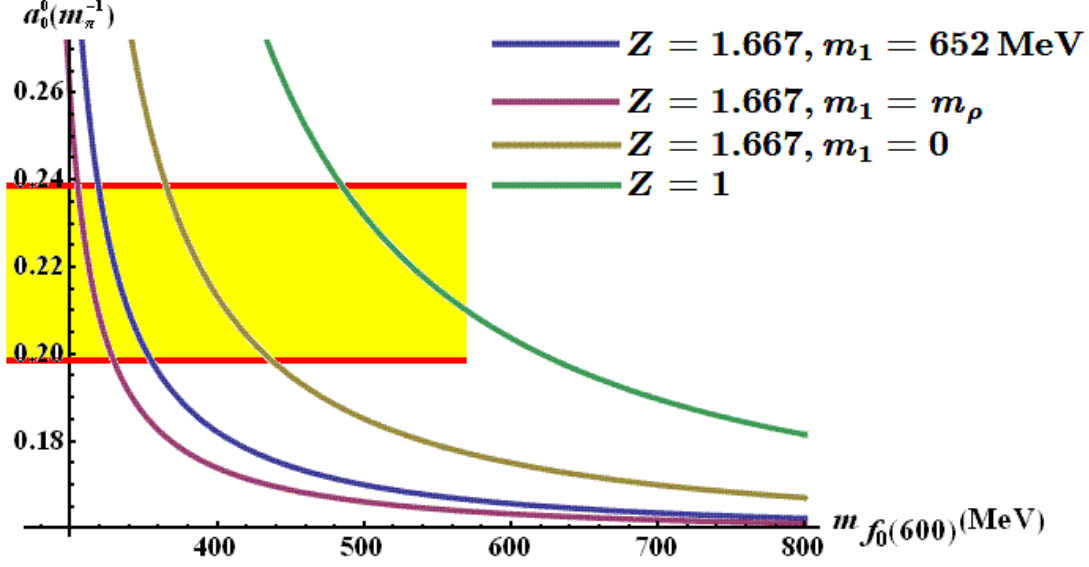


Abbildung 4: Streulänge  $a_0^0$  als Funktion der  $\sigma$ -Masse im Szenario I mit ( $Z = 1.667$ ) und ohne Vektormesonen ( $Z = 1$ ). Der gelbe Balken ist das experimentelle Intervall. Es ist deutlich, dass der realistische Fall  $Z = 1.667$  eine kleine  $\sigma$ -Masse bevorzugt. Das bedeutet aber eine (zu) kleine Zerfallsbreite für das  $\sigma$ -Teilchen. Die Abhängigkeit von dem Parameter  $m_1$  (Beitrag zur  $\rho$ -Masse, der nicht vom Quark-Kondensat stammt) wird auch geplottet.

- Im Szenario II gilt die Zuordnung  $\sigma = f_0(1370)$ . In diesem Fall ist eine konsistente Beschreibung der Daten realisiert. Die Zerfallsbreite  $\Gamma_{\sigma \rightarrow \pi\pi} = 300\text{-}500$  MeV ist im Einklang mit den jetzigen Beobachtungen. Das heißt, dass der chirale Partner des Pions mit  $\sigma = f_0(1370)$  zu identifizieren ist. Auch dieses Resultat folgt aus der Einführung der Vektormesonen: ohne sie wäre ein solcher schwerer skalärer Zustand extrem breit ( $\Gamma_{\sigma \rightarrow \pi\pi} > 1$  GeV) und daher nicht im Einklang mit dem Experiment. Dieses Resultat des unphysikalischen Modells ohne (Axial)Vektormesonen hat auch dazu beigetragen, dass diese Zuordnung nur selten im Rahmen von chiralen Modellen untersucht wurde. Wie nun von unserem Standpunkt klar erscheint, hatten wichtige Teile des Puzzles gefehlt.

### 3.4.2 Resultate mit Glueball

Der erste Schritt, um das Modell zu verbessern, besteht darin, die Glueballmasse nicht als unendlich zu betrachten, sondern den Gitter-Wert von 1.5 GeV zu verwenden. In diesem Fall ist der Glueball nicht mehr ‘eingefroren’, sondern als zusätzlicher Freiheitsgrad des Modells zu betrachten. Oft wird der Glueball mit der Resonanz  $f_0(1500)$  in Verbindung gesetzt.

Dieses Projekt wurde unternommen und die Resultate sind vorhanden [5]: das reine Quarkonium  $\bar{n}n$  und der reine Glueball  $gg$  mischen. Szenario I funktioniert auch hier nicht, und man ist wie vorher an den skalaren Resonanzen oberhalb 1 GeV interessiert. Die Mischung zwischen dem skalaren Quarkonium und dem skalaren Glueball erzeugt die Resonanzen  $f_0(1370)$  und  $f_0(1500)$ . Der Mischungswinkel kann durch einen Fit an den bekannten Zerfällen des Mesons  $f_0(1500)$  bestimmt werden (siehe Details in Ref. [5]): der Zustand  $f_0(1370)$  besteht überwiegend aus  $\bar{n}n$  (etwa  $\sim 75\%$ ) und aus  $gg$  (restliche 25%), und  $f_0(1500)$  besteht überwiegend ( $\sim 75\%$ ) aus  $gg$  und aus  $\bar{n}n$  (restliche 25%). Das zeigt im Nachhinein, dass die zuvor beschriebene Studie ohne Glueball schon qualitativ korrekt war.

Des Weiteren zeigt die Studie in Ref. [5], dass  $m_1^2 = bG_0^2 \sim m_\rho^2$  (siehe Gl. (106)): der Beitrag des Gluon-Kondensats zur Masse des  $\rho$ -Mesons ist dominant. Das bedeutet, dass es nicht erwartet wird, dass die  $\rho$ -Masse sich bei nicht verschwindender Dichte und Temperatur mit dem chiralen Kondensat skaliert. Ein weiteres interessantes Resultat dieser Arbeit ist die Bestimmung des Gluon-Kondensats:  $\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G_{\mu\nu}^a G^{a,\mu\nu} \rangle \simeq (600 \text{ MeV})^4$ . Dieser Wert ist im Einklang mit der oberen Grenze von Gitter-Simulationen.

### 3.4.3 Ausblicke im mesonischen Sektor

Die hier präsentierte Studie über den Fall  $N_f = 2$  ist nur der Anfang von weiteren Studien. Wir fassen diese Ausblicke kurz zusammen.

#### *Schwache Eichbosonen*

Die schwachen Eichbosonen können ins Modell eingebaut werden. Das erlaubt, wichtige Prozesse zu beschreiben: die hadronischen  $\tau$ -Zerfälle ( $\tau \rightarrow \nu\rho \rightarrow \nu\pi\pi$  und  $\tau \rightarrow \nu a_1 \rightarrow \nu\rho\pi \rightarrow \nu\pi\pi\pi$ ) können somit berechnet werden. Dadurch können die Spektralfunktionen von  $\rho$  und  $a_1$  theoretisch beschrieben werden, was weitere und genauere Tests des Modells erlauben wird [34].

#### *Der Fall $N_f = 3$*

Eine natürliche Verallgemeinerung ist die Studie des Falles  $N_f = 3$  [35]. Die niederenergetische Hadronenphysik beruht eigentlich auf diesem Szenario: die Quark-Antiquark-Multipletts der PDG sind Nonetts. Es werden nur zwei zusätzliche Parameter im Vergleich zum Fall  $N_f = 2$  benötigt, die den Einfluss der nackten  $s$ -Quarkmasse im (pseudo)skalaren und (axial)vektoriellen Sektoren beschreiben. Diese zwei Parameter sind  $h_0^3$  von Gl. (117) und  $\alpha$  von Gl. (118).

Dafür gibt es aber viel mehr experimentelle Werte, die zur Anpassung und Falsifizierung des Modells dienen können:  $\phi \rightarrow \bar{K}K$ ,  $K^* \rightarrow K\pi$ , .... Die Mischung im skalaren-isoskalaren Sektor betrifft nun drei nackte Konfigurationen:  $\bar{n}n$ ,  $gg$  und  $\bar{s}s$ , aus deren Mischung die Resonanzen  $f_0(1370)$ ,  $f_0(1510)$  und  $f_0(1710)$  stammen.

#### *Die Fälle $N_f \geq 4$*

Es ist auch möglich, die schweren Quarks ins Modell einzubauen. Die Massenterme der schweren Quarks verursachen zwar eine starke explizite Brechung der chiralen Symmetrie, die Wechselwirkungsterme bleiben jedoch unberührt. Das ermöglicht, die Physik der schweren Quarks mit den leichten Quarks in einem chiralen Modell mit Vektorfeldern zu vereinen.

#### *Der pseudoskalare Glueball*

Ein weiteres Feld, das von theoretischen und experimentellen Interesse ist, ist der pseudoskalare Glueball. Laut Gitter-Simulationen besitzt dieser Zustand eine Masse von ungefähr 2.6 GeV [14]. Dieser Zustand kann durch die  $U(1)_A$ -Anomalie an die (pseudo)skalare Felder gekoppelt werden. Die entsprechende Lagrange-Dichte lautet

$$\mathcal{L}_{\tilde{G}} = ic_{\tilde{G}\Phi} \tilde{G}(\det \Phi^+ - \det \Phi) , \quad (124)$$

wobei  $\tilde{G}$  der pseudoskalare Glueball darstellt. Dadurch können Zerfälle und Mischungen berechnet werden. Wegen des geplanten PANDA Experiments an der GSI/Darmstadt [36], ist eine detaillierte Studie der Zerfälle des pseudoskalaren Glueballs relevant.

Nicht nur weitere Quarkonia werden gebraucht. Um die leichten skalaren Resonanzen zu beschreiben, müssen neue Freiheitsgrade eingeführt werden. Wie wir im nächsten Abschnitt diskutieren werden, erfüllen die Tetraquark-Zustände die nötigen Eigenschaften.

## 4 Tetraquark Felder

### 4.1 Werden Tetraquarks benötigt?

Die Resultate des vorherigen Abschnittes haben gezeigt, dass die Interpretation der leichten skalaren Resonanzen (Masse  $< 1$  GeV) als Quark-Antiquark-Mesonen problematisch ist. Die jetzige experimentelle Lage zeigt in diesem Energiebereich ein gesamtes Nonett von Skalarzuständen:  $f_0(600)$ ,  $f_0(980)$ ,  $a_0(980)$ , und  $k = K_0^*(800)$ . Die natürliche Frage lautet, wie man solche Zustände interpretiert, wenn die Quarkonium-Option ausfällt.

Eine elegante und natürliche Erklärung dieser Resonanzen wurde in Ref. [37] präsentiert: sie werden als Tetraquark-Zustände interpretiert: es handelt sich um gebundene Zustände aus einem ‘guten’ Diquark und einem ‘guten’ Antidiquark, wobei ein gutes (Anti-)Diquark eine antisymmetrische Konfiguration aus zwei (Anti)Quarks in Isospin-Raum und Farbraum bedeutet. (Einzelheiten sind im nächsten Unterabschnitt zu finden.)

Für  $N_f = 3$  gibt es drei gute Diquarks:  $[d, s]$ ,  $[u, s]$  und  $[u, d]$ , wobei der Kommutator die Antisymmetrie im Isospin-Raum darstellt. In diesem Szenario wird die Resonanz  $f_0(600)$  (überwiegend) als  $[u, d][\bar{u}, \bar{d}]$  und die Resonanzen  $f_0(980)$  und  $a_0^0(980)$  (überwiegend) als  $\frac{1}{2\sqrt{2}}([u, s][\bar{u}, \bar{s}] + [d, s][\bar{d}, \bar{s}])$  und  $\frac{1}{2\sqrt{2}}([u, s][\bar{u}, \bar{s}] - [d, s][\bar{d}, \bar{s}])$  interpretiert. Zu  $a_0(980)$  gehören auch die zwei geladenen Teilchen  $[u, s][\bar{d}, \bar{s}]$ ,  $[d, s][\bar{u}, \bar{s}]$ . Die Massenentartung von  $f_0(980)$  und  $a_0(980)$  ist wegen der Flavorstruktur ganz einfach und natürlich erklärt. Die kaonischen Konfigurationen  $[u, d][\bar{d}, \bar{s}]$ ,  $[u, d][\bar{u}, \bar{s}]$ , ... entsprechen der Resonanz  $k = K_0^*(800)$ .

Wegen der (dynamischen) Quarkmassen  $m_u^* \simeq m_d^* \simeq 300$  MeV  $<$   $m_s^* \simeq 500$  MeV kann man die folgende nicht typische, invertierte Massenordnung

$$M_{f_0(600)} < M_k < M_{f_0(980)} = M_{a_0(980)} \quad (125)$$

problemlos verstehen. Das ist für ein Quark-Antiquark-Nonett nicht möglich.

Auch die Phänomenologie der Zerfälle kann im Rahmen der Tetraquark-Interpretation korrekt beschrieben werden [6]. Das ist wiederum nicht der Fall, wenn die Quark-Antiquark-Interpretation untersucht wird, siehe die komparative Analyse in Ref. [8].

Natürlich können Mischungseffekte - vor allem im isoskalaren Sektor- stattfinden, die das Verständnis der Resonanzen schwerer machen. In dieser Hinsicht ist diese Diskussion nur ansatzweise korrekt und eine genauere Studie muss unternommen werden. Dafür ist es wichtig, die Tetraquark-Felder in einem chiralsymmetrischen Kontext zusammenzubringen. Das erfordert zunächst eine mathematische Studie dieses Problems.

### 4.2 Mathematische Beschreibung der skalaren Diquarks und Tetraquarks

Um Tetraquarks zu beschreiben, muss man zuerst Diquarks definieren. Wir sind nicht an all den möglichen Diquark-Objekten interessiert, sondern nur an den sogenannten “guten” Diquarks [37, 38]. Das sind skalare Objekte, die antisymmetrisch im Flavorraum und Farbraum sind. Ihre Wellenfunktion lautet schematisch:

$$|qq\rangle_{L=S=0} = |\text{Raum: } L=0\rangle |\text{Spin: } S=0\rangle |\text{Farbe: } \bar{\mathbf{3}}_c\rangle |\text{Flavor: } \bar{N}_f\rangle; \quad J^P = 0^+ . \quad (126)$$

Der Ket  $|\text{Flavor: } \bar{N}_f\rangle$  bedeutet eine antisymmetrische Wellenfunktion im Flavorraum. Im Fall  $N_f = 2$  gibt es nur ein solches (gutes) Diquark:  $\sqrt{\frac{1}{2}}[u, d]$ . Im Fall  $N_f = 3$  gibt es drei gute Diquarks:

$$\sqrt{\frac{1}{2}}[d, s], \quad \sqrt{\frac{1}{2}}[u, s], \quad \sqrt{\frac{1}{2}}[u, d]. \quad (127)$$

Für beliebiges  $N_f$  gibt es  $N_f(N_f - 1)/2$  antisymmetrische Diquarks.

Im Farbraum ist das ähnlich: die Anzahl von Farben ist aber auf  $N_c = 3$  fixiert<sup>7</sup>. Die entsprechenden antisymmetrischen Farbkonfigurationen für  $|\text{Farbe: } \bar{3}_c\rangle$  lauten

$$\sqrt{\frac{1}{2}}[\text{rot}, \text{blau}], \quad -\sqrt{\frac{1}{2}}[\text{blau}, \text{grün}], \quad \sqrt{\frac{1}{2}}[\text{grün}, \text{rot}]. \quad (128)$$

Verschiedene Studien (Gitter, 1-Gluon-Austausch-Modelle, Dyson-Schwinger-Rechnungen [40]) haben tatsächlich gezeigt, dass das gute Diquark ein stabiles Objekt bildet, das eine wichtige Rolle in der mesonischen Phänomenologie spielen kann.

Um die Diquarks, und entsprechend die Tetraquarks, in einem chiralen Modell beschreiben zu können, ist es notwendig, eine korrekte mathematische Sprache zu entwickeln. Zu diesem Zweck berücksichtigen wir die folgende Diquark-Matrix  $D$ , die die guten Diquarks auf eine kompakte Art darstellt:

$$D_{ij} \equiv \sqrt{\frac{1}{2}} (q_j^t C \gamma^5 q_i - q_i^t C \gamma^5 q_j) = \sum_{i=1}^{N_f(N_f-1)/2} \varphi_i A^i \quad (129)$$

mit

$$(A^i)_{jk} = \varepsilon_{ijk}, \quad \varphi_i \equiv \sqrt{\frac{1}{2}} \varepsilon_{ijk} q_j^t C \gamma^5 q_k. \quad (130)$$

Die Buchstabe  $t$  steht für die Transposition im Dirac-Raum und  $C$  ist die Ladungskonjugationsmatrix ( $C^{-1} \gamma^\mu C = (-\gamma^\mu)^t$ ,  $C = i \gamma^2 \gamma^0$  in der Dirac-Darstellung). Die Matrizen  $A^i$  sind die antisymmetrischen  $N_f \times N_f$ -Matrizen. Die Farbindices, die formell mit den Flavorindices identisch sind, werden hier weggelassen. Die Größen  $\varphi_i$ , die in der Dekomposition von  $D$  in der Basis der antisymmetrischen Matrizen  $A^i$  auftauchen, stellen die Diquark-Ströme dar. Die hermitesch-konjugierten Größen  $\varphi_i^\dagger$  beschreiben die Antidiquark-Ströme.

