THEORETIKUM ZUR QUANTENMECHANIK SS 2011

Aufgabenblatt 8 **10.06.2011**

Aufgabe 1: Bilder (12 Punkte = 4 + 2 + 3 + 3 Punkte)

In einer räumlichen Dimension x lautet die Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial \psi(t,x)}{\partial t} = (H_0 + H_1)\,\psi(t,x)\ , \tag{1}$$

wobei H_0 und H_1 zeitunabhängig sind. Seien $\phi_n(x)$ die Eigenfunktionen von H_0, $H_0\phi_n(x) = E_n\phi_n(x)$, mit $n = 1, 2, ...$ Die Funktionen $\phi_n(x)$ bilden eine Orthonormalbasis des Hilbert-Raums.
Machen Sie den folgenden Ansatz als allgemeine Lösung von Gl. (1):

$$\psi(t,x) = \sum_n c_n(t)\phi_n(x)e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}. \tag{2}$$

1. Bestimmen Sie die Gleichungen, die die Koeffizienten $c_n(t)$ erfüllen müssen. Warum entspricht diese Wahl dem Wechselwirkungsbild?
2. Lösen Sie die Gleichungen für den Fall $H_1 = \alpha\,(= const.)$.
3. Lösen Sie die Gleichungen für den Fall $H_1 = \alpha\, H_0$ ($\alpha = const.$).
4. Sei H_1 gegeben durch

$$\langle x\,|H_1|\,y\rangle = \alpha\,\phi_1^*(x)\,\phi_1(y) + \gamma\,e^{i\omega t}\,\phi_2^*(x)\,\phi_1(y) + \beta\,\phi_1^*(x)\,\phi_2(y)\ , \tag{3}$$

   wobei α, γ und ω reelle Zahlen sind. Welche Eigenschaft von H_1 erlaubt, den Parameter β zu bestimmen? Bestimmen Sie die Funktion $c_2(t)$ unter der Voraussetzung, dass $c_1(0) = 1$ and $c_2(0) = 0$ (vernachlässigen Sie dabei die höheren Niveaus $n = 3, 4, ...$).

Aufgabe 2: Endliche Potentialstufe (6 Punkte = 3 + 3)

Ein Teilchen der Masse m und der kinetischen Energie E laufe entlang der positiven x-Achse auf die Potentialbarriere

$$V(x) = 0 \ \text{ falls } \ x < 0\ , \quad V(x) = V_0 \ \text{ falls } \ x \geq 0\ ,$$

mit der Konstanten $V_0 > E$ zu.

1. Zeigen Sie, dass für $x < 0$ die Lösungen der stationären Schrödinger-Gleichung die Form $\psi(x) = \exp(ikx)$ haben und bestimmen Sie die möglichen Werte von k.
2. Machen Sie für $x > 0$ denselben Lösungsansatz und bestimmen Sie wiederum die möglichen Werte von k. Welche dieser Werte von k sind physikalisch sinnvoll? Interpretieren Sie diese Werte.

Aufgabe 3: Tunneleffekt (12 Punkte = 1 + 1 + 2 + 3 + 2 + 4)

Gegeben sei ein Teilchen mit Masse m und ein Potential der Form

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0,\ x > l \\ V_0 & 0 \leq x \leq l\ . \end{cases} \tag{4}$$

Bestimmen Sie die Tunnelwahrscheinlichkeit

$$T = \left(1 + \frac{V_0^2 \sinh^2(\beta l)}{4E(V_0 - E)}\right)^{-1}\ ,\ \beta = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar$$

in den folgenden Fällen:

1. Ein Elektron mit Energie $E = 9$ eV, und ein Potential mit $l = 10^{-8}$ cm und $V_0 = 10$ eV.

2. Ein Proton mit Energie $E = 9$ MeV, und ein Potential mit $l = 10^{-13}$ cm und $V_0 = 10$ MeV.

3. Ein Auto mit Masse $m = 1000$ kg und Geschwindigkeit $v = 100$ km/h, das versucht, einen 100 m langen Hügel zu durchtunneln. Nehmen Sie an, dass $V_0 - E = 10^{-7}$ Joule (E ist die Energie des Wagens). Dem Auto fehlen also nur 10^{-7} Joule, um den Hügel zu überqueren. Wie hoch ist der Hügel in Metern ausgedrückt?

4. In welchem Limes kann T als
$$T = e^{-2l\beta}, \ \beta = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar \ , \tag{5}$$
angenähert werden?

5. Für ein beliebiges Potential $V(x)$ kann T wie folgt hingeschrieben werden:
$$T = e^{-2\int_a^b \beta(x)dx}, \ \beta = \sqrt{2m[V(x) - E]}/\hbar \ , E = V(a) = V(b) \ , \tag{6}$$
wobei $V(x) \geq E$ für $a \leq x \leq b$. Zeigen Sie, dass Gl. (6) Gl. (5) reproduziert, wenn das Potential von Gl. (4) benutzt wird.

6. Gegeben sei das Potential $V(x) = -x^2 + 1$ für $|x| < 1$, und $V(x) = 0$ für $|x| \geq 1$. Benutzen Sie Gl. (6), um T für eine beliebige Masse m und Energie $E = 0$ zu bestimmen.