THEORETIKUM ZUR ELEKTRODYNAMIK WS 10/11

Aufgabenblatt 7
Abgabetermin: Mi. 12.1.2011 **17.12.2010**

Aufgabe 1: Verifikation der Sätze von Gauß und Stokes (8 Punkte = 4 + 4)

1. Verifizieren Sie den Satz von Gauß für das Vektorfeld $\vec{a}(\vec{r}) = (2x - z, x^2 y, -xz^2)$, wobei das Integrationsvolumen durch $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1$ begrenzt wird.
2. Verifizieren Sie den Satz von Stokes für das Vektorfeld $\vec{a}(\vec{r}) = (3y, -xz, yz^2)$, wobei die Integrationsfläche die Oberfläche des Paraboloids $2z = x^2 + y^2$ ist, das durch $z = 2$ begrenzt wird.

Aufgabe 2: Abschirmung im Atom (8 Punkte = 2 + 3 + 3)

Das elektrische Feld eines Atomkerns wird durch die ihn umgebenden Elektronen abgeschwächt. Man beschreibt dieses Abschirmungsphänomen häufig durch das Potential

$$\varphi(r) = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-\alpha r} \ .$$

Offenbar fällt dieses Potential schneller ab als das reine Coulomb-Potential.

1. Berechne das elektrische Feld $\vec{E}$.
2. Berechne die elektrische Ladungsdichte $\rho(r)$.
3. Berechne die Gesamtladung $Q(r)$ innerhalb einer Kugel mit Radius r sowie den Grenzwert $Q = \lim\limits_{r\to\infty} Q(r)$.

Hinweis: Zur Lösung der Poisson-Gleichung ist es hier sinnvoll, den singulären Anteil durch $e^{-\alpha r}/r = 1/r + (e^{-\alpha r} - 1)/r$ abzuspalten.

Aufgabe 3: Unmögliche Feldkonfigurationen (5 Punkte = 3 + 2)

1. Sei $\vec{B} = 0$. Erklären Sie warum, das elektrische Feld $\vec{E} = g(x^2 + y^2)(-y, x, 0)$, wobei g eine beliebige Funktion ist, nicht existiert.
2. Erklären Sie warum, das magnetische Feld $\vec{B} = g(x^2 + y^2)(x, y, 0)$, wobei g eine beliebige Funktion ist, nicht existiert.

Aufgabe 4: Übrig von der Probeklausur... (7 = 4 + 3 Punkte)

Gegeben sei das folgende elektrische Feld:

$$\vec{E} = \theta(x)\theta(L_1 - x)\theta(y)\theta(L_2 - y)\theta(z)\theta(L_3 - z)(A, B, C) \ , \tag{1}$$

wobei A, B, C, L_1, L_2, L_3 positive Konstanten sind und $\theta(x)$ die Stufenfunktion ist.

1. Berechnen Sie das Potential $\varphi(x, y, z)$ (per Konvention sei $\varphi(x, y, z) = 0$ für $x < 0$, $y < 0$, $z < 0$).
2. Erklären Sie durch Anwendung des Satzes von Gauß, welche Ladungsverteilung notwendig ist, um das elektrische Feld $\vec{E}$ zu erzeugen.

Aufgabe 5: Platten (8 Punkte = 1 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1)

Gegeben sei die Ladungsdichte

$$\rho(x, y, z) = \sigma\delta(x) - \sigma\delta(x - L) \ , \tag{2}$$

wobei $\sigma = const.$

1. Zeichnen Sie die Regionen, in denen sich die Ladung befindet.
2. Berechnen Sie das Potential $\varphi(x, y, z)$.
3. Berechnen und zeichnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}$.
4. Wie lautet das Potential im Limes $L \to 0$?
5. Wie lautet das elektrische Feld für $L \to 0$?
6. Wie lautet die gesamte Energie des elektrischen Feldes?

Aufgabe 6: Kugelschalen (8 Punkte = 1 + 3 + 1 + 2 + 1)

Gegeben sei die Ladungsdichte (in Kugelkoordinaten)

$$\rho(r) = \frac{Q}{4\pi R_1^2}\delta(r - R_1) - \frac{Q}{4\pi R_2^2}\delta(r - R_2) \ , \tag{3}$$

wobei Q, R_1, R_2 Konstanten sind. Sei $R_1 < R_2$.

1. Zeichnen Sie die Regionen, in denen sich die Ladung befindet.
2. Berechnen Sie das Potential $\varphi(x, y, z)$.
3. Berechnen und zeichnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}$.
4. Bestimmen sie die Energiedichte w und die gesamte Energie E_{Feld}.
5. Bestimmen Sie die Kapazität zwischen den Kugelschalen.

Aufgabe 7: Hin und Her (7 Punkte = 4 + 3)

Gegeben sei das Magnetfeld

$$\vec{B} = (0, 0, B_1\theta(y) + B_2\theta(-y)) \ , \tag{4}$$

wobei B_1,B_2 Konstanten sind und $\theta(y)$ die Stufenfunktion ist. Gegeben sei auch ein Punktteilchen der Masse m und der Ladung q, das sich zur Zeit $t = 0$ bei $\vec{r} = \vec{0}$ befindet und Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_0 = (0, v_0, 0)$ besitzt.

1. Berechnen und zeichnen Sie die Trajektorie des Teilchens für die numerischen Werte $B_1 = 2$ T, $B_2 = 5$ T, $q = 1$ C, $m = 1$ kg, $v_0 = 1$ m/s.
2. Berechnen und zeichnen Sie die Trajektorie des Teilchens für die numerischen Werte $B_1 = 2$ T, $B_2 = -5$ T, $q = 1$ C, $m = 1$ kg, $v_0 = 1$ m/s.

Aufgabe 8: Verbindung mit der Mechanik (9 Punkte = 2 + 3 + 2 + 2)

Gegeben sei ein Teilchen der Masse m und Ladung q, dessen Bewegung durch die Lagrange-Funktion

$$L = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + \frac{q}{c}\left(\vec{A} \cdot \vec{v} - A^0\right) \ , \text{wobei } \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \tag{5}$$

beschrieben wird.

1. Berechnen Sie die Bewegungsgleichung für das Teilchen.
2. Welche Kraft agiert auf das Teilchen?
3. Berechnen Sie den kanonischen Impuls $\vec{p}$.
4. Bestimmen Sie die Hamilton-Funktion H.

Frohe Weihnachten!