In der Tabelle 5 werden die Eigenschaften der Diquarks zusammengefasst.

**Tabelle 5:** Eigenschaften der skalaren Diquarks.

	$D = \sum_{i=1}^{N_f(N_f-1)/2} \varphi_i A^i$	$\varphi_i$
Elemente/Ströme	$D_{ij} \equiv \sqrt{\frac{1}{2}} (q_j^t C \gamma^5 q_i - q_i^t C \gamma^5 q_j)$	$\varphi_i \equiv \sqrt{\frac{1}{2}} \varepsilon_{ijk} q_j^t C \gamma^5 q_k$
P	$D(t, -\mathbf{x})$	$\varphi_i(t, -\mathbf{x})$
C	$D^\dagger$	$\varphi_i^\dagger$
$SU(N_f)_V$	$U_V D U_V^t$	$\sqrt{\frac{1}{2}} \varepsilon_{ijk} U_{V,jj'} U_{V,kk'} q_j^t C \gamma^5 q_{k'}$ .

Die daraus entstehenden Tetraquarks sind gebundene Zustände aus einem Diquark und einem Antidiquark. Es gibt  $N_f^2(N_f - 1)^2/4$  solcher Felder, die mit Hilfe der hermiteschen  $N_f \times N_f$ -Matrix

$$\mathcal{S}_{ij}^{[4q]} = \varphi_i^\dagger \varphi_j \quad (131)$$

hingeschrieben werden können. Das Zeichen  $[4q]$  in  $\mathcal{S}^{[4q]}$  weist auf die ‘Vierquark-Struktur’ hin und vermeidet Konfusion mit der zuvor eingeführten Matrix  $\mathcal{S}$  der Quark-Antiquark-Zustände.

Wir beschreiben kurz die Unterschiede der Fälle für verschiedene  $N_f$ :

- $N_f = 1$  : es existiert kein (gutes) Diquark, und daher kann kein Tetraquark konstruiert werden.
- $N_f = 2$  : es gibt nur ein (gutes) Diquark:  $\varphi = \sqrt{\frac{1}{2}}[u, d]$ . Deswegen gibt es nur ein skalares Tetraquark-Feld:

$$\mathcal{S}^{[4q]} = \chi = \frac{1}{2}[u, d][\bar{u}, \bar{d}] = \varphi^\dagger \varphi.$$

<sup>7</sup>Die Verallgemeinerung zu einer beliebigen Anzahl von Farben  $N_c$  findet im Abschnitt 4.7 statt.

Das Feld  $\chi$  wird (überwiegend) mit der Resonanz  $f_0(600)$  identifiziert.

•  $N_f = 3$  : Es ist interessant zu beobachten, dass der Fall  $N_f = 3$  besonders ist: es gibt die gleiche Anzahl von Quarks und von (guten) Diquarks. Die Diquarks  $\varphi_i$  lauten:

$$\varphi_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}[d, s] \leftrightarrow \bar{u}, \varphi_2 = -\sqrt{\frac{1}{2}}[u, s] \leftrightarrow \bar{d}, \varphi_3 = \sqrt{\frac{1}{2}}[u, d] \leftrightarrow \bar{s}, \quad (132)$$

wobei die Korrespondenz  $\leftrightarrow$  bedeutet, dass ein Diquark sich wie ein Antiquark in Bezug auf Flavortransformationen verhält. (Ganz analog geht es mit den Farbtransformationen.) In diesem besonderen Fall transformieren die Diquarks unter einer  $SU_V(3)$ -Transformation wie

$$\varphi_i \rightarrow \varphi_k U_{ki}^\dagger. \quad (133)$$

Die Transformationseigenschaft ist genau die  $SU(3)_V$ -Transformation von Antiquarks:  $\bar{q}_i \rightarrow \bar{q}_k U_{ki}^\dagger$ . Das ist die formell korrekte Weise, die Korrespondenz in Gl. (132) auszudrücken.

Im Flavorraum lautet  $\mathcal{S}^{[4q]}$  explizit (siehe Gl. (129) und Gl. (130)):

$$\mathcal{S}^{[4q]} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} [\bar{d}, \bar{s}][d, s] & -[\bar{d}, \bar{s}][u, s] & [\bar{d}, \bar{s}][u, d] \\ -[\bar{u}, \bar{s}][d, s] & [\bar{u}, \bar{s}][u, s] & -[\bar{u}, \bar{s}][u, d] \\ [\bar{u}, \bar{d}][d, s] & -[\bar{u}, \bar{d}][u, s] & [\bar{u}, \bar{d}][u, d] \end{pmatrix} \quad (134)$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}}(f_B[4q] - a_0^0[4q]) & -a_0^+[4q] & k^+[4q] \\ -a_0^-[4q] & \sqrt{\frac{1}{2}}(f_B[4q] + a_0^0[4q]) & -k^0[4q] \\ k^-[4q] & -\bar{k}^0[4q] & \sigma_B[4q] \end{pmatrix} \quad (135)$$

$$\simeq \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}}(f_B - a_0^0(980)) & -a_0^+(980) & k^+ \\ -a_0^-(980) & \sqrt{\frac{1}{2}}(f_B + a_0^0(980)) & -k^0 \\ k^- & -\bar{k}^0 & \sigma_B \end{pmatrix}, \quad (136)$$

wobei in Gl. (136) die Identifikation mit den physikalischen Feldern gemacht wurde. Hierbei wurden mögliche Mischungen mit anderen skalaren Feldern, wie z.B. Quark-Antiquark-Felder, vernachlässigt.

Die Zustände

$$\sigma_B[4q] = \frac{1}{2}[u, d][\bar{u}, \bar{d}]$$

und

$$f_B[4q] = \frac{1}{2\sqrt{2}}([u, s][\bar{u}, \bar{s}] + [d, s][\bar{d}, \bar{s}])$$

stellen die *nackten* (ungemischten) skalar-isoskalaren Tetraquarks dar. Die Felder  $\sigma_B[4q]$  und  $f_B[4q]$  werden überwiegend mit den Resonanzen  $f_0(600)$  und  $f_0(980)$  identifiziert. Es soll aber nicht vergessen werden, dass Mischungen zwischen diesen Konfigurationen mit anderen skalaren Feldern wie dem skalaren Glueball und skalaren Quark-Antiquark-Zuständen sicherlich auftreten. Die genaue Studie solcher Mischungen ist ein wichtiges, aber zugleich schwieriges Projekt für die Zukunft, siehe auch die folgende Diskussion für erste Resultate.

Wenn man, wie in Ref. [6], die chirale Symmetrie nicht in Betracht zieht und sich nur auf Flavorsymmetrie  $SU_V(N_f = 3)$ , sowie  $C$  und  $P$  Symmetrien beschränkt, kann man die folgende invariante Lagrange-Dichte hinschreiben, die die Zerfälle eines Tetraquarks in zwei pseudoskalare Quarkonium-Mesonen (wie z.B. die Pionen) beschreibt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathcal{S}^{[4q]PP}} &= -c_1 \text{Tr} [D\mathcal{P}^t D^\dagger \mathcal{P}] + c_2 \text{Tr} [DD^\dagger \mathcal{P}^2] \\ &= c_1 \mathcal{S}_{ij}^{[4q]} \text{Tr} [A^j \mathcal{P}^t A^i \mathcal{P}] - c_2 \mathcal{S}_{ij}^{[4q]} \text{Tr} [A^j A^i \mathcal{P}^2], \end{aligned} \quad (137)$$

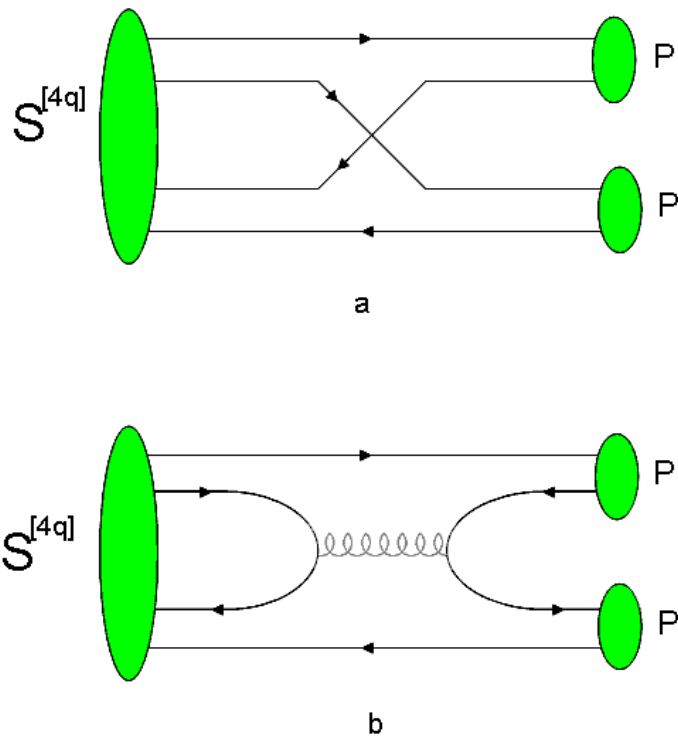


Abbildung 5: Tetraquark-Zerfälle: (a) Durch Quark-Antiquark-Austausch. (b) Durch Quark-Antiquark-Annihilation und einem zusätzlichen Gluon als Zwischenzustand.



wobei der dominante und der subdominante Term in der Large- $N_c$  Entwicklung mitgenommen wurden. Die Terme sind proportional zu  $c_1$  (Large- $N_c$  dominant) und  $c_2$  (Large- $N_c$  unterdrückt). Die entsprechenden Zerfälle werden in den Abbildungen 5.a und 5.b gezeigt.

Die Zuordnung von Gl. (136), d.h. die Interpretation der leichten Skalare als Tetraquarks, kann die besonderen Eigenschaften dieser Resonanzen erklären: die (beinahe exakte) Massen-Entartung der Zustände  $a_0(980)$  und  $f_0(980)$  und die starke Kopplung von beiden Resonanzen an  $\bar{K}K$  sind unmittelbare Konsequenzen. Außerdem ist die besonders starke Kopplung von  $f_0(980)$  an  $\bar{K}K$  auch eine Folge dieser Zuordnung: der Large- $N_c$  unterdrückte Term proportional zu  $c_2$  ist in diesem Kanal besonders stark. Das passiert wegen der Clebsch-Gordon-Koeffizienten für den Prozess  $f_0(980) \rightarrow \bar{K}K$ , siehe Details in Ref. [6] und die experimentellen Analysen von Ref. [39].

Die Lagrange-Dichte (137) ist zwar nützlich für eine phänomenologische Studie der Zerfälle, ist aber nicht chiralsymmetrisch. Man muss das Modell erweitern, um die Prinzipien vom Abschnitt 3.3.4 zu erfüllen. Als nächster Schritt muss das pseudoskalare Diquark beschrieben werden.

### 4.3 Pseudoskalare Diquarks

Das pseudoskalare Diquark hat die gleiche Flavor- und Farbstruktur  $(\bar{N}_f, \bar{3}_c)$  wie das skalare Diquark. Es hat aber negative Parität, die aus der folgenden Wellenfunktion stammt:

$$|qq\rangle_{L=S=1} = |\text{space: } L=1\rangle |\text{spin: } S=1\rangle |\text{color: } \bar{3}_c\rangle |\text{flavor: } \bar{N}_f\rangle; \quad J^P = 0^- . \quad (138)$$

Das pseudoskalare Diquark wird durch die Matrix  $\tilde{D}$  und durch die Ströme  $\tilde{\varphi}_i$  beschrieben:

$$\tilde{D}_{ij} \equiv \sqrt{\frac{1}{2}} (q_j^t C q_i - q_i^t C q_j) = \sum_{i=1}^{N_f(N_f-1)/2} \tilde{\varphi}_i A^i; \quad \tilde{\varphi}_i \equiv \sqrt{\frac{1}{2}} \varepsilon_{ijk} q_j^t C q_k . \quad (139)$$

Die mathematischen Eigenschaften von  $\tilde{D}$  und  $\tilde{\varphi}_i$  sind, bis auf die Parität, genau wie in der Tabelle 5 angegeben.

### 4.4 Tetraquarks im chiralen Modell

Aus den Matrizen  $D$  und  $\tilde{D}$  von Gl. (129) und (139) werden die Matrizen  $D_R$  und  $D_L$  definiert:

$$D_R = \sqrt{\frac{1}{2}} (\tilde{D} + D) = \sum_{i=1}^{N_f(N_f-1)/2} \varphi_i^R A^i, \quad \varphi_i^R = \sqrt{\frac{1}{2}} (\tilde{\varphi}_i + \varphi_i) , \quad (140)$$

$$D_L = \sqrt{\frac{1}{2}} (\tilde{D} - D) = \sum_{i=1}^{N_f(N_f-1)/2} \varphi_i^L A^i, \quad \varphi_i^L = \sqrt{\frac{1}{2}} (\tilde{\varphi}_i - \varphi_i) . \quad (141)$$

Die Transformationen der Matrizen  $D_R$  und  $D_L$  werden in der Tabelle 6 zusammengefasst. Die Transformation von  $D_R$  und  $D_L$  ist den vorher diskutierten Matrizen  $R_\mu$  und  $L_\mu$  ähnlich.

**Tabelle 6:** Eigenschaften der Matrizen  $D_R$  und  $D_L$ .

	$D_R = \sum_{i=1}^{N_f(N_f-1)/2} \varphi_i^R A^i$	$D_L = \sum_{i=1}^{N_f(N_f-1)/2} \varphi_i^L A^i$
Ströme	$\varphi_i^R \equiv \varepsilon_{ijk} q_j^t C P_R q$	$\varphi_i^L \equiv \varepsilon_{ijk} q_j^t C P_L q_k$
P	$-D_L(t, -\mathbf{x})$	$-D_R(t, -\mathbf{x})$
C	$D_R^\dagger$	$D_L^\dagger$
$SU(3)_V$	$U D_R U^t$	$U D_L U^t$
$U(3)_R \times U(3)_L$	$R D_R R^t$	$L D_L L^t$

In den relevanten Fällen  $N_f = 2$  und  $N_f = 3$  gibt es folgende Eigenschaften:

- $N_f = 2$ . Es gilt:  $\varphi^R \rightarrow \varphi^R$ ,  $\varphi^L \rightarrow \varphi^L$ . Es handelt sich also um invariante Objekte.
- $N_f = 3$ . Unter chiralen  $SU(3)_R \times SU(3)_L$  Transformationen gilt

$$\varphi_i^R \rightarrow \varphi_k^R R_{ki}^\dagger, \quad \varphi_i^L \rightarrow \varphi_k^L L_{ki}^\dagger, \quad (142)$$

wobei  $L$  und  $R$  unitäre Matrizen sind. Es wird deutlich, dass sich die Größen  $\varphi_i^R$  wie rechtshändige Antiquarks und die Größen  $\varphi_i^L$  wie linkshändige Antiquarks transformieren.

Wir können nun die chirale Lagrange-Dichte hinschreiben, die die Diquark-Matrizen  $D_R$ ,  $D_L$  und die Quarkonium-Matrix  $\Phi$  enthält:

$$\mathcal{L}_{tq-\Phi} = -\frac{c_1}{G_0} G \text{Tr} \left( D_R \Phi^t D_L^\dagger \Phi + D_L^* \Phi^* D_R^\dagger \Phi^\dagger \right) + \frac{c_2}{G_0} G \text{Tr} \left( D_R D_R^\dagger \Phi^\dagger \Phi + D_L D_L^\dagger \Phi \Phi^\dagger \right). \quad (143)$$

Diese Terme stellen die Large- $N_c$  dominanten Beiträge dar. Die Lagrange-Dichte (143) ist auch invariant unter  $P$ ,  $C$  und  $U(1)_A$  Transformationen. Das Dilaton-Feld  $G$  wurde auch eingeführt, damit die Dilatationssymmetrie erhalten bleibt. Die zwei Kopplungskonstanten  $\frac{c_1}{G_0}$  und  $\frac{c_2}{G_0}$  sind dimensionslos. Die Gl. (137) folgt aus Gl. (143), wenn nur skalare Tetraquarks berücksichtigt werden und  $G = G_0$  gesetzt wird.

