1.1

a) $w = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2\right)$

$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$

b) $\frac{\partial w}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{S} = -\vec{J}\cdot\vec{E}$

c) Sei $\vec{J} = 0$. Dann:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{S} = 0$$

Man integriert über V (V: geschlossenes Volumen)

$$\frac{\partial}{\partial t} E_{feld}(V) + \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{S}\, dV = 0$$

Wg Gauss:

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{S}\, dV = \int_{S_V} \vec{S}\cdot\underbrace{\vec{n}\, dF}_{d\vec{F}} = \varphi_{S_V}(\vec{S})$$

Für $V \mapsto \infty$ gibt es keinen Fluss! Dann:

$$\frac{\partial}{\partial t} E_{feld}^{tot} = -\int_{S_V \mapsto \infty} \vec{S}\,\vec{n}\, dF = 0$$

$$E_{feld}^{tot} = \int_{V\mapsto\infty} d^3x\, w = \text{const}!$$

a) $\mathcal{L}_{ED} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - J_\mu A^\mu$

b) Bewegungsgl:

$$0 = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_{ED}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} - \frac{\partial \mathcal{L}_{ED}}{\partial A_\nu}$$

(siehe Seite 23 des Skriptes: um beide Punkte zu bekommen, müssen sie durchgeführt werden!

Man bekommt:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \Box A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = \mu_0 J^\nu.$$

c) $A^\nu \mapsto A^\nu + \partial^\nu \eta$

$\rightarrow \Box(A^\nu + \partial^\nu \eta) - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu + \partial_\mu \partial^\mu \eta) = \mu_0 J^\nu$

$\Box A^\nu + \cancel{\partial^\nu \Box \eta} - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) - \cancel{\partial^\nu \Box \eta} = \mu_0 J^\nu$

$\Box A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = \mu_0 J^\nu$

Unverändert!

d) Sei

$$X^\mu \mapsto X'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu X^\nu$$

mit

$$g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\rho\sigma}$$ (Lorentz-Transf.).

Dann:

$$A^\mu \mapsto \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu$$

e) $$A_\mu \mapsto (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu A_\nu$$

3.1

a) $\boxed{\begin{array}{lll} \delta(x): & \delta(x) = 0 & \forall x \neq 0 \\ & \delta(x) = \infty & \text{für } x = 0 \\ \text{und} & \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = 1 & \end{array}}$ (*)

Daraus folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \cdot f(x)\,dx = f(0).$$

b)

$$\delta(x) = \lim_{\eta \mapsto 0} \frac{1}{\pi} \frac{\eta}{x^2+\eta^2} = \lim_{\eta \mapsto 0} \delta(x, \eta).$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x,\eta)\,dx = 1 \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^+.$$

Für $\eta \mapsto 0$ ist $\delta(x) = 0$ für $x \neq 0$

(Nähmlich: $\lim_{\eta \mapsto 0} \frac{1}{\pi} \frac{\eta}{x^2+\eta^2} = \lim_{\eta \mapsto 0} \frac{\eta}{\pi x^2} = 0$)

und $\delta(x) = \infty$ für $x = 0$

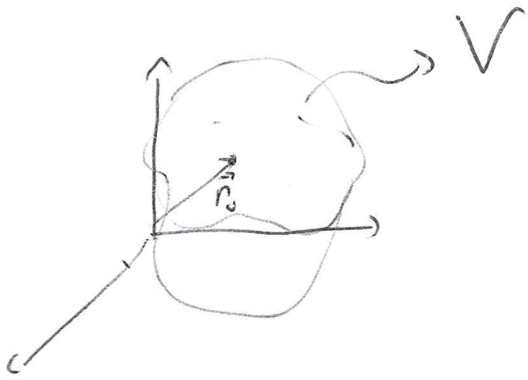
(Nähmlich: $\lim_{\eta \mapsto 0^+} \frac{1}{\pi} \frac{\eta}{\eta^2} = \lim_{\eta \mapsto 0^+} \frac{1}{\pi \eta} = +\infty$)

Ergo, die Bedingungen im Kasten (*) sind erfüllt.

c)

$$\rho(\vec{r}) = q\,\delta(\vec{r}-\vec{r_0}) \,. \quad Q_{tot} = \int_{V \mapsto \infty} \rho(\vec{r})\, d^3\vec{r} = q \,.$$

d)



$$\varphi_{S_V}(\vec{E}) = \frac{q}{\varepsilon_0}$$