THEORETIKUM ZUR QUANTENMECHANIK SS 2011

Aufgabenblatt 5 **20.05.2011**

Aufgabe 1: Vertauschungsrelationen für den Drehimpulsoperator (8 Punkte = 2 + 2 + 2 + 2)

Man definiert den Drehimpulsoperator in der Ortsdarstellung als

$$\hat{\mathbf{L}} = \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{p}} \ .$$

Berechnen Sie $[\hat{L}_i, \hat{L}_j]$, $[\hat{L}_i, \hat{L}^2]$, $[\hat{L}_i, x_j]$ und $[\hat{L}_i, \hat{p}_j]$.

Aufgabe 2: Der Kommutator (5 Punkte = 3 + 2)

Seien A und B zwei $n \times n-$Matrizen. Man nennt $[A, B] \equiv AB - BA$ den Kommutator von A und B.

1. Überprüfen Sie folgende Eigenschaften:
   $[A, B] = -[B, A]$, $[A, A] = 0$, $[aA, B] = a[A, B]$, $[A, aE] = 0$,
   $[A + B, C] = [A, C] + [B, C]$, $[AB, C] = [A, C]B + A[B, C]$.
   Dabei sei C ebenfalls eine $n \times n-$Matrix, E die $n \times n-$Einheitsmatrix und $a \in \mathcal{R}$.
2. Unter welcher Bedingung gilt die Identität $e^{A+B} = e^A e^B$?

Aufgabe 3: Vektoren im Hilbertraum (9 Punkte = 3 + 3 + 3)

Es sei $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ eine Orthonormalbasis eines dreidimensionalen Hilbertraums, und

$$|\psi_1\rangle = \alpha \left(i|u_1\rangle + |u_2\rangle - |u_3\rangle \right) \ ,$$
$$|\psi_2\rangle = \beta \left(|u_2\rangle + |u_3\rangle \right) \ .$$

1. Zeigen Sie, dass $\langle\psi_1|\psi_2\rangle = 0$ für alle α, β.
2. Finden Sie ein α und ein β, so dass $\langle\psi_1|\psi_1\rangle = \langle\psi_2|\psi_2\rangle = 1$.
3. Finden Sie ein $|\psi_3\rangle$, so dass $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle\}$ eine Orthonormalbasis bilden.

Aufgabe 4: Zweizustandssystem (8 Punkte = 4 + 4)

Betrachten Sie ein quantenmechanisches System, dessen Hamilton-Operator H_0 die Eigenzustände $|e_1\rangle$ und $|e_2\rangle$ besitzt:

$$H_0|e_1\rangle = \omega_1|e_1\rangle \ , \qquad H_0|e_2\rangle = \omega_2|e_2\rangle \ .$$

$\{|e_1\rangle, |e_2\rangle\}$ ist eine Orthonormalbasis eines zweidimensionalen Hilbert-Raums, d.h. $\langle e_i|e_j\rangle = \delta_{ij}$.
Ein Vektor $|\phi\rangle$ des Hilbert-Raums kann geschrieben werden als

$$|\phi\rangle = c_1|e_1\rangle + c_2|e_2\rangle \ .$$

1. Berechnen Sie $\langle\phi|\phi\rangle$ und den Erwartungswert von H_0 im Zustand $|\phi\rangle$.
2. Die Operatoren R und L seien definiert als $R \equiv |e_2\rangle\langle e_1|$, $L = |e_1\rangle\langle e_2|$. Berechnen Sie $R|e_1\rangle$, $R|e_2\rangle$, $L|e_1\rangle$, $L|e_2\rangle$, $R|\phi\rangle$, $L|\phi\rangle$, RR und LL. Drücken Sie H_0 durch ω_1, ω_2, R und L aus. Welche Eigenschaften haben die Operatoren RL und LR?