Die Anwesenheit von zwei unterschiedlichen Diquarks führt zu vier Tetraquark-Multipletts: zwei skalare Multipletts,  $\varphi_i^\dagger \varphi_j$  ( $= \mathcal{S}^{[4q]}$ ) und  $\tilde{\varphi}_i^\dagger \tilde{\varphi}_j$ , und zwei pseudoskalare Multipletts,  $\varphi_i^\dagger \tilde{\varphi}_j$  und  $\tilde{\varphi}_i^\dagger \varphi_j$ .

Im chiralen Limes sind skalare und pseudoskalare Diquarks entartet. Durch spontane Symmetriebrechung und durch Wechselwirkungen, die auf Instantonen basieren, wird eine starke Anziehung im skalaren Sektor und eine Abstoßung im pseudoskalaren Sektor erzeugt [40], siehe auch die Gitter-Studie in Ref. [41]. Das wiederum heißt, dass das pseudoskalare Diquark von Gl. (138) keine wesentliche Rolle für die Spektroskopie der Mesonen im Niederenergiebereich darstellt. (Das pseudoskalare Diquark ist in dieser Hinsicht ein wichtiger Zwischenschritt, der aber nach der Konstruktion der Lagrange-Dichte wieder entfernt werden kann). Aus diesen Gründen wird nur das Multiplett  $\mathcal{S}^{[4q]} = \varphi_i^\dagger \varphi_j$  in Betracht gezogen. Die anderen drei Multipletts mögen zwar existieren, sind aber wesentlich schwerer und/oder zu breit, um gemessen zu werden.

Aus der Lagrange-Dichte (143) können also die Terme mit  $\mathcal{S}_{ij}^{[4q]}$  isoliert werden, wobei die anderen für unsere Zwecke vernachlässigt werden können. Man bekommt:

$$\mathcal{L}_{tq-\Phi} = -\frac{c_1}{G_0} G \mathcal{S}_{ij}^{[4q]} \text{Tr} \left( A^j \Phi^t A^i \Phi + A^j A^i \Phi^\dagger \Phi \right) + \frac{c_2}{G_0} G \mathcal{S}_{ij}^{[4q]} \text{Tr} \left( A^j A^i \Phi^\dagger \Phi + A^j A^i \Phi \Phi^\dagger \right) + \dots \quad (144)$$

Ein ähnlicher Term soll auch eingeführt werden, der die Wechselwirkung der skalaren Tetraquarks mit den (Axial)Vektormesonen beschreibt:

$$\mathcal{L}_{tq-AV} = -\frac{c_1^V}{G_0} G \text{Tr} \left( D_R R_\mu^t D_R^\dagger R^\mu + D_L L_\mu^t D_L^\dagger L^\mu \right) + \frac{c_2^V}{G_0} G \text{Tr} \left( D_R D_R^\dagger R_\mu^\dagger R^\mu + D_L D_L^\dagger L_\mu^\dagger L^\mu \right), \quad (145)$$

wobei wieder Dilatationssymmetrie, chirale Invarianz und  $CPT$  berücksichtigt wurden. Die zwei Terme sind dominant in der Large- $N_c$  Entwicklung. Wenn nur das leichte skalare Tetraquark-Nonett mitgenommen wird, bekommt man die folgende Wechselwirkung zwischen  $\mathcal{S}^{[4q]}$  und (Axial)Vektormesonen:

$$\mathcal{L}_{tq-AV} = -\frac{c_1^V}{G_0} G \mathcal{S}_{ij}^{[4q]} \text{Tr} \left( A^j R_\mu^t A^i R^\mu + A^j L_\mu^t A^i L^\mu \right) + \frac{c_2^V}{G_0} G \mathcal{S}_{ij}^{[4q]} \text{Tr} \left( A^j A^i R_\mu^\dagger R^\mu + A^j A^i L_\mu^\dagger L^\mu \right) + \dots \quad (146)$$

Es fehlt nun der Term, der den ‘dynamischen’ Teil der Tetraquarks beschreibt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{tq-quad} &= \text{‘dyn-part’} + G^2 \left\{ \text{Tr} [D_R D_R^\dagger D_R D_R^\dagger] + \text{Tr} [D_L D_L^\dagger D_L D_L^\dagger] \right\} + \dots \\ &= \text{Tr} \left[ (\partial^\mu \mathcal{S}^{[4q]})^+ (\partial^\mu \mathcal{S}^{[4q]})^2 - e G^2 \mathcal{S}^{[4q]} \mathcal{S}^{[4q]} \right] + \dots \end{aligned} \quad (147)$$

Die gesamte Lagrange-Dichte  $\mathcal{L}_{\bar{q}q+ tq}$  für Quarkonia und Tetraquarks ist die Summe der verschiedenen Terme:

$$\mathcal{L}_{\bar{q}q+ tq} = \mathcal{L}_{mes} + \mathcal{L}_{tq-quad} + \mathcal{L}_{tq-\Phi} + \mathcal{L}_{tq-AV} + \dots \quad (148)$$

wobei die Punkte explizite Symmetriebrechungsterme und weitere Large- $N_c$  unterdrückte Terme symbolisieren.

Die Fälle  $N_f = 2$ ,  $N_f = 3$  und die physikalischen Implikationen werden in den folgenden Unterabschnitten beschrieben.

#### 4.5 $N_f = 2$

Die physikalischen Eigenschaften des Modells können im Fall  $N_f = 2$  auf eine einfache Art erläutert werden. Wir beschränken uns auf die Freiheitsgrade  $\sigma$  und  $\vec{\pi}$  (das heißt:  $\Phi = \sigma t^0 + i\vec{\pi} \cdot \vec{t}$ ; die (Axial)Vektormesonen werden in diesem vereinfachten Fall ausgelassen). Das Potential lautet

$$V = V_{dii}(G) + aG^2(\sigma^2 + \vec{\pi}^2)^2 + \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2)^2 - \sigma h_0 + \frac{1}{2}m_\chi^2 \frac{G^2}{G_0^2} \chi^2 - g \frac{G}{G_0} \chi (\sigma^2 + \vec{\pi}^2) , \quad (149)$$

wobei  $g = c_1 + c_2$ ,  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$  und  $c = 0$ .

Wie bekannt, ist das Minimum für  $G_0 \neq 0$  aufgrund der Brechung der Dilatationssymmetrie realisiert. Wenn  $a < 0$  erhält auch  $\sigma$  einen nicht verschwindenden Vakuumerwartungswert  $\sigma_0$ ,  $\sigma_0 \propto G_0 \neq 0$ . Aus den zwei entstehenden Termen  $\frac{1}{2}m_\chi^2 \chi^2 + g \frac{G}{G_0} \chi \sigma_0^2$  entwickelt auch  $\chi$  einen ‘vev’:

$$\chi_0 \propto g \frac{\sigma_0^2}{m_\chi^2} \propto g \frac{G_0^2}{m_\chi^2} .$$

Das bedeutet, dass ein Tetraquark-Kondensat im Rahmen des Modells entstanden ist.

Außerdem führt die Verschiebung der Felder  $\sigma \rightarrow \sigma_0 + \sigma$ ,  $\chi \rightarrow \chi + \chi_0$  und  $G \rightarrow G_0 + G$  zu Mischungen zwischen den skalaren Feldern:

- $G$ - $\sigma$  Glueball-Quarkonium-Mischung, die schon in Abschnitt 3 erwähnt wurde.
- $\chi$ - $\sigma$  Tetraquark-Quarkonium-Mischung.
- $\chi$ - $G$  Tetraquark-Glueball-Mischung.

Es ist deutlich, dass schon dieses vereinfachte Potential im  $N_f = 2$  Fall ein ziemlich schwieriges Mischungsproblem generiert, das mit Hilfe einer  $O(3)$ -Rotation lösbar ist (obwohl das explizit noch nicht gemacht wurde).

Im Limes  $m_G \rightarrow \infty$  ist der Glueball eingefroren und es bleibt nur die  $\chi$ - $\sigma$  Mischung. Das ist der Anfangspunkt für eine Studie der Rolle des Tetraquarks bei endlicher Temperatur  $T$  und wird ausführlich im Abschnitt 7 präsentiert.

#### 4.6 $N_f = 3$

Die Situation ist qualitativ dem vorherigen Fall ähnlich, obwohl eine größere Anzahl von Feldern auftritt: es gibt ein (pseudo)skalares Quarkonium-Nonett, ein skalares Tetraquark-Nonett und einen Glueball.

Im  $I = 1$  Sektor gibt es eine Mischung zwischen zwei  $a_0$  Zuständen: das Tetraquark  $a_0^0[4q]$  (von  $\mathcal{S}^{[4q]}$  in Gl. (134)-(135)) und das Quarkonium  $a_0^0[\bar{q}q]$  (aus  $\mathcal{S}$ , siehe Tabelle 2). Diese zwei Felder mischen und generieren die physikalischen Resonanzen  $a_0(980)$  und  $a_0(1450)$ , wobei  $a_0(980)$  überwiegend Tetraquark und  $a_0(1450)$  überwiegend Quarkonium ist. Die entsprechende Gleichung ist

$$\begin{pmatrix} a_0^0(980) \\ a_0^0(1470) \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} a_0^0[4q] \\ a_0^0[\bar{q}q] \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} \cos \theta_{a_0} & \sin \theta_{a_0} \\ -\sin \theta_{a_0} & \cos \theta_{a_0} \end{pmatrix} . \quad (150)$$

Die numerische Studie in Ref. [7] führt zum Resultat

$$\sin^2 \theta_{a_0} = 0.03-0.10 ,$$

was eine relativ kleine Beimischung bedeutet.

Eine ähnliche Situation gilt im kaonischen  $I = 1/2$  Sektor: hier mischen das Tetraquark  $k[4q]$  und das Quarkonium  $K_0[\bar{q}q]$ , die dann die physikalischen Resonanzen  $k \equiv K_0(700)$  und  $K_0(1450)$  generieren. Der Mischungswinkel  $\theta_k$  ist auch in diesem Fall klein:  $\sin^2 \theta_k \simeq 0.03$ .

Die Studie im isoskalaren Sektor wird in diesem Kontext wesentlich schwieriger, da es im Modell fünf skalar-isoskalare Felder gibt: die Tetraquark-Felder  $\chi = \sigma_B[4q]$  und  $f_B[4q]$ , der Glueball  $G$  und die Quarkonium-Felder  $\sigma = \sigma[\bar{q}q]$  und  $f_B[\bar{q}q]$ , die die Resonanzen  $f_0(600)$ ,  $f_0(980)$ ,  $f_0(1370)$ ,  $f_0(1500)$ ,  $f_0(1710)$  generieren. Jedes von den fünf Feldern hat ein nicht verschwindendes Kondensat. Wie genau die Mischung stattfindet, ist Teil von moderner hadronischer Forschung [42]. Eine Studie dieses Systems innerhalb des hier präsentierten Modells wurde noch nicht unternommen, stellt jedoch ein sehr interessantes und wichtiges Thema für künftige Forschungen dar.

#### 4.7 Large- $N_c$ und Tetraquarks

Bisher wurde das Large- $N_c$  Verhalten der Tetraquarks noch nicht untersucht. Zu diesem Zweck soll man zuerst klären, was man unter einem Tetraquark in einer Large- $N_c$  Welt versteht. Ein Tetraquark-Objekt, das aus zwei Quarks und zwei Antiquarks besteht, überlebt nicht im Large- $N_c$  Limes. Das wurde schon in den bahnbrechenden Artikeln von 't Hooft [12] und Witten [13] klargemacht: solche Diquark-Antidiquark-Objekte gibt es in diesem Limes nicht. Anstatt eines solchen Tetraquarks gibt es im Large- $N_c$  zwei übliche Quark-Antiquark-Mesonen.

Es gibt aber ein anderes Objekt, das im Large- $N_c$  Limes betrachtet werden kann: unsere Diskussion über Tetraquarks beruht auf den guten Diquarks. Die Frage ist nun, was ein gutes Diquark für beliebiges  $N_c$  ist. Die Antwort ist leicht: ein 'gutes Diquark' wird für  $N_c > 3$  zu einem Objekt mit  $N_c - 1$  Quarks in einer antisymmetrischen Farbwellenfunktion:

$$d_{a_1} = \varepsilon_{a_1 a_2 a_3 \dots a_{N_c}} q^{a_2} q^{a_3} \dots q^{a_{N_c}} \text{ mit } a_2, \dots, a_{N_c} = 1, \dots, N_c . \quad (151)$$

Das bedeutet, dass ein 'Tetraquark' für  $N_c > 3$  ein gebundener Zustand aus einem  $(N_c - 1)$ -Quark-Objekt und einem  $(N_c - 1)$ -Antiquark-Objekt ist:

$$\chi = \sum_{a_1=1}^{N_c} d_{a_1}^\dagger d_{a_1} . \quad (152)$$

Dieses Objekt ist auch als Dibaryonium bekannt [13]. In dieser Hinsicht hat das verallgemeinerte Tetraquark einen wohldefinierten im Large- $N_c$  Limes. Die Masse skaliert wie

$$M_\chi \propto 2(N_c - 1) \sim N_c . \quad (153)$$

Das bedeutet, dass der Parameter  $e = \frac{m^2}{G_0^2}$  in Gl. (147) wie  $N_c^0$  skaliert.

Jetzt studieren wir den Zerfall von  $\chi$  in zwei Quark-Antiquark-Mesonen. Damit das Dibaryonium zerfällt, muss eine Vernichtung von  $N_c - 3$  Quark-Antiquark-Paaren stattfinden. Sei  $p$  die Wahrscheinlichkeit einer solcher Vernichtung. Für  $N_c > 3$  ist dann die Wahrscheinlichkeit, zwei Quark-Antiquark-Mesonen zu erzeugen, proportional zu  $p^{N_c-3}$ , wobei  $p < 1$ . Das wiederum heißt, dass die Amplitude des Zerfalls wie

$$p^{(N_c-3)/2} \propto e^{-N_c} \text{ für } N_c \gg 3 \quad (154)$$

skaliert. Der entsprechende Term der Lagrange-Dichte lautet z.B.  $g\chi\vec{\pi}^2$ , was bedeutet:

$$g \propto e^{-N_c}. \quad (155)$$

Im Bezug auf die ursprünglichen Konstanten  $c_1, c_2, c_1^V, c_2^V$  gilt (unabhängig von  $N_f$ ):

$$e \propto N_c^0 \rightarrow M_\chi \propto N_c, \quad (156)$$

$$c_1, c_1^V \propto e^{-N_c}, \quad (157)$$

$$c_2, c_2^V \propto \frac{e^{-N_c}}{N_c}. \quad (158)$$

Der Zerfall  $\chi \rightarrow \pi\pi$  skaliert dann wie  $e^{-N_c}/N_c$ , d.h. er wird sehr klein für ein großes  $N_c$ . Das gibt uns Auskunft über das Large- $N_c$  Verhalten der Mischungsparameter:

$$G\text{-}\sigma : z_{G\sigma}G\sigma \rightarrow z_{G\sigma} \propto aG_0\sigma_0 \propto N_c^{-1/2},$$

$$\chi\text{-}\sigma : z_{\chi\sigma}\chi\sigma \rightarrow z_{\chi\sigma} \propto g\sigma_0 \propto N_c^{1/2}e^{-N_c},$$

$$\chi\text{-}G : z_{\chi G}\chi G \rightarrow z_{\chi G} \propto g \propto e^{-N_c}.$$

Diese Beziehungen zeigen, dass die Tetraquark-Beimischungen schnell verschwinden. Das ist zu erwarten, da die große Anzahl von Quarks in einem verallgemeinerten Tetraquark solche Mischungsprozesse unterdrückt.

## 5 Die Konstruktion des Modells: Baryon Sektor

### 5.1 Einleitung

Die Baryonen sind ein zentraler Bestandteil der Natur. Die wichtigsten Baryonen sind die Nukleonen, d.h. die Protonen und die Neutronen: sie bilden die Kerne der Atome, die die Basis für komplexe Strukturen darstellen. Die Nukleonen können im Rahmen eines chiralen Modells berücksichtigt werden. Die Wechselwirkungen der Nukleonen mit den Mesonen und die Erzeugung eines Nukleon-Nukleon-Potentials werden in diesem Schema beschrieben.

Auch der Ursprung der Nukleonenmasse wird im Rahmen des chiralen Modells untersucht. Es ist bekannt, dass die (nackten) Quarkmassen nur geringfügig zur Nukleonenmasse beitragen. Das Phänomen der Massenerzeugung erfolgt durch verschiedene Kondensate: durch das chirale Kondensat, durch das Gluon-Kondensat und womöglich auch durch das Tetraquark-Kondensat. Alle drei Kondensate spielen in diesem Prozess eine potentiell wichtige Rolle. Die Erzeugung der Nukleonenmasse ist letztendlich für die ‘‘Stofflichkeit’’ der Materie zuständig: nämlich,  $\sim 95\%$  der Masse der sichtbaren Materie im Universum kann auf den Prozess der Formation der Nukleonenmasse zurückgeführt werden<sup>8</sup>. Wie genau das im Rahmen eines chiralen Modells passiert, wird in diesem Abschnitt erläutert.

