THEORETIKUM ZUR QUANTENMECHANIK SS 2011

Aufgabenblatt 9 **17.06.2011**

Aufgabe 1: Ehrenfestsches Theorem (10 Punkte = 5 + 5)

1. Leiten Sie mit Hilfe des Ehrenfestschen Theorems die Bewegungsgleichungen für $\langle p \rangle$, $\langle x \rangle$, $\langle p^2 \rangle$, $\langle x^2 \rangle$ und $\langle xp + px \rangle$ für den Fall eines eindimensionalen freien Teilchens her.

2. Zeigen Sie, dass sich die Ortsunschärfe $\Delta x(t)^2 = \langle x^2 \rangle_t - \langle x \rangle_t^2$ eines eindimensionalen freien Teilchens zeitlich gemäß
$$\Delta x(t)^2 = \Delta x(0)^2 + \frac{\Delta p(0)^2}{m^2} t^2$$
entwickelt. Integrieren Sie dazu die zuvor hergeleiteten Bewegungsgleichungen unter der Annahme, dass die Erwartungswerte $\langle x \rangle$ und $\langle xp + px \rangle$ zur Zeit $t = 0$ verschwinden, $\langle x \rangle_0 = \langle xp + px \rangle_0 = 0$.

Aufgabe 2: Übung zur Dirac-Schreibweise (10 Punte)

Es seien $|n\rangle$ (mit $n = 0, 1, 2, \ldots$) die Eigenzustände des Hamiltonoperators $H = p^2/(2m) + V(x)$. Die zugehörigen Eigenwerte seien E_n. Berechnen Sie zunächst $[[H, x], x]$ und beweise Sie dann

$$\sum_n (E_n - E_0) |\langle n|x|0\rangle|^2 = \frac{\hbar^2}{2m} \; .$$

Aufgabe 3: Unbestimmtheitsrelation? (10 Punkte)

In Polarkoordinaten gilt $\hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$. Daraus folgt

$$\left[\hat{\varphi}, \hat{L}_z\right] = i\hbar \; .$$

Die entsprechende Heisenbergsche Unbesttimmtheitsrelation lautet $\Delta\varphi \Delta L_z \geq \hbar/2$. Die kann aber so nicht gelten, da $\Delta\varphi \leq 2\pi$ und ΔL_z beliebig klein gemacht werden kann. Wo und wie wurde geschummelt?