THEORETIKUM ZUR QUANTENMECHANIK SS 2011

Aufgabenblatt 6 **27.05.2011**

Aufgabe 1: Nochmals das Zweizustandssystem (10 Punkte = 5 + 5 Punkte)

Betrachten Sie den Hamilton-Operator H_0, der die Eigenzustände $|e_1\rangle$ und $|e_2\rangle$ besitzt:

$$H_0|e_1\rangle = \omega_1|e_1\rangle \ , \qquad H_0|e_2\rangle = \omega_2|e_2\rangle \ .$$

$\{|e_1\rangle, |e_2\rangle\}$ ist eine Orthonormalbasis eines zweidimensionalen Hilbert-Raums, d.h. $\langle e_i|e_j\rangle = \delta_{ij}$. Betrachten Sie den Hamilton-Operator

$$H = H_0 + z|e_1\rangle\langle e_2| \ + z|e_2\rangle\langle e_1|$$

wobei z eine reelle Zahl ist.

1. Bestimmen Sie die Eigenvektoren $|E_1\rangle$ und $|E_2\rangle$ des Operators H. Wie lauten die entsprechenden Eigenwerte?
   (Hinweis: suchen Sie $|E_1\rangle$ und $|E_2\rangle$, indem Sie die Transformation
   $$\begin{pmatrix} |E_2\rangle \\ |E_1\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |e_2\rangle \\ |e_1\rangle \end{pmatrix} \tag{1}$$
   durchführen.)
2. Der Zustand des Systems zur Zeit $t = 0$ sei durch den Vektor $|s(t = 0)\rangle = |e_2\rangle$ gegeben. Wie lautet die Wahrscheinlichkeit, das System $|s(t)\rangle$ durch eine Messung zur Zeit $t > 0$ immer noch im Zustand $|e_2\rangle$ zu finden? Benutzen Sie die Tatsache, dass diese Wahrscheinlichkeit $p(t) = |a(t)|^2$ ist, wobei
   $$a(t) = \langle e_2|e^{-iHt}|e_2\rangle \ .$$
   Zeichnen Sie die Funktion $p(t)$ für die numerischen Werte $\omega_2 = 2\lambda$, $\omega_1 = \lambda$ und $z = 0.2\lambda$, wobei λ eine positive Konstante ist.

Aufgabe 2: Operatoren im Hilbert-Raum (10 Punkte = 3 + 3 + 4)

Sei $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ eine Orthonormalbasis eines dreidimensionalen Hilbert-Raums. Die Matrixdarstellung eines Operators H bzgl. dieser Basis sei gegeben durch

$$H = \begin{pmatrix} 0 & i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} & 1 & 1 \\ i/\sqrt{2} & 1 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

1. Finden Sie die Eigenwerte λ_i und orthonormalen Eigenvektoren $|\phi_i\rangle$ von H.
2. Zeigen Sie mit Hilfe der Korrespondenz “ket” $\leftrightarrow$ Spaltenvektor, “bra” $\leftrightarrow$ Zeilenvektor:
   $$\mathbf{1} = \sum_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i| \ , \qquad H = \sum_i \lambda_i|\phi_i\rangle\langle\phi_i| \ .$$
3. Der Operator U sei definiert durch
   $$U|u_i\rangle = |\phi_i\rangle \ , \qquad i = 1, 2, 3 \ .$$
   Berechnen Sie die Matrixdarstellung von U bzgl. der Basis $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ und prüfen Sie, ob U unitär ist.

Aufgabe 3: Nochmals die Kontinuitätsgleichung (7 Punkte)

Die Schrödinger-Gleichung lautet:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \triangle + V(\vec{r}) \right) \psi. \tag{2}$$

Wiederholen Sie die Schritte, die zur Kontinuitätsgleichung führen unter der Annahme, dass das Potential $V(\vec{r})$ komplex ist. Wie lautet die entsprechende Kontinuitätsgleichung? Welche Bedeutung hat sie?

Aufgabe 4: Wassermelonen (3 Punkte)

In einer hypothetischen Welt, in der $\hbar = 10^{-3}$ Joule sec, gibt es Wassermelonen mit einem Durchmesser von $d \sim 20$ cm und mit einer sehr dicken Schale. Im Inneren gibt es Körner mit einer Masse von $m \sim 0.1$ g. Könnte eine Person unbeschwert die Wassermelone schneiden oder lauern Gefahren auf sie?