Die dazugehörige Frage, ob das Nukleon einen chiralen Partner hat, wird auch behandelt. In diesem Zusammenhang können zwei Szenarios diskutiert werden: die sogenannte triviale Zuordnung (‘naive assignment’) und die sogenannte Spiegelzuordnung (‘mirror assignment’). Die Generierung der Nukleonenmasse hängt stark von der Zuordnung ab, die tatsächlich realisiert wird.

### 5.2 Die baryonische Lagrange-Dichte in der trivialen und gespiegelten Zuordnung

#### 5.2.1 Allgemeine Beschreibung

Im klassischen linearen Sigmamodell wird die Nukleonenmasse fast ausschließlich (bis auf einen kleinen Beitrag der nackten Quarkmassen) durch die spontane Symmetriebrechung erzeugt, die zur Beziehung

$$m_N \sim \phi \sim f_\pi \quad (159)$$

führt. Das chirale Kondensat  $\phi$  kann in Verbindung mit dem Quark-Kondensat  $\langle \bar{q}q \rangle$  gebracht werden: eine einfache dimensionale Studie führt zu  $\phi \simeq \Lambda_{QCD}^{-2} \langle \bar{q}q \rangle$ , wobei  $\Lambda_{QCD}$  die schon besprochene QCD-Yang-Mills-Energieskala darstellt. In der Tat kann man durch QCD-Summenregeln ein ähnliches Verhältnis zwischen  $m_N$  und  $\langle \bar{q}q \rangle$  bekommen: die sogenannte Ioffe Formel [44] lautet

$$m_N \sim \frac{-4\pi^2}{\Lambda_B^2} \langle \bar{q}q \rangle, \quad (160)$$

wobei  $\Lambda_B$  ein energiebehafteter Parameter von der Ordnung  $\sim 1$  GeV ist.

Dennoch können nicht nur das Quark-Kondensat, sondern auch andere Kondensate wie das Gluon- und das Tetraquark-Kondensat zur Nukleonenmasse  $m_N$  beitragen [45]. Es steht noch nicht fest, wieviel diese Kondensate zur Nukleonenmasse beitragen. Die Möglichkeit, diese weiteren Kondensate innerhalb eines chiralen Modells zu studieren, wurde dank der Arbeit von Ref. [46] ermöglicht, wo die Spiegelzuordnung im linearen Sigmamodell zuerst diskutiert wurde. Neben dem Isodublett-Nukleonfeld  $N$ , mit  $N^t = (p, n)$ , wobei  $p$  das Proton und  $n$  das Neutron symbolisiert, wird auch sein chiraler Partner

---

<sup>8</sup>Der sogenannte Nukleon-Sigma-Term beschreibt den Anteil der Nukleonenmasse, der aus den expliziten nicht-verschwindenden Quarkmassen stammt: er beträgt 30-70 MeV, d.h. etwa 3-8% der gesamten Nukleonenmasse [43]. Der Baryonenanteil ist der dominierende Beitrag zur Masse der sichtbaren Materie im Universum.

$N^*$  (das mit der Resonanz  $N(1535)$  identifiziert werden kann) betrachtet. In diesem Fall ist es möglich, einen expliziten Massenterm in der Lagrange-Dichte einzuführen, der einen dimensionsbehafteten Parameter  $m_0$  enthält.

Um diese Überlegungen genau zu diskutieren, werden zuerst zwei Nukleonfelder  $\Psi_1$  und  $\Psi_2$  eingeführt, wobei  $\Psi_1$  positive Parität und  $\Psi_2$  negative Parität besitzt. Wir beschränken uns in diesem Abschnitt auf den Fall  $N_f = 2$ . Das bedeutet, dass die Nukleonfelder  $\Psi_1$  und  $\Psi_2$  zwei Isospin-Dubletts sind.

### 5.2.2 Naive Zuordnung

In der naiven Zuordnung transformieren  $\Psi_1$  und  $\Psi_2$  auf dieselbe Weise unter einer  $SU(2)_R \times SU(2)_L$  Transformation:

$$\Psi_{1R} \longrightarrow U_R \Psi_{1R}, \quad \Psi_{1L} \longrightarrow U_L \Psi_{1L}, \quad \Psi_{2R} \longrightarrow U_R \Psi_{2R}, \quad \Psi_{2L} \longrightarrow U_L \Psi_{2L} \quad . \quad (161)$$

Die folgende Lagrange-Dichte ist dann chiral-invariant:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{naive} = & \bar{\Psi}_{1L} i\gamma_\mu D_{1L}^\mu \Psi_{1L} + \bar{\Psi}_{1R} i\gamma_\mu D_{1R}^\mu \Psi_{1R} + \bar{\Psi}_{2L} i\gamma_\mu D_{2L}^\mu \Psi_{2L} + \bar{\Psi}_{2R} i\gamma_\mu D_{2R}^\mu \Psi_{2R} \\ & - \hat{g}_1 (\bar{\Psi}_{1L} \Phi \Psi_{1R} + \bar{\Psi}_{1R} \Phi^\dagger \Psi_{1L}) - \hat{g}_2 (\bar{\Psi}_{2L} \Phi \Psi_{2R} + \bar{\Psi}_{2R} \Phi^\dagger \Psi_{2L}) \quad . \end{aligned} \quad (162)$$

Die Größen

$$D_{1R}^\mu = \partial^\mu - ic_1 R^\mu, \quad D_{1L}^\mu = \partial^\mu - ic_1 L^\mu$$

und

$$D_{2R}^\mu = \partial^\mu - ic_2 R^\mu, \quad D_{2L}^\mu = \partial^\mu - ic_2 L^\mu$$

sind kovariante Ableitungen, die auf die Nukleonfelder wirken und die dimensionslosen Kopplungen  $c_1$  und  $c_2$  enthalten. Die Felder  $\Phi = (\sigma + i\eta)t^0 + (\vec{a}_0 + i\vec{\pi}) \cdot \vec{t}$  und  $R^\mu = (\omega^\mu - f_1^\mu)t^0 + (\vec{\rho}^\mu - \vec{a}_1^\mu) \cdot \vec{t}$  und  $L^\mu = (\omega^\mu + f_1^\mu)t^0 + (\vec{\rho}^\mu + \vec{a}_1^\mu) \cdot \vec{t}$  wurden in Abschnitt 3 eingeführt. Die entsprechenden Kopplungskonstanten  $\hat{g}_1$  und  $\hat{g}_2$  sind auch dimensionslos.

### 5.2.3 Spiegelzuordnung

In der Spiegelzuordnung transformieren  $\Psi_1$  und  $\Psi_2$  wie folgt

$$\Psi_{1R} \longrightarrow U_R \Psi_{1R}, \quad \Psi_{1L} \longrightarrow U_L \Psi_{1L}, \quad \Psi_{2R} \longrightarrow U_L \Psi_{2R}, \quad \Psi_{2L} \longrightarrow U_R \Psi_{2L} \quad . \quad (163)$$

Das Feld  $\Psi_1$  transformiert genau wie vorher. Das Feld  $\Psi_2$  transformiert hingegen ‘gespiegelt’ unter einer chiralen Transformation. Diese Spiegeltransformation erlaubt einen weiteren Term in der Lagrange-Dichte, der in diesem Fall lautet

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{mirror} = & \bar{\Psi}_{1L} i\gamma_\mu D_{1L}^\mu \Psi_{1L} + \bar{\Psi}_{1R} i\gamma_\mu D_{1R}^\mu \Psi_{1R} + \bar{\Psi}_{2L} i\gamma_\mu D_{2R}^\mu \Psi_{2L} + \bar{\Psi}_{2R} i\gamma_\mu D_{2L}^\mu \Psi_{2R} \\ & - \hat{g}_1 (\bar{\Psi}_{1L} \Phi \Psi_{1R} + \bar{\Psi}_{1R} \Phi^\dagger \Psi_{1L}) - \hat{g}_2 (\bar{\Psi}_{2L} \Phi^\dagger \Psi_{2R} + \bar{\Psi}_{2R} \Phi \Psi_{2L}) + \mathcal{L}_{mass} \end{aligned} \quad (164)$$

wobei

$$\mathcal{L}_{mass} = -m_0 (\bar{\Psi}_{1L} \Psi_{2R} - \bar{\Psi}_{1R} \Psi_{2L} - \bar{\Psi}_{2L} \Psi_{1R} + \bar{\Psi}_{2R} \Psi_{1L}) \quad . \quad (165)$$

Der zusätzliche Term  $\mathcal{L}_{mass}$  enthält den parameter  $m_0$  und spielt eine wichtige Rolle in der Erzeugung der Nukleonenmasse. Der Parameter  $m_0$  trägt die Dimension Energie, und deswegen ist der Term  $\mathcal{L}_{mass}$  nicht dilatationsinvariant. Es ist einfach, diesen Term mit Hilfe des Glueball-Feldes und des Tetraquark-Feldes dilatationsinvariant zu machen, siehe Abschnitt 5.4.2.

### 5.3 Erzeugung der Nukleonenmasse

#### 5.3.1 Erzeugung der Masse in der trivialen Zuordnung (nur durch spontane Symmetriebrechung)

Wenn die Baryonen unter Gl. (161) transformieren, ist die baryonische Lagrange-Dichte durch Gl. (162) beschrieben. Die Felder  $\Psi_1$  und  $\Psi_2$  können somit mit dem Nukleon  $N$  und mit der Resonanz  $N^* \equiv N(1535)$  identifiziert werden ( $\Psi_1 = N$  und  $\Psi_2 = N^*$ )<sup>9</sup>.

Wie schon im Mesonsektor diskutiert, gilt  $\phi = \sigma_0 = Zf_\pi$ , wobei  $Z \approx 1.67$  [4]. Die Konsequenz der Verschiebung  $\sigma \rightarrow \sigma + \phi$  führt zur Erzeugung der Nukleonenmassen:

$$\mathcal{L}_{\text{bar},\sigma} = -\frac{\widehat{g}_1}{2}\overline{\Psi}_1(\sigma + \phi)\Psi_1 - \frac{\widehat{g}_2}{2}\overline{\Psi}_2(\sigma + \phi)\Psi_2 .$$

Es ist deutlich, dass die Massen von  $N$  und  $N^*$  in diesem Fall durch die einfachen Beziehungen

$$m_N = \frac{\widehat{g}_1}{2}\phi \text{ und } m_{N^*} = \frac{\widehat{g}_2}{2}\phi \quad (166)$$

ausgedrückt werden. Mit den experimentellen Werten  $m_N = 939$  MeV und  $m_{N^*} = 1535$  MeV [1] (und  $\phi = Zf_\pi = 154.3$  MeV) bekommt man

$$\widehat{g}_1 = 12.2 \text{ und } \widehat{g}_2 = 20 . \quad (167)$$

Beide Massen sind einfache Funktionen von  $\phi$ , siehe Gl. (166), und verschwinden im Limes  $\phi \rightarrow 0$ .

Es ist aber schon an dieser Stelle notwendig zu betonen, dass die naive Zuordnung die Pion-Nukleon-Streulängen nicht beschreiben kann. Die Streulänge  $a_0^{(+)}$  erweist sich um zwei Größenordnungen zu groß [49]. Dieses Resultat gilt für jede natürliche Wahl der Parameter des Modells. Aus diesem Grund wird unsere Aufmerksamkeit auf die Spiegelzuordnung und ihre Implikationen fokussiert. In Abweichung von der naiven Zuordnung ist eine korrekte Beschreibung der Phänomenologie im Rahmen der Spiegelzuordnung möglich.

#### 5.3.2 Erzeugung der Masse in der Spiegelzuordnung

Wenn die Baryonfelder gespiegelt transformieren, siehe Gl. (163), ist die Lagrange-Dichte in Gl. (164) chiralinvariant. Der Term  $\mathcal{L}_{\text{mass}}$  verursacht eine Mischung zwischen den Feldern  $\Psi_1$  und  $\Psi_2$ . Die physikalischen Felder  $N$  und  $N^*$ , die dem Nukleon und dem chiralen Partner entsprechen, entstehen durch die Diagonalisierung der entsprechenden Massenmatrix:

$$\begin{pmatrix} N \\ N^* \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2 \cosh \delta}} \begin{pmatrix} e^{\delta/2} & \gamma_5 e^{-\delta/2} \\ \gamma_5 e^{-\delta/2} & -e^{\delta/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} . \quad (168)$$

Die Massen von  $N$  und  $N^*$  lauten:

$$m_{N,N^*} = \sqrt{m_0^2 + \left(\frac{\widehat{g}_1 + \widehat{g}_2}{4}\right)^2 \phi^2} \pm \frac{(\widehat{g}_1 - \widehat{g}_2)\phi}{4} . \quad (169)$$

In diesem Szenario trägt nicht nur das chirale Kondensat  $\phi$  zur Entstehung der Masse bei. Auch der  $m_0$ -Term kommt hinzu. Das chirale Kondensat ist hingegen für die Massendifferenz zwischen  $m_N$  und  $m_{N^*}$  verantwortlich. Für  $\phi \rightarrow 0$  entarten nämlich die Massen,  $m_N = m_{N^*} = m_0$ .

Der Parameter  $\delta$  in Gl. (168) kann als Funktion von  $m_0$  und den physikalischen Massen  $m_N$ ,  $m_{N^*}$  ausgedrückt werden:

$$\cosh \delta = \frac{m_N + m_{N^*}}{2m_0} . \quad (170)$$

<sup>9</sup>Ein Mischungsterm ist allerdings möglich. Man kann aber zeigen, dass die Entmischung zu einer vollständigen Trennung der zwei physikalischen Feldern führt, siehe Details in Ref. [9, 47]. Aus diesem Grund ist es erlaubt, den Mischungsterm auszulassen.



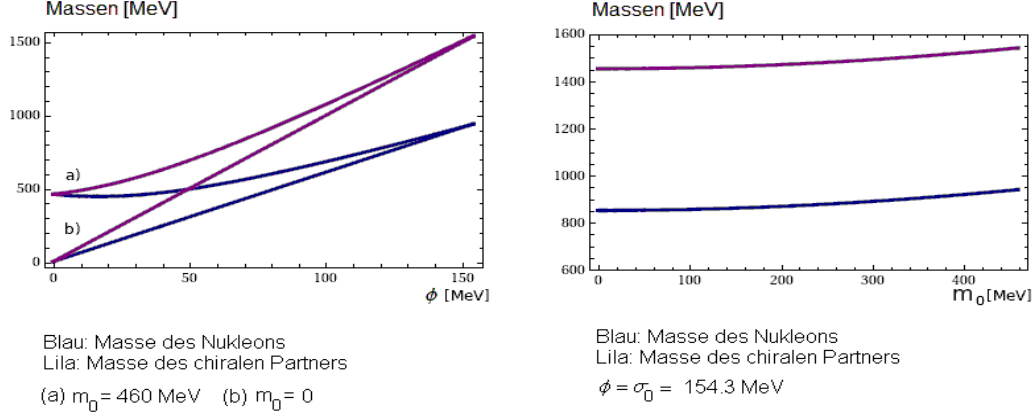


Abbildung 6: Links: Massen des Nukleons (blau) und des chiralen Partners (lila) als Funktion des chiralen Kondensates  $\phi$  für (a) den realistischen Wert  $m_0 = 460$  MeV von Gl. (171) und (b) für den Grenzfall  $m_0 = 0$ , der dem naiven Fall entspricht. Rechts: Massen des Nukleons (blau) und des chiralen Partners (lila) als Funktion des Massenparameters  $m_0$  für den physikalischen Wert des chiralen Kondensats  $\phi = Zf_\pi$ .

Für  $\delta \rightarrow \infty$  ( $m_0 \rightarrow 0$ ) verschwindet die Mischung der Felder:  $\Psi_1 = N$  und  $\Psi_2 = N^*$ . In diesem Fall entkoppeln die zwei Felder und die Situation ist dem naiven Fall ähnlich.

Aus der Form von Gl. (169) wird es deutlich, dass die Nukleonenmasse nicht als Summe von zwei Beiträgen in der Form  $m_N = m_0 + c\phi$  geschrieben werden kann. Das bedeutet, dass  $m_0$  nicht als linearer Beitrag zur Masse interpretiert werden sollte. (Diese Linearisierung ist nur dann möglich, wenn einer der zwei Beiträge dominiert). Die Resultate in Ref. [9] zeigen, dass beide Größen nicht vernachlässigbar sind. Die Parameter  $m_0$ ,  $\hat{g}_1$  und  $\hat{g}_2$  und ihre Fehler wurden in Ref. [9] mit Hilfe der experimentellen Werte [1]

$$\Gamma_{N^* \rightarrow N\pi}^{\text{exp}} = 65.7 \pm 23.6 \text{ MeV}, g_A^{N(\text{exp})} = 1.267 \pm 0.004,$$

und der auf Gitter berechneten axialen Kopplungskonstante des Partners [48]

$$g_A^{N^*(\text{latt})} = 0.2 \pm 0.3$$

berechnet:

$$m_0 = 460 \pm 136 \text{ MeV}, \hat{g}_1 = 11.0 \pm 1.5, \hat{g}_2 = 18.8 \pm 2.4. \quad (171)$$

Es ist wichtig zu betonen, dass  $m_0$  größer ist als in der ursprünglichen Arbeit von Ref. [46]. Diese Tatsache zeigt ein Zusammenspiel verschiedener Kondensate zur Formation der Nukleonenmasse.

Zur Erläuterung der Massen legen wir die folgenden zwei Fälle dar:

a) Der Parameter  $m_0$  wird bei 460 MeV festgehalten, und das chirale Kondensat  $\phi$  wird variiert. Die entsprechenden Massen werden in Abb. 6 gezeichnet. Wenn  $\phi$  von 0 bis zum physikalischen Wert  $Zf_\pi$  wächst, variiert die Nukleonenmasse zwischen  $m_0 = 460$  MeV und 939 MeV. Es wird somit gezeigt, dass die Masse nicht verschwindet wenn  $\phi \rightarrow 0$ .

b) Das chirale Kondensat  $\phi$  wird bei  $Zf_\pi$  konstant gehalten, und der Parameter  $m_0$  wird variiert. Die entsprechenden Baryonenmassen werden als Funktion von  $m_0$  in Abb. 6 gezeichnet. Wegen Gl. (169) variiert  $m_N$  nur wenig mit wachsendem  $m_0$ . Im Limes  $m_0 \rightarrow 0$  stammt die Nukleonenmasse nur

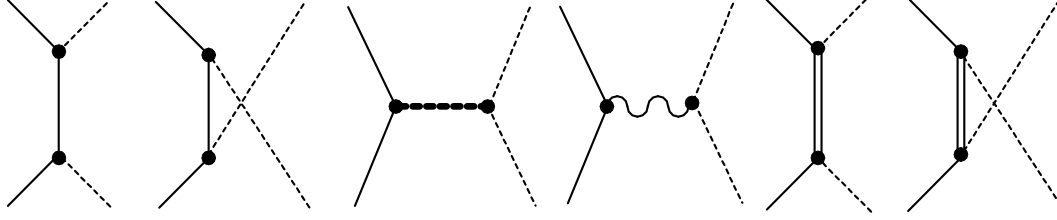


Abbildung 7: Feynman-Diagramme für die  $\pi N$ -Streuung. Durchgezogene Linie: das Nukleon. Gestrichelte Linie: das Pion. Dicke gestrichelte Linie: das  $\sigma$ -Feld. Schlangenlinie: das  $\rho$ -Meson. Die doppelte Linie: der chirale Partner des Nukleons  $N^*$ .

vom chiralen Kondensat:  $m_N = \widehat{g}_1 \phi / 2 \simeq 850$  MeV; in demselben Limes ist die Masse des Partners  $m_{N^*} = \widehat{g}_2 \phi / 2 \simeq 1450$  MeV. Von diesem Standpunkt verursacht der Wert  $m_0 = 460$  MeV eine Zunahme der Masse von nur 100 MeV. Diese Eigenschaften folgen aus der nichtlinearen Natur der Gleichung für die Nukleonenmasse. Es ist interessant zu beobachten, dass die Ioffe-Formel Gl. (160) immer noch qualitativ gilt, obwohl der Wert von  $m_0$  nicht vernachlässigbar ist.

## 5.4 Weitere Resultate und Implikationen der Spiegelzuordnung

### 5.4.1 Phänomenologie

Wir beschreiben einige relevante phänomenologische Größen, die mit dem Modell berechnet werden.

#### *$\pi N$ -Streuung*

Pion-Nukleon-Streuprozesse, siehe Abb. 7, werden im Rahmen des Modells beschrieben. Das theoretische Resultat für die Streulänge lautet  $a_0^{(-)} = (6.04 \pm 0.63) 10^{-4}$  MeV $^{-1}$  und ist in sehr gutem Einklang mit dem Experiment,  $a_0^{(-)\text{exp}} = (6.4 \pm 0.1) 10^{-4}$  MeV $^{-1}$ . Die theoretische Bestimmung der Streulänge  $a_0^{(+)}$  ist komplizierter, da sie von dem Wert der  $\sigma$ -Masse abhängt. Das ist die einzige Größe im Bereich der Baryonen, die vom skalaren mesonischen Sektor abhängt, siehe die genaue Diskussion in Ref. [9]. Dort wird gezeigt, dass auch in diesem Fall eine Übereinstimmung für eine natürliche Wahl der Parameter möglich ist.

#### *Zerfallsbreite $N^* \rightarrow N\pi$*

Das theoretische Resultat für die Zerfallsbreite  $N^* \rightarrow N\eta$  lautet  $\Gamma_{N^* \rightarrow N\eta} = 10.9 \pm 3.8$  MeV. Dieser Wert ist eindeutig zu klein im Vergleich zum Experiment:  $\Gamma_{N^* \rightarrow N\eta}^{\text{exp}} = 78.7 \pm 24.3$  MeV. Eine Verallgemeinerung zu  $N_f = 3$  und die Berücksichtigung OZI-unterdrückter Prozesse wäre in dieser Hinsicht wichtig, um eine bessere Übereinstimmung zu erhalten.

#### *Alternative Zuordnung für den Partner: $N^* = N(1650)$*

Die alternative Zuordnung für den Partner  $N^* = N(1650)$  wurde auch getestet. Ähnliche Resultate gelten für die  $\pi N$ -Streuung. Dieses Szenario steht aber in wesentlich besserem Einklang mit dem experimentellen Wert des Zerfalls  $N^* \rightarrow N\eta$ :  $\Gamma_{N^* \rightarrow N\eta} = 18.3 \pm 8.5$  MeV. Dieser Wert soll mit dem Experimentalwert  $\Gamma_{N^* \equiv N(1650) \rightarrow N\eta}^{\text{exp}} = 10.7 \pm 6.7$  MeV verglichen werden. In diesem Zusammenhang sollte eine alternative Interpretation der Resonanz  $N(1535)$  gesucht werden. Ein mögliches erweitertes Mischungsszenario wurde in Ref. [9] vorgeschlagen: zwei Baryonfelder mit Parität  $+1$  und zwei mit Parität  $-1$  werden eingeführt. Ihre Mischung generiert die Resonanzen  $N$ ,  $N(1440)$  (Roper), und

$N(1535)$ ,  $N(1650)$ . Die experimentell große Zerfallsbreite von  $N(1535) \rightarrow N\eta$  könnte als Konsequenz einer konstruktiven Interferenz auftreten.

#### *Eine hypothetische Resonanz*

Ein weiterer, leichter Kandidat als chiraler Partner des Nukleons wurde in Ref. [50] vorgeschlagen: die Masse dieser hypothetischen Resonanz wäre  $M_{N^*} \simeq 1200$  MeV und die Zerfallsbreite wäre sehr groß,  $\Gamma_{N^*} \gtrsim 700 - 800$  MeV. Eine solche Breite würde erklären, warum dieser hypothetische Zustand nicht gemessen wurde. Der Grund dieser Annahme beruht auf Resultaten bei endlicher Dichte (wie z.B. die Berechnung der Kompressibilität). Dennoch kann mit Hilfe unseres Modells dieser hypothetische Zustand ausgeschlossen werden: die Streulängen wären um zwei Größenordnungen falsch.

### 5.4.2 Die Rolle der Gluon- und Tetraquark-Kondensate

Der Term  $\mathcal{L}_{\text{mass}}$  ist nicht invariant unter einer Dilatationstransformation, da der Parameter  $m_0$  dimensionsbehaftet ist. Das ist nicht im Einklang mit der Diskussion im Abschnitt 3.3.4: im chiralen Limes muss die einzige Brechung dieser Symmetrie aus dem Eichsektor stammen.

Es ist aber nicht schwierig, den Term so zu modifizieren, dass die Dilatationssymmetrie wiederhergestellt ist. Zu diesem Zweck werden die zwei chiralinvarianten Felder  $G$  und  $\chi$  benutzt:  $G$  ist der skalare Glueball und  $\chi \equiv \frac{1}{2}[\bar{u}, \bar{d}][u, d]$  das Tetraquark. (Für  $N_f = 2$  gibt es nur ein skalar-isoskalares Tetraquark, siehe Abschnitt 4.)

Der Massenterm  $\mathcal{L}_{\text{mass}}$  wird wie folgt modifiziert:

$$\mathcal{L}_{\text{mass}} = (\alpha\chi + \beta G)(\bar{\Psi}_{1L}\Psi_{2R} - \bar{\Psi}_{1R}\Psi_{2L} - \bar{\Psi}_{2L}\Psi_{1R} + \bar{\Psi}_{2R}\Psi_{1L}) , \quad (172)$$

wobei die Konstanten  $\alpha$  und  $\beta$  dimensionslos sind.

Wenn beide Skalarfelder um den Vakuumerwartungswert verschoben werden,  $G \rightarrow G_0 + G$  und  $\chi \rightarrow \chi_0 + \chi$ , findet man wieder Gl. (165) durch folgende Identifikation:

$$m_0 = \alpha\chi_0 + \beta G_0 , \quad (173)$$

wobei  $\chi_0$  und  $G_0$  das Tetraquark-Kondensat und das Gluon-Kondensat sind. Auf diese Art wird der Parameter  $m_0$  als Summe von zwei Beiträgen geschrieben, die diesen zwei weiteren Kondensaten entsprechen.

### 5.4.3 Die Rolle des Tetraquarks für die Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung

Üblicherweise wird die Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung durch Austausch von Quark-Antiquark-Mesonen erklärt. Zwei Nukleonen vertauschen jeweils ein Quark: als Zwischenzustand bildet sich ein Quark-Antiquark-Meson. Auf dem hadronischen Niveau entspricht dieser Prozess dem Austausch eines leichten Quarkonium-Mesons, wie  $\pi$ ,  $\omega$  und  $\sigma$ . Dieser Austausch wird in unserem Modell durch die Nukleon-Meson Wechselwirkungsterme beschrieben (wobei das  $\sigma$ -Meson dem schweren Zustand  $f_0(1370)$  entspricht).

Der Term  $\mathcal{L}_{\text{mass}}$  in Gl. (172) beschreibt aber weitere Wechselwirkungen: das Nukleon-Nukleon-Potential hängt auch von dem Austausch eines Tetraquarks  $\chi$  und eines Glueballs  $G$  ab. Da der Glueball relativ schwer ist ( $\sim 1.5$  GeV), wird er in dieser Diskussion ausgelassen. Das Tetraquark kann hingegen leicht sein ( $\sim 600$  MeV) und kann somit ein wichtiges Austauscheteilchen für die Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung sein.

Der Austausch eines Tetraquark-Mesons wird in Abb. 8 gezeigt: das Diquark eines Nukleons wird mit dem Diquark des anderen Nukleons getauscht. Als Zwischenzustand bildet sich ein Diquark-Antidiquark-Zustand, d.h. ein Tetraquark. Dass dieser Austausch (potentiell) sehr wichtig ist, liegt

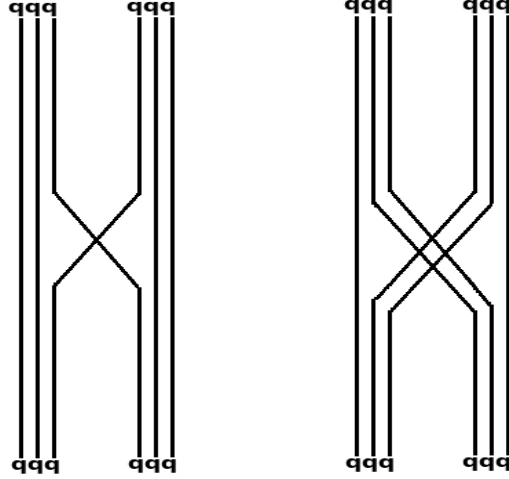


Abbildung 8: Links: bildliche Darstellung des Beitrags eines Quarkonium-Mesons zum  $NN$  Potential. Rechts: bildliche Darstellung des Beitrags eines Tetraquark-Mesons zum  $NN$  Potential.

in der Tatsache, dass ein (gutes) Diquark eine primäre Rolle für das Verständnis eines Nukleons spielt. Da das Diquark stark gebunden ist, kann man, wie viele Studien gezeigt haben, ein Nukleon als Diquark-Quark-Objekt auffassen. Es liegt jetzt nahe zu erwarten, dass ein Diquark-Austausch, der einem Tetraquark als Zwischenzustand entspricht, das Nukleon-Nukleon-Potential beeinflusst.

Es ist eigentlich bekannt, dass die Stabilität der Kerne auf die Anziehungskraft eines leichten skalaren Mesons zurückzuführen ist. Die Masse lautet ungefähr 600 MeV, die der Resonanz  $f_0(600)$  entspricht. Üblicherweise wurde dieser skalare Zustand mit dem Quark-Antiquark  $\sigma$ -Meson identifiziert. Wie aber in dieser Arbeit mehrmals diskutiert wurde, führt diese Identifikation zu Problemen. Die Rolle des leichten skalaren Zustands kann aber von dem Tetraquark übernommen werden,  $\chi = f_0(600)$ , wie schon in den Abschnitten 3 und 4 motiviert wurde. Das ist im Einklang mit der gesamten Vakuumphänomenologie.

Diese Diskussion zeigt, dass ein leichtes Tetraquark dafür zuständig sein kann, dass die Kerne überhaupt existieren. Das ist eine interessante Behauptung, die weitere Untersuchungen benötigt. Eine Studie des Systems bei endlicher Dichte ist in dieser Hinsicht notwendig. Vorläufige Resultate zeigen tatsächlich ein interessantes Zusammenspiel von Tetraquark und chiralen Kondensaten. Auch die Beziehung zu der sogenannten ‘Quarkyonic Phase’ [51] (confinierte, aber chiralsymmetrische Phase) stellt einen Ausblick dieser Arbeit dar.

#### 5.4.4 Baryonen im Large- $N_c$ Limes

Baryonen in der Large- $N_c$  Entwicklung sind ein reiches theoretisches Forschungsgebiet, das in Ref. [13] eingeleitet wurde. Hier beschränken wir uns auf die Darstellung der folgenden Skalierungen der Parameter:

$$\widehat{g}_1, \widehat{g}_2 \propto N_c^{1/2}, \alpha, \beta \propto N_c^0. \quad (174)$$

Es folgt, dass die Nukleonenmasse -wie erwartet- wie  $N_c$  skaliert. (Der Tetraquark-Term  $\alpha\chi_0$  geht schnell gegen Null, weil  $\chi_0 \propto e^{-N_c}$ .)

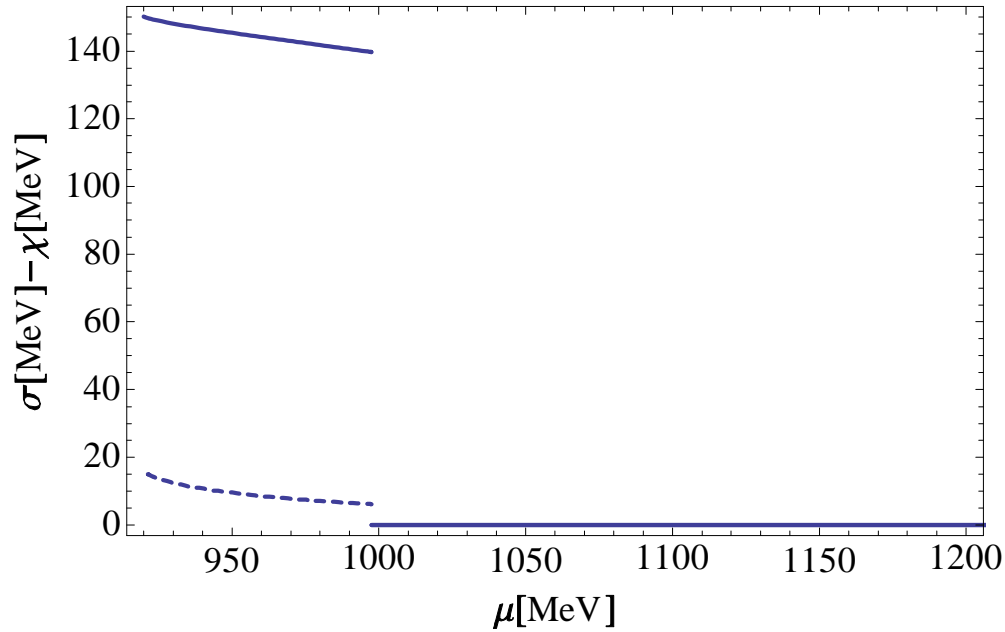


Abbildung 9: Das Quark-Antiquark-Kondensat  $\sigma_0$  und das Tetraquark-Kondensat  $\chi_0$  werden als Funktion von  $\mu$  geplottet. Ein Phasenübergang erster Ordnung findet bei  $\mu \simeq 1$  GeV statt.

#### 5.4.5 Weitere Ausblicke für die Vakuum-Physik

- $\Delta$ -Resonanz: es ist bekannt, dass die  $\Delta$ -Resonanz stark an  $\pi N$  koppelt. Ihre Einführung in das chirale Modell würde die theoretische Studie vollständiger machen, vor allem was die Rechnung der  $\pi N$ -Streuprozesse betrifft.
- $N_f = 3$ : anders als im mesonischen Sektor ist hier die Verallgemeinerung zu  $N_f = 3$  nicht trivial. Auch in diesem Fall werden keine weiteren Parameter benötigt. Die Baryonfelder treten als Oktett auf, was ein Umschreiben der Lagrange-Dichte mit Hilfe der Spuren auch im Baryon-Sektor impliziert. Bis auf die technischen Schwierigkeiten gibt es kein konzeptuelles Hindernis, eine solche Studie durchzuführen.
- Nukleon-Nukleon Streuprozesse und Dilepton-Produktion. Im Rahmen des Modells können solche Prozesse berechnet werden. Wegen der experimentellen Relevanz dieser Prozesse (siehe z.B. Ref. [52] und Referenzen darin), ist eine solche Studie, die auf einem chiralen Modell basiert ist, interessant.

### 5.5 Das Modell bei nicht verschwindender Dichte

Das Modell bei nicht verschwindender Dichte  $\rho$  wurde in Ref. [10] studiert. Der Term in Gl. (172) für  $\beta = 0$  wurde dafür verwendet: das bedeutet, dass der Massenparameter  $m_0 = \alpha\chi_0$  ausschließlich vom Tetraquark-Kondensat  $\chi_0$  generiert wird. Das Diagramm in Abb. 8 wird also im Rahmen einer Mean-Field-Näherung untersucht, um die Rolle eines zusätzlichen Tetraquark-Feldes bei  $\rho > 0$  zu untersuchen.

Folgende Resultate werden hier zusammengefasst:

- Es ist möglich, im Rahmen des hier präsentierten Modells die Kernmaterie korrekt zu beschreiben. Dabei wird der Wert des Parameters  $m_0 = \alpha\chi_0 = 460 \pm 136$  MeV, der in Vakuum bestimmt wurde, benutzt. In diesem Zusammenhang es ist wichtig anzumerken, dass ein Sigma-Modell in der trivialen Zuordnung die Sättigung der Kernmaterie nicht beschreiben kann. Wenn hingegen die Spiegelzuordnung ohne Tetraquark benutzt wird, können die Eigenschaften der Kernmaterie (Sättigung und

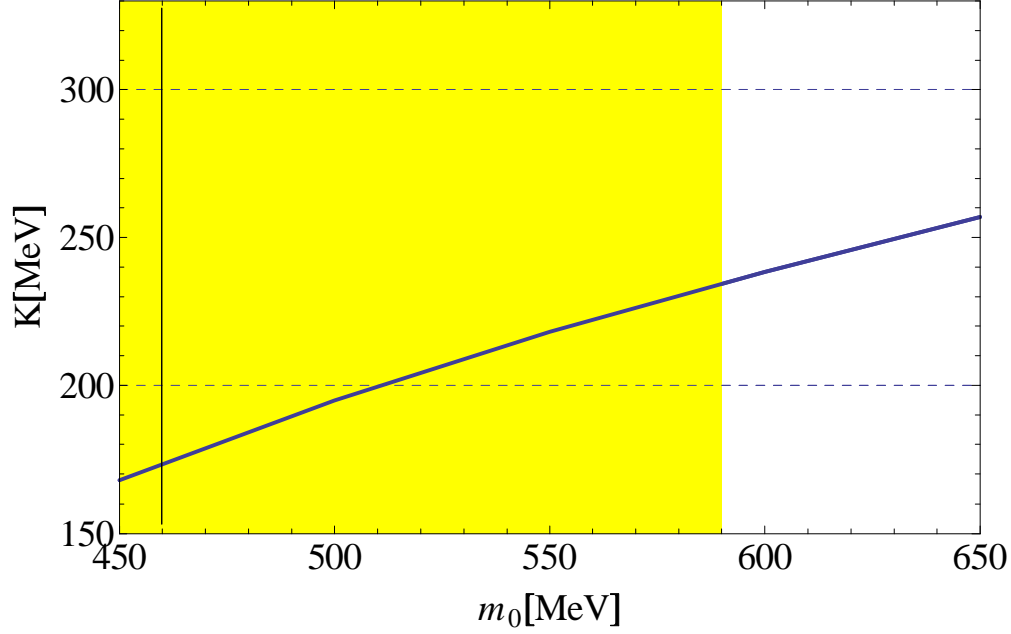


Abbildung 10: Die Kompressibilität der Kernmaterie wird als Funktion von  $m_0$  geplottet. Der Gelber Band zeigt die Werte von  $m_0$ , die im Einklang mit der Vakuumsphysik sind. Die zwei horizontalen gestrichelten Linien zeigen den experimentell bestimmten Wert der Kompressibilität:  $200 \text{ MeV} \lesssim K \lesssim 300 \text{ MeV}$ . Die korrekte Beschreibung der Kompressibilität ist sichtbar.

Kompressibilität) für den großen Wert  $m_0 \simeq 800 \text{ MeV}$  korrekt berechnet werden [50]. Dieser große Wert von  $m_0$  führt aber zu Schwierigkeiten in der phänomenologischen Beschreibung von Vakuumsgrößen. In unserem Modell, in dem das Tetraquark hinzugefügt wurde, ist eine korrekte Beschreibung von Größen im Vakuum und bei nicht verschwindender Dichte gleichzeitig möglich.

- Der Verlauf des Quark-Antiquark-Kondensats und des Tetraquark-Kondensats in Abhängigkeit des chemischen Potentials  $\mu$  wird in Abb. 9 präsentiert. Ein Phasenübergang erster Ordnung findet bei  $\mu \simeq 1 \text{ GeV}$  statt. Das entstprechende Intervall der Dichte variiert zwischen 3-10  $\rho_0$ , siehe Details in Ref. [10]. Bei dem Phasenübergang sind beide Kondensate unstetig.
- Die Kompressibilität  $K$  der Kernmaterie wird in Abb. 10 als Funktion von  $m_0$  geplottet. Für  $m_0 = 500 \text{ MeV}$  lautet sie  $K \simeq 200 \text{ MeV}$ , der im Einklang mit dem Experiment ist ( $200 \text{ MeV} \lesssim K \lesssim 300 \text{ MeV}$  [53]). Es ist bemerkenswert, dass die Kompressibilität und die Pion-Nukleon-Streulängen kompatibel sind.
- Wenn das Tetraquark-Feld der leichtesten skalaren Resonanz  $f_0(600)$  entspricht, gibt es eine kuriose Konsequenz: die Kernmaterie scheint nur für  $N_c = 3$  zu existieren. Schon für  $N_c = 4$  wäre die Attraktion durch das Tetraquark zu schwach, um die Sättigung der Kernmaterie zu ermöglichen [54].

## 6 Das Tetraquark bei nicht verschwindender Temperatur

### 6.1 Einleitung

Die Studie eines chiralen Modells bei nicht verschwindender Temperatur ist ein wichtiges Thema der Hadronenphysik der letzten 30 Jahre. Viele Erkenntnisse wurden aus diesen Studien gewonnen: die Phänomenologie des chiralen Phasenüberganges, der Verlauf der Massen als Funktion von  $T$ , die Wiederherstellung der chiralen Symmetrie sind einige der meistuntersuchten thermodynamischen Eigenschaften.

Dennoch ist eine Kritik an solchen Modellen angebracht. Sowohl die hadronischen Modelle als auch dem Quark-Bild basierte auf Modelle (wie das NJL-Modell und moderne Generalisierungen, wie das PNJL-Modell) enthalten eine leichte skalare Quark-Antiquark Resonanz, die in der Regel mit  $f_0(600)$  identifiziert wird. Das entsprechende Feld kondensiert und beschreibt das berühmte chirale Kondensat. Folgendes Problem ist aber nicht zu übersehen: wenn die Resonanz  $f_0(600)$  *nicht* einem Quarkonium entspricht, enthalten viele Studien bei  $T \neq 0$  von Anfang an eine falsche Identifizierung. Wie im Lauf dieser Arbeit diskutiert wurde, ist es die Resonanz  $f_0(1370)$ , die als (dominanter) Quark-Antiquark/Zustand beschrieben wird. Dennoch kann die leichte Resonanz  $f_0(600)$  auch als Tetraquark eine wichtige Rolle bei endlichem  $T$  spielen.

In diesem Abschnitt werden die Resultate der ersten Studie in dieser Richtung präsentiert [11]. Das einfache Modell von Abschnitt 4.5 wird dafür benutzt. Natürlich ist ein solches Modell noch nicht realitätsgetreu genug, um die Natur vollständig zu beschreiben. Dennoch enthält dieses Modell schon wichtige Freiheitsgrade, um die Phänomenologie bei  $T \neq 0$  untersuchen zu können. Diese einfache Wahl zeigt, dass ein leichtes zusätzliches Tetraquark-Feld die Physik des Phasenübergangs beeinflussen kann. Außerdem wird das Quarkonium/Tetraquark/Mischungsphänomen bei  $T > 0$  sogar intensiver als bei  $T = 0$ .

### 6.2 Einfaches Modell bei $T \neq 0$

Wir arbeiten mit dem Modell von Gl. (149) im Limes  $m_G \rightarrow \infty$  (eingefrorener Glueball): das Pion  $\vec{\pi}$ , das nackte Quarkonium  $\sigma \equiv \bar{n}n \equiv \sqrt{\frac{1}{2}}(\bar{u}u + \bar{d}d)$  und das nackte Tetraquark  $\chi \equiv \frac{1}{2}[u, d][\bar{u}, \bar{d}]$  sind die Freiheitsgrade. Das Potential lautet:

$$V = \frac{\lambda}{4} (\sigma^2 + \vec{\pi}^2 - F^2)^2 - \varepsilon\sigma + \frac{1}{2}M_\chi^2\chi^2 - g\chi(\sigma^2 + \vec{\pi}^2). \quad (175)$$

Das Minimum des Potentials lautet (bis zur Ordnung  $O(\varepsilon)$ ):

$$\sigma_0 \simeq \frac{F}{\sqrt{1 - 2g^2/(\lambda M_\chi^2)}} + \frac{\varepsilon}{2\lambda F^2}, \quad \chi_0 = \frac{g}{M_\chi^2}\sigma_0^2, \quad \vec{\pi}_0 = 0. \quad (176)$$

Wie üblich gilt:  $\sigma_0 = f_\pi = 92.4$  MeV. Das Tetraquark-Kondensat  $\chi_0$  ist proportional zu  $\sigma_0^2$ , was bedeutet, dass das Tetraquark-Kondensat von dem chiralen Kondensat induziert wird.

Man verschiebt die Felder um die vev's,  $\sigma \rightarrow \sigma + \sigma_0$  und  $\chi \rightarrow \chi + \chi_0$ , und entwickelt:

$$V = \frac{1}{2}(\chi, \sigma) \begin{pmatrix} M_\chi^2 & -2g\sigma_0 \\ -2g\sigma_0 & M_\varphi^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \sigma \end{pmatrix} + \frac{1}{2}M_\pi^2\vec{\pi}^2 + \dots, \quad (177)$$

wobei

$$M_\sigma^2 = \sigma_0^2 \left( 3\lambda - \frac{2g^2}{M_\chi^2} \right) - \lambda F^2, \quad M_\pi^2 = \frac{\varepsilon}{\sigma_0}. \quad (178)$$

Da die Matrix in Gl. (177) nicht diagonal ist, sind die Felder  $\sigma$  und  $\chi$  keine Masseneigenzustände von  $V$ . Das ist ein expliziter Spezialfall der Mischungsprozesse, die schon in Abschnitt 4.5 allgemein

erläutert wurden. Hier berechnen wir auch die Entmischung der Felder: man führt die Eigenzustände  $(H, S)$ , die im Rahmen dieses Modells mit den Resonanzen  $f_0(600)$  und  $f_0(1370)$  identifiziert werden, als  $SO(2)$ -Rotation der nackten Felder  $\sigma$  und  $\chi$  ein:

$$\begin{pmatrix} H = f_0(600) \\ S = f_0(1370) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_0 & \sin \theta_0 \\ -\sin \theta_0 & \cos \theta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \sigma \end{pmatrix},$$

$$\theta_0 = \frac{1}{2} \arctan \frac{4g\sigma_0}{M_\sigma^2 - M_\chi^2}. \quad (179)$$

Die physikalischen Massen lauten

$$M_H^2 = M_\chi^2 \cos^2 \theta_0 + M_\sigma^2 \sin^2 \theta_0 - 2g\sigma_0 \sin(2\theta_0), \quad (180)$$

$$M_S^2 = M_\sigma^2 \cos^2 \theta_0 + M_\chi^2 \sin^2 \theta_0 + 2g\sigma_0 \sin(2\theta_0). \quad (181)$$

Wie in Abschnitt 4 erklärt, gilt die Massenordnung

$$M_S > M_\sigma > M_\chi > M_H.$$

Der Zustand  $H \equiv f_0(600)$  ist dann überwiegend ein Tetraquark, und  $S \equiv f_0(1370)$  ist überwiegend ein Quarkonium.

Im Limes  $g \rightarrow 0$  entkoppelt das Feld  $\chi$ : ein einfaches lineares Sigma-Modell für die Felder  $\vec{\pi}$  und  $\sigma$  und eine freies Tetraquark-Feld  $\chi$  bleiben übrig. Der Mischungswinkel  $\theta_0$  und das Tetraquark-Kondensat verschwinden. Es ist insofern klar, dass der Parameter  $g$  die neuen Eigenschaften des Modells beschreibt. Je größer  $g$  ist, desto intensiver die Mischung und das Zusammenspiel von Quarkonium und Tetraquark.

### 6.3 Resultate und Diskussion

Um die Physik bei  $T \neq 0$  zu untersuchen, wird der CJT-Formalismus [55] in der Hartree-Fock-Näherung benutzt [55, 56]. Die Massen der Resonanzen werden  $T$ -abhängige Funktionen:  $M_S(T)$ ,  $M_H(T)$ , und  $M_\pi(T)$ .

Auch der Mischungswinkel, das chirale Kondensat und das Tetraquark-Kondensat entwickeln eine  $T$ -Abhängigkeit:  $\theta_0 \rightarrow \theta(T)$ ,  $\sigma_0 \rightarrow \sigma_0(T)$  und  $\chi_0 \rightarrow \chi_0(T)$ . Natürlich müssen die Werte bei  $T = 0$  reproduziert werden ( $i = \pi, \sigma, \chi$ ):

$$M_i(T=0) = M_i, \theta(T=0) = \theta_0, \sigma_0(T=0) = \sigma_0, \chi_0(T=0) = \chi_0. \quad (182)$$

Im Limes  $g \rightarrow 0$  entkoppelt das Tetraquark:  $S$  ist ein reines Quarkonium und  $H$  ein reines Tetraquark. Das Tetraquark spielt in diesem Limes keine Rolle für den Phasenübergang. Der Phasenübergang ist ein Crossover für  $M_S \leq 0.95$  GeV und von erster Ordnung für  $M_S > 0.95$  GeV. Dieses Resultat ist bekannt, siehe z.B. Ref. [57]. Ein schwerer chiraler Partner des Pions ( $> 1$  GeV) in einem linearen  $\sigma$ -Modell führt zu einem Phasenübergang erster Ordnung, was nicht im Einklang mit QCD-Gitter-Simulationen ist [58].

Die Einführung des Tetraquarks mit  $g > 0$  hat aber einen nicht vernachlässigbaren Einfluss auf die Phänomenologie, wie in Abb. 11 gezeigt wird. Im linken Kasten von Abb. 11 wird die Ordnung des Phasenübergangs als Funktion der Parameter  $g$  und  $M_S$  für die Wahl  $M_H = 0.4$  GeV gezeigt. Im rechten Kasten von Abb. 11 wird der Verlauf des chiralen Kondensats für die Parameterwahl  $M_S = 1.0$  GeV und  $M_H = 0.4$  GeV veranschaulicht: die verschiedenen  $g$ -Werte entsprechen den schwarzen Punkten im linken Kasten.

Es ist leicht zu erkennen, dass: (i) je größer  $g$  ist, desto kleiner wird  $T_c$ :  $T_c = 250$  MeV für  $g \rightarrow 0$  und  $T_c \simeq 200$  MeV für  $g = 2.0$  GeV; (ii) die Ordnung des Phasenüberganges wird beeinflusst: für



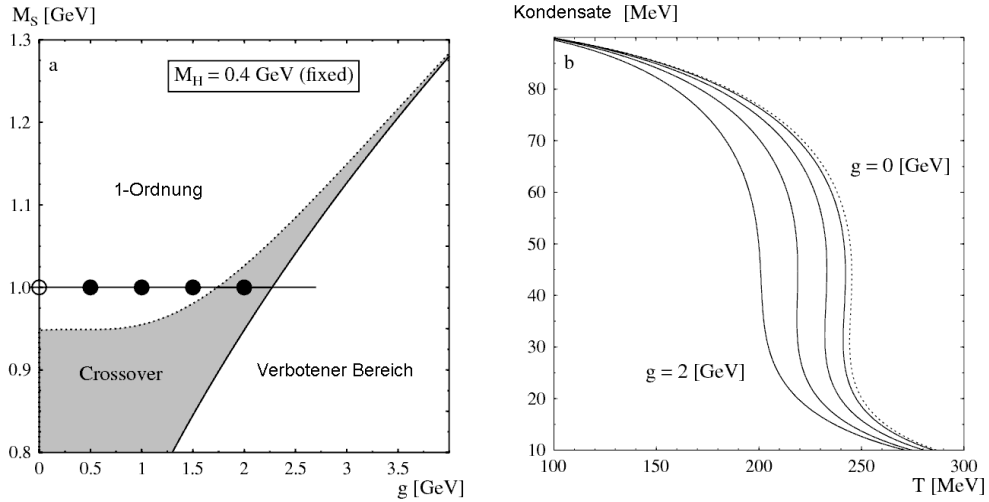


Abbildung 11: Links: Ordnung des Phasenüberganges in Abhängigkeit von den Parametern  $g$  und  $M_S$ . ( $M_H = 0.4$  GeV). Rechts: Verlauf des chiralen Kondensats  $\phi$  als Funktion von  $T$  für verschiedene  $g$ -Werte. Die Kurven entsprechen den schwarzen Punkten im linken Kasten.

wachsende  $g$ -Werte wird der Phasenübergang erster Ordnung zuerst geschwächt, und für  $g$  groß genug ist ein Crossover vorhanden. Das bedeutet, dass die Einkopplung des Tetraquarks in das Modell ( $g > 0$ ) zu einer Verkleinerung der kritischen Temperatur und eventuell auch einem Crossover führen kann. Es ist nützlich, eine ausführliche Studie eines Crossover-Falles zu präsentieren. Die Vakuummassen werden bei den (üblichen) Werten  $M_S = 1.2$  GeV und  $M_H = 0.4$  GeV festgehalten [1]. Die Kopplungskonstante  $g$  wird dann bei  $g = 3.4$  GeV fixiert, damit im Einklang mit Lattice Simulationen ein Crossover stattfindet. Außerdem werden die Masse  $M_\pi = 139$  MeV und die Zerfallskonstante  $\sigma_0 = f_\pi = 92.4$  MeV benutzt. Dadurch können alle Parameter des Modells festgelegt werden:  $\lambda = 52.85$ ,  $M_\chi = 0.96$  GeV und  $F = 64.2$  MeV.

Der Verlauf der Kondensate wird im linken Kasten von Abb. 12 gezeigt. Bei  $T_c = 180$  MeV fällt das Quark-Kondensat  $\sigma_0(T)$  schnell ab und die chirale Symmetrie wird wiederhergestellt. Für  $T < T_c$  zeigt das Tetraquark-Kondensat  $\chi_0(T)$  einen qualitativ ähnlichen Verlauf wie  $\sigma_0(T)$ , aber für  $T > T_c$  wächst die Funktion  $\chi_0(T)$ . Das ist eine ziemlich überraschende Eigenschaft. Eine weitere Studie dieses Verlaufs wäre sicherlich interessant. Die Frage, ob ein solches wachsendes Tetraquark-Kondensat einige thermodynamische Observablen beeinflussen kann, ist offen.

Der Verlauf der Massen wird im rechten Kasten von Abb. 12 gezeigt:  $M_S(T)$  fällt zuerst langsam ab, aber bei  $T_s \simeq 160$  MeV findet eine unstetige Verkleinerung statt. Umgekehrt zeigt  $M_H(T)$  bei  $T_s$  eine unstetige Erhöhung. Es ist in diesem Zusammenhang wichtig, die folgende Definition klarzustellen:  $S$  ist der Zustand, der einen Quark-Antiquark-Anteil größer als 50% besitzt, und  $H$  ist der Zustand, der einen Tetraquark-Anteil größer als 50% besitzt. Für  $T < T_s$  ist  $S(H)$  der schwere (leichte) Zustand, für  $T > T_s$  umgekehrt. Man kann grob sagen, dass bei  $T = T_c$  die Rollen des Tetraquarks und des Quarkoniums vertauscht werden.

Der Mischungswinkel  $\theta(T)$  wird in Abb. 13 gezeigt. Es ist bemerkenswert, dass die Mischung mit der Temperatur  $T$  wächst: das ist eine allgemeine Eigenschaft, die nicht von den numerischen Details

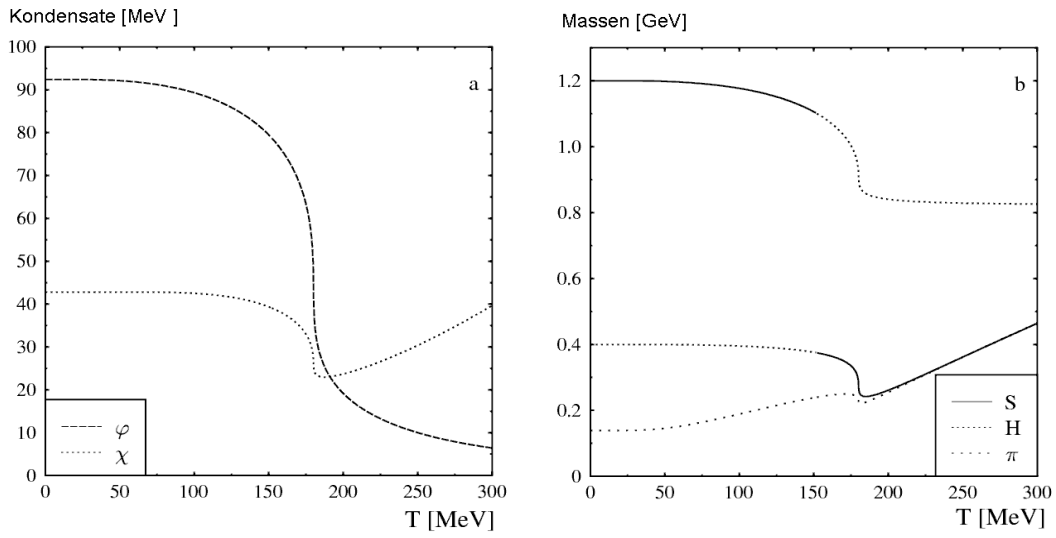


Abbildung 12: Links: das chirale Kondensat und das Tetraquark-Kondensat werden als Funktion von  $T$  dargestellt. Rechts: die Massen der drei Zustände  $\pi$ ,  $S$  und  $H$  werden gezeigt.

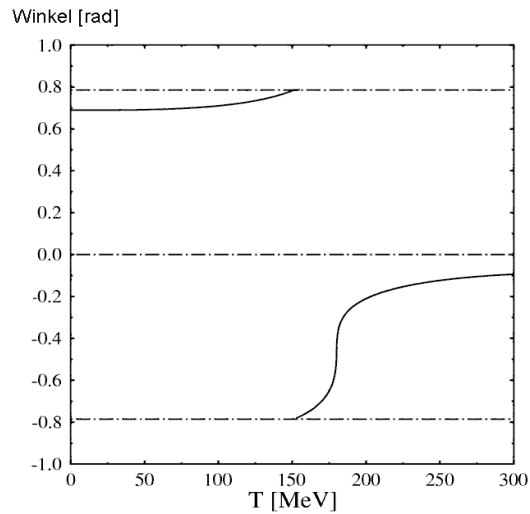


Abbildung 13: Der Mischungswinkel  $\theta(T)$  wird gezeigt. Bei  $T = T_s$  erreicht  $\theta$  den Wert von  $\pi/4$ , der einer maximalen Mischung entspricht.

abhängt. Bei  $T = T_s$  ist die Mischung maximal:

$$|\theta(T = T_s)| = \pi/4 .$$

Das erlaubt auch, eine präzise mathematische Definition der Temperatur  $T_s$  zu formulieren. Die Funktion  $\theta(T)$  ist bei  $T_s$  unstetig: sie springt von dem Wert  $\pi/4$  zu dem Wert  $-\pi/4$ ,

$$\lim_{T \rightarrow T_s} \theta(T) = \mp \pi/4 .$$

Für  $T = T_s$  bestehen beide Zustände  $S$  und  $H$  aus 50% Quarkonium und 50% Tetraquark.

Es wurde somit gezeigt, dass die Interpretation von  $f_0(600)$  als (überwiegend) Tetraquark die Thermodynamik beeinflusst. Weitere Studien sind in diesem Gebiet notwendig: man sollte die schon besprochenen skalaren Resonanzen  $f_0(980)$ ,  $f_0(1500)$  und  $f_0(1710)$  einbauen und ein vollständiges Szenario untersuchen ( $N_f = 3 + \text{Glueball}$ ). Außerdem, (Axial)Vektormesonen sollten auch berücksichtigt werden. Da sie eine so wichtige Rolle für die Vakuumphysik spielen, ist es notwendig, sie für eine vollständige Studie der thermodynamischen Eigenschaften in Betracht zu ziehen. Das ist eine wichtige Fragestellung für künftige Projekte.

## 7 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde die Konstruktion eines hadronischen Modells der QCD mit linearer Realisierung der chiralen Symmetrie präsentiert.

Zuerst ist unser Blickwinkel ganz allgemein gewesen: anhand der Large- $N_c$  Entwicklung wurden grundlegende Eigenschaften eines (beliebigen) hadronischen Modells diskutiert. Auch die moderne Problematik der sogenannten ‘dynamisch generierten’ Resonanzen wurde kritisch analysiert; es wurde somit festgestellt, warum Quark-Antiquark, Gluebälle und auch Tetraquarks nicht als dynamisch generiert interpretiert werden sollen. Die Benutzung eines einfachen Modells hat uns ebenfalls erlaubt, die tückischen Aspekte solcher Studien offensichtlich zu machen.

Als zweiter Schritt wurden die Symmetrien der QCD aufgelistet und zusammengefasst. Die besondere Rolle der Dilatationssymmetrie wurde betont. Das hat uns erlaubt, ein chirales Modell zu erstellen, das nur Terme mit Dimension vier enthält. Ein wichtiger Aspekt dieser Arbeit ist, dass die (Axial)Vektormesonen von Anfang an berücksichtigt wurden: die Motivation dafür ist, dass diese Resonanzen sehr wichtig für die Vakuumphysik sind. Unter anderem beeinflussen sie auch (pseudo)skalare Prozesse, wie. z.B. den Zerfall  $\sigma \rightarrow \pi\pi$ .

Der Fall  $N_f = 2$  wurde diskutiert und die wichtige Rolle der skalaren Resonanzen klar gemacht: das Bild, in dem der chirale Partner des Pions die Resonanz  $f_0(1370)$  ist und nicht -wie sonst in verschiedenen Arbeiten angenommen-  $f_0(600)$  ist, wird bevorzugt. Die Resonanz  $f_0(600)$ , zusammen mit  $f_0(980)$ ,  $a_0(980)$  und  $k(800)$ , kann erfolgreich als Tetraquark interpretiert werden.

Die explizite Einführung der Tetraquarks in das chirale Modell wurde durchgeführt. Die guten skalaren und pseudoskalaren Diquarks und das daraus entstehende skalare Tetraquark-Multiplett wurden beschrieben. Im Fall  $N_f = 2$  existiert nur ein Tetraquark. Diese Tatsache hat uns erlaubt, ein einfaches Modell für die Tetraquark-Quarkonium-Glueball-Mischung zu konstruieren. Der Fall  $N_f = 3$  ist hingegen realistischer und kann einen wichtigen Aspekt der Natur beschreiben: ein ganzes Tetraquark-Nonett existiert, das die leichten Resonanzen  $f_0(600)$ ,  $f_0(980)$ ,  $a_0(980)$  und  $k(800)$  erklären kann. Sowohl die Massenordnung als auch die Zerfallseigenschaften dieser physikalischen Resonanzen sind eine natürliche Konsequenz des Tetraquark-Szenarios. Als letzter Schritt der Diskussion über Tetraquarks wurde die Besonderheit ihres Large- $N_c$  Limes diskutiert: es wurde gezeigt, dass die korrekte Verallgemeinerung eines Tetraquarks nicht ein Vier-Quark-Objekt ist, sondern ein ‘Dibaryonium’: das ist ein Objekt, das aus  $N_c - 1$  Quarks und  $N_c - 1$  Antiquarks besteht. Das Large- $N_c$  Verhalten kann unter dieser Perspektive leicht bestimmt werden.

Die Baryonenfelder sind ein zentraler Bestandteil der Hadronenphysik. Aus diesem Grund wurden das Nukleonfeld und sein chiraler Partner in das Modell eingeführt. Ein wichtiger Teil dieser Studie ist die Frage über den Ursprung der Nukleonenmasse:  $m_N$  ist eine (nichtlineare) Funktion von den Kondensaten: dem Gluon-Kondensat, dem chiralen (Quark-Antiquark) Kondensat und dem Tetraquark-Kondensat. Das Resultat der Studie zeigt, dass ein Zusammenspiel all dieser Größen notwendig ist, um die Nukleonenmasse zu verstehen.

Als letztes Thema dieser Arbeit wurde eine Studie der Thermodynamik mit dem ‘neuen’ Tetraquark-Freiheitsgrad durchgeführt: ein leichtes Tetraquark kann die thermodynamischen Eigenschaften beeinflussen. Das ist zwar eine wichtige Erkenntnis, aber solche Studien müssen mit realistischeren Modellen (mit allen relevanten Freiheitsgraden) wiederholt werden. Die Fortsetzung dieser Arbeit bei endlicher Temperatur und Dichte stellt einen wichtigen Ausblick dar, der zur Beschreibung und zum theoretischen Verständnis von modernen hoch-energetischen Experimenten dienen soll.

Verschiedene Ausblicke wurden im Lauf dieser Arbeit präsentiert. Sie können wie folgt klassifiziert werden: (i)  $N_f > 2$ . (ii) Skalare Glueball und Tetraquarks. (iii) Pseudoskalare Glueball. (iv) Weitere

Prozesse im Standardmodell. (v) Nicht verschwindende Temperatur und Dichte. Wir fassen zuletzt diese verschiedenen Forschungsvorhaben zusammen.

(i) Das chirale Modell wurde für eine beliebige Flavoranzahl  $N_f$  präsentiert. Explizite Rechnungen wurden aber für den Fall  $N_f = 2$  durchgeführt. Die Verallgemeinerung zu  $N_f = 3$  stellt ein künftiges Projekt dar. Nur zwei zusätzliche Parameter werden im Fall  $N_f = 3$  im Vergleich zu  $N_f = 2$  gebraucht. Es gibt jedoch eine wesentlich größere Anzahl von experimentellen Werten, die benutzt werden können. Auch der Fall  $N_f = 4$  kann untersucht werden: einige Charmonium-Zustände und ihre Zerfälle (wie z.B. der  $J/\psi$  Zerfall) können somit beschrieben werden. Das würde auch eine Verknüpfung der hadronischen Physik der leichten Quarks mit schweren Quarks ermöglichen.

(ii) Das Dilaton-Feld hat von Anfang an eine wichtige Rolle für die Konstruktion des Modells gespielt. Die Symmetrie unter Dilatationstransformationen und ihre anomale Brechung sind ein fundamentales Phänomen der QCD. Die explizite Rechnung der Eigenschaften des entsprechenden Teilchens, des Glueballs, im Rahmen des Modells mit  $N_f = 3$  und die Berechnung der Mischung mit Quarkonia ist ein vielversprechendes Projekt. Außerdem sollten auch die leichten Tetraquarks berücksichtigt werden: daraus folgen interessante Mischungsphänomene im leichten skalaren Sektor, die Quarkonia, Tetraquarks und den Glueball betreffen.

(iii) Der pseudoskalare Glueball kann im Rahmen des Modells beschrieben werden. Die Kopplung an die skalaren und pseudoskalaren Mesonen erfolgt durch die axiale Anomalie. Gitter-Rechnungen vorhersagen eine Masse des pseudoskalaren Glueballs von ungefähr 2.6 GeV [14]. In diesem Fall kann eine solche hypothetische Resonanz im künftigen PANDA-Projekt bei FAIR in der GSI/Darmstadt experimentell untersucht werden [36].

(iv) Weitere Prozesse des Standard-Modells können studiert werden: Nukleon-Nukleon Streuprozesse und die daraus entstehende Produktion von Dileptonen können gerechnet werden. Außerdem ermöglicht die Einkopplung der schwachen Eichbosonen schwache Prozesse, die Hadronen enthalten, zu berechnen. Darüber hinaus kann auch das Higgs-Feld und seine Kopplung an Hadronen berücksichtigt werden.

(v) Weitere Studien bei nicht verschwindender Dichte und Temperatur sind notwendig. Die Analyse in den Abschnitten 5 und 6 stellen nur eine erste Studie in dieser Richtung dar. Die potentiell wichtige Rolle des Tetraquarks, siehe Abb. 6, benötigt weitere Untersuchungen sowohl im Vakuum als auch bei endlicher Dichte: die Möglichkeit, dass ein Tetraquark-Feld letztendlich für die Stabilität der Kerne zuständig ist, ist faszinierend. Es werden jedoch weitere Tests gebraucht, um die eigentliche Rolle dieses Feldes für die Hadronenphysik festzulegen.

## Danksagung

Ich möchte allen meinen Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern für die erfolgreiche Zusammenarbeit in den vergangenen Jahren herzlich danken.

An erster Stelle bedanke ich mich bei Prof. Dirk H. Rischke für die langjährige Kooperation im Rahmen der chiralen Gruppe am Institut für Theoretische Physik der JW Goethe/Universität Frankfurt, für die Entwicklung neuer Forschungsthemen und deren Realisierung und auch für die Möglichkeit, aktiv an der Lehre an der Universität teilnehmen zu dürfen.

Ich danke Dr. Susanna Gallas für die Kooperation über die Studie der Nukleonen, Denis Parganlija für die Mitarbeit über die Mesonen, Achim Heinz für die Studie des Tetraquarks, Stanislaus Janowski für die Studie über den Glueball, Stefan Strüber, Martin Grahl und Elina Seel für die Untersuchung über das Thema der Feldtheorien bei endlicher Temperatur, Anja Habersetzer für die Studie der schwachen Eichbosonen. Ein herzlicher Dank geht an Dr. Giuseppe Pagliara und Ralf Hofmann für die Zusammenarbeit in Frankfurt und in Heidelberg. Ich bin sicher, dass diese Kooperationen auch in der Zukunft weitergeführt werden und zu erfolgreichen neuen Arbeiten führen werden.

Ich danke meinen Freunden in Frankfurt am Main: Elvira Santini, Klemens Rottler, Diana Nicmorus, Alex und Diana Nikolla, Giorgio Torrieri.

Allen möchte ich für die zahlreichen Diskussionen über Physik und darüber hinaus danken. Oft sind solche Diskussionen bei einem Glas Bier oder Wein bis spät in die Nacht fortgesetzt worden.

Ich möchte auch meine Verwandten und Freunden in Italien erwähnen: meine Mutter, mein Vater, der sich im Jahr 2007 verabschiedet hat, meine Tante und Cousine, meine Freunde und Trauzeugen Diego und Valeria, und mein Freund Alessandro und seine Eltern.

Am Ende möchte ich meiner lieben Frau Gosia und meiner kleinen Tochter Angela danken. Das wunderschöne und entspannte Zusammenleben mit meinen zwei lieben Mädels hat mit Sicherheit zur Qualität meiner Forschung und Lehre beigetragen.

## Literatur

- [1] K. Nakamura et al. (Particle Data Group), J. Phys. G **37**, 075021 (2010)
- [2] F. Giacosa, Phys. Rev. D **80** (2009) 074028 [arXiv:0903.4481 [hep-ph]].
- [3] F. Giacosa and G. Pagliara, Phys. Rev. C **76** (2007) 065204 [arXiv:0707.3594 [hep-ph]].
- [4] D. Parganlija, F. Giacosa and D. H. Rischke, Phys. Rev. D **82** (2010) 054024 [arXiv:1003.4934 [hep-ph]].
- [5] S. Janowski, D. Parganlija, F. Giacosa, D. H. Rischke, Phys. Rev. **D84** (2011) 054007. [arXiv:1103.3238 [hep-ph]].
- [6] F. Giacosa, Phys. Rev. D **74** (2006) 014028 [arXiv:hep-ph/0605191].
- [7] F. Giacosa, Phys. Rev. D **75** (2007) 054007 [arXiv:hep-ph/0611388].
- [8] F. Giacosa and G. Pagliara, Nucl. Phys. A **833** (2010) 138 [arXiv:0905.3706 [hep-ph]].
- [9] S. Gallas, F. Giacosa and D. H. Rischke, Phys. Rev. D **82** (2010) 014004 [arXiv:0907.5084 [hep-ph]].
- [10] S. Gallas, F. Giacosa and G. Pagliara, Nucl. Phys. A **872** (2011) 13 [arXiv:1105.5003 [hep-ph]].
- [11] A. Heinz, S. Struber, F. Giacosa and D. H. Rischke, Phys. Rev. D **79** (2009) 037502 [arXiv:0805.1134 [hep-ph]].
- [12] G. 't Hooft, Nucl. Phys. B **72** (1974) 461.
- [13] E. Witten, Nucl. Phys. B **160** (1979) 57.
- [14] Y. Chen *et al.*, Phys. Rev. D **73** (2006) 014516. [arXiv:hep-lat/0510074].
- [15] J. Gasser and H. Leutwyler, Annals Phys. **158** (1984) 142. See also S. Scherer, Adv. Nucl. Phys. **27** (2003) 277 [arXiv:hep-ph/0210398] and refs. therein.
- [16] G. Ecker, J. Gasser, A. Pich and E. de Rafael, Nucl. Phys. B **321** (1989) 311. M. Bando, T. Kugo and K. Yamawaki, Phys. Rept. **164** (1988) 217. E. E. Jenkins, A. V. Manohar and M. B. Wise, Phys. Rev. Lett. **75** (1995) 2272 [arXiv:hep-ph/9506356].
- [17] Z. H. Guo, L. Y. Xiao and H. Q. Zheng, Int. J. Mod. Phys. A **22** (2007) 4603 [arXiv:hep-ph/0610434].
- [18] M. F. M. Lutz and E. E. Kolomeitsev, Nucl. Phys. A **730** (2004) 392 [arXiv:nucl-th/0307039]. M. Wagner and S. Leupold, Phys. Lett. B **670** (2008) 22 [arXiv:0708.2223 [hep-ph]]. M. Wagner and S. Leupold, Phys. Rev. D **78** (2008) 053001 [arXiv:0801.0814 [hep-ph]]. S. Leupold and M. Wagner, arXiv:0807.2389 [nucl-th]. L. S. Geng and E. Oset, arXiv:0812.1199 [hep-ph]. R. Molina, D. Nicmorus and E. Oset, Phys. Rev. D **78** (2008) 114018 [arXiv:0809.2233 [hep-ph]]. L. S. Geng, E. Oset, J. R. Pelaez and L. Roca, Eur. Phys. J. A **39** (2009) 81 [arXiv:0811.1941 [hep-ph]].

- [19] J. A. Oller, E. Oset and J. R. Pelaez, Phys. Rev. Lett. **80** (1998) 3452 [arXiv:hep-ph/9803242].  
 J. A. Oller, E. Oset and J. R. Pelaez, Phys. Rev. D **59** (1999) 074001 [Erratum-ibid. D **60** (1999) ERRAT,D75,099903.2007) 099906] [arXiv:hep-ph/9804209]. A. Gomez Nicola and J. R. Pelaez, Phys. Rev. D **65** (2002) 054009 [arXiv:hep-ph/0109056]. A. Dobado and J. R. Pelaez, Phys. Rev. D **56** (1997) 3057 [arXiv:hep-ph/9604416].
- [20] C. Amsler and N. A. Tornqvist, Phys. Rept. **389**, 61 (2004). E. Klempt and A. Zaitsev, Phys. Rept. **454** (2007) 1 [arXiv:0708.4016 [hep-ph]].  
 Siehe auch die Zusammenfassung des Quark-Modells in Ref. [1]
- [21] F. Giacosa, T. Gutsche, V. E. Lyubovitskij and A. Faessler, Phys. Rev. D **72** (2005) 114021 [arXiv:hep-ph/0511171].
- [22] V. A. Novikov, L. B. Okun, M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, M. B. Voloshin and V. I. Zakharov, Phys. Rept. **41** (1978) 1. E. I. Lashin, Int. J. Mod. Phys. A **21** (2006) 3699 [arXiv:hep-ph/0308200].
- [23] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **122** (1961) 345. Review-Paper: T. Hatsuda and T. Kunihiro, Phys. Rept. **247**, 221 (1994) [arXiv:hep-ph/9401310]. S. P. Klevansky, Rev. Mod. Phys. **64** (1992) 649.
- [24] A. Salomone, J. Schechter and T. Tudron, Phys. Rev. D **23** (1981) 1143. R. Gomm, P. Jain, R. Johnson and J. Schechter, Phys. Rev. D **33** (1986) 801.
- [25] C. Amsler and F. E. Close, Phys. Rev. D **53** (1996) 295 [arXiv:hep-ph/9507326]. W. J. Lee and D. Weingarten, Phys. Rev. D **61**, 014015 (2000). [arXiv:hep-lat/9910008]; F. E. Close and A. Kirk, Eur. Phys. J. C **21**, 531 (2001). [arXiv:hep-ph/0103173]. F. Giacosa, T. Gutsche, V. E. Lyubovitskij and A. Faessler, Phys. Rev. D **72**, 094006 (2005). [arXiv:hep-ph/0509247]. F. Giacosa, T. Gutsche, V. E. Lyubovitskij and A. Faessler, Phys. Lett. B **622**, 277 (2005). [arXiv:hep-ph/0504033]. F. Giacosa, T. Gutsche and A. Faessler, Phys. Rev. C **71**, 025202 (2005) [arXiv:hep-ph/0408085]. H. Y. Cheng, C. K. Chua and K. F. Liu, Phys. Rev. D **74** (2006) 094005 [arXiv:hep-ph/0607206].
- [26] F. E. Close and N. A. Tornqvist, J. Phys. G **28**, R249 (2002). E. Klempt and A. Zaitsev, Phys. Rept. **454** (2007) 1 [arXiv:0708.4016 [hep-ph]].
- [27] A. Faessler, T. Gutsche, M. A. Ivanov, V. E. Lyubovitskij and P. Wang, Phys. Rev. D **68** (2003) 014011 [arXiv:hep-ph/0304031].
- [28] J. Terning, Phys. Rev. D **44** (1991) 887.
- [29] S. Gasiorowicz and D. A. Geffen, Rev. Mod. Phys. **41**, 531 (1969).
- [30] P. Ko and S. Rudaz, Phys. Rev. D **50**, 6877 (1994).
- [31] M. Urban, M. Buballa and J. Wambach, Nucl. Phys. A **697** (2002) 338 [hep-ph/0102260].
- [32] C. Rosenzweig, A. Salomone and J. Schechter, Phys. Rev. D **24** (1981) 2545.
- [33] F. Giacosa, arXiv:0712.0186 [hep-ph].
- [34] Die Einführung der schwachen Eichbosonen ist das Forschungsprojekt der in September 2011 abgeschlossener Diplomarbeit von Anja Habersetzer.



- [35] Denis Parganlija arbeitet an diesem anspruchsvollen Projekt. Vorläufige Resultate wurden in den folgenden Conference Proceedings veröffentlicht: D. Parganlija, F. Giacosa, D. H. Rischke, P. Kovacs and G. Wolf, arXiv:1009.2250 [hep-ph]. P. Kovacs, G. Wolf, F. Giacosa and D. Parganlija, arXiv:1102.4732 [hep-ph]. D. Parganlija, F. Giacosa, P. Kovacs and G. Wolf, arXiv:1011.6104 [hep-ph].
- [36] M. F. M. Lutz *et al.* [ PANDA Collaboration ], arXiv:0903.3905 [hep-ex]].
- [37] R. L. Jaffe, Phys. Rev. D **15** (1977) 267. R. L. Jaffe, Phys. Rev. D **15** (1977) 281.
- [38] R. L. Jaffe, Phys. Rept. **409** (2005) 1 [Nucl. Phys. Proc. Suppl. **142** (2005) 343] [arXiv:hep-ph/0409065].
- [39] D. V. Bugg, Eur. Phys. J. C **47** (2006) 57 [arXiv:hep-ph/0603089]. D. V. Bugg, arXiv:hep-ex/0510014.
- [40] A. De Rujula, H. Georgi and S. L. Glashow, Phys. Rev. D **12** (1975) 147. T. A. DeGrand, R. L. Jaffe, K. Johnson and J. E. Kiskis, Phys. Rev. D **12** (1975) 2060. G. t Hooft, Phys. Rev. D **14**, 3432 (1976) [Erratum-ibid. D **18**, 2199 (1978)]. E. V. Shuryak, Nucl. Phys. B **203** (1982) 93. T. Schafer and E. V. Shuryak, Rev. Mod. Phys. **70** (1998) 323 [arXiv:hep-ph/9610451]. E. Shuryak and I. Zahed, Phys. Lett. B **589** (2004) 21 [arXiv:hep-ph/0310270].
- [41] Z. Liu and T. DeGrand, arXiv:hep-lat/0609038.
- [42] A. H. Fariborz, R. Jora and J. Schechter, Phys. Rev. D **72** (2005) 034001; A. H. Fariborz, Int. J. Mod. Phys. A **19** (2004) 2095; M. Napsuciale and S. Rodriguez, Phys. Rev. D **70** (2004) 094043.
- [43] M. Nagy and M. D. Scadron, Acta Phys. Slov. **54** (2003) 427 [arXiv:hep-ph/0406009]. M. Procura, T. R. Hemmert and W. Weise, Phys. Rev. D **69** (2004) 034505 [arXiv:hep-lat/0309020]. P. Schweitzer, Phys. Rev. D **69** (2004) 034003 [arXiv:hep-ph/0307336].
- [44] B. L. Ioffe, Nucl. Phys. B **188** (1981) 317 [Erratum-ibid. B **191** (1981) 591].
- [45] T. D. Cohen, R. J. Furnstahl, D. K. Griegel and X. m. Jin, Prog. Part. Nucl. Phys. **35** (1995) 221 [arXiv:hep-ph/9503315]. W. Weise, arXiv:nucl-th/0504087.
- [46] C. DeTar and T. Kunihiro, Phys. Rev. D **39** (1989) 2805.
- [47] D. Jido, M. Oka, and A. Hosaka, Prog. Theor. Phys. **106** (2001) 873 [arXiv:hep-ph/0110005]. D. Jido, Y. Nemoto, M. Oka and A. Hosaka, Nucl. Phys. A **671** (2000) 471 [arXiv:hep-ph/9805306].
- [48] T. T. Takahashi and T. Kunihiro, Phys. Rev. D **78** (2008) 011503 T. T. Takahashi and T. Kunihiro, eConf **C070910** (2007) 297 [Mod. Phys. Lett. A **23** (2008) 2340] [arXiv:0711.1961 [hep-lat]].
- [49] Susanna Gallas, Ph.D. Dissertation, ‘Das Nukleon und sein chiraler Partner im Vakuum und in dichter Kernmaterie ’, 2010, Frankfurt am Main.
- [50] D. Zschesche, L. Tolos, J. Schaffner-Bielich and R. D. Pisarski, Phys. Rev. C **75** (2007) 055202 [arXiv:nucl-th/0608044].
- [51] L. McLerran and R. D. Pisarski, Nucl. Phys. A **796** (2007) 83 [arXiv:0706.2191 [hep-ph]].

- [52] L. P. Kaptari, B. Kampfer, Nucl. Phys. **A764**, 338-370 (2006). [nucl-th/0504072]. L. P. Kaptari, B. Kampfer, Eur. Phys. J. **A23** (2005) 291-304. [nucl-th/0406077]. R. Shyam, U. Mosel, Phys. Rev. **C82** (2010) 062201. [arXiv:1006.3873 [hep-ph]]. R. Shyam, U. Mosel, [arXiv:0811.0739 [hep-ph]].
- [53] D. H. Youngblood, Y. W. Lui, H. L. Clark, B. John, Y. Tokimoto, X. Chen, Phys. Rev. **C69** (2004) 034315. C. Hartnack, J. Aichelin, H. Oeschler, Int. J. Mod. Phys. **D16** (2007) 153-164.
- [54] L. Bonanno, F. Giacosa, Nucl. Phys. **A859** (2011) 49-62. [arXiv:1102.3367 [hep-ph]].
- [55] J. M. Cornwall, R. Jackiw and E. Tomboulis, Phys. Rev. D **10** (1974) 2428.
- [56] J. T. Lenaghan, D. H. Rischke and J. Schaffner-Bielich, Phys. Rev. D **62** (2000) 085008.
- [57] S. Struber and D. H. Rischke, Phys. Rev. D **77** (2008) 085004 [arXiv:0708.2389 [hep-th]].
- [58] F. Karsch, arXiv:hep-ph/0701210; Z. Fodor and S. D. Katz, JHEP **0404** (2004) 050.