THEORETIKUM ZUR ELEKTRODYNAMIK WS 10/11

Aufgabenblatt 1 **29.10.2010**

Aufgabe 1: Lorentz-Transformationen (12 Punkte = 2 + 8 +2)

Gegeben sei die reelle 4×4 Matrix Λ.

1. Welche Bedingung muss Λ erfüllen, um eine Lorentz-Transformation zu sein? Wieviele reelle Parameter sind notwedig, um eine Lorentz-Transformation eindeutig zu bestimmen? Was bedeuten diese Parameter physikalisch?

2. Ist die Menge der Lorentz-Transformationen eine Gruppe? Beantworten Sie dazu die folgenden Fragen.

   (a) Wie lautet die Definition für eine Verknüpfung auf einer Menge? Wie lautet diese im Fall der Lorentz-Transformationen?

   (b) Nennen Sie ganz allgemein die drei Bedingungen, die eine Gruppe erfüllen muss.

   (c) Sind die drei Bedingungen im Fall der Lorentz-Transformationen erfüllt?

   (d) Was ist eine abelsche Gruppe? Gilt diese Eigenschaft für die Menge der Lorentz-Transformationen?

3. Wie transformieren die folgenden Objekte unter einer Lorentz-Transformation?

$$C^{\mu\nu},\ C_\mu C^\mu,\ C_\mu C_\nu,\ C_\rho^{\mu\nu}$$

Aufgabe 2: Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ (10 Punkte = 1 +1 +1 +1 +1 +1 +1 + 3)

Gegeben seien das 4-Potential A^μ und die entsprechenden elektrischen und magnetischen Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$.

1. Wie lautet die Lorentz-Transformationsmatrix Λ, die einen Boost in x-Richtung beschreibt?

2. Wie transformiert A^μ?

3. Wie transformiert $\vec{E}$?

4. Wie transformiert $\vec{B}$?

5. Wie transformiert $\frac{1}{c^2}\vec{E}^2 + \vec{B}^2$?

6. Wie transformiert $\frac{1}{c^2}\vec{E}^2 - \vec{B}^2$?

7. Wie transformiert $\left(\frac{1}{c^2}\vec{E}^2 - \vec{B}^2\right) d^4x$?

8. Wiederholen Sie die Schritte 1-7 für eine Drehung um die z-Achse um den Winkel φ.

Aufgabe 3: Skalares Feld $\varphi(X)$ (8 Punkte = 2 + 1 + 2 + 2 + 1)

Gegeben sei das skalare Feld $\varphi(X) = \varphi(t, \vec{x})$ und die Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\,(\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi) - \frac{1}{2}m^2\varphi^2\ . \tag{1}$$

1. Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung für das Feld $\varphi(X)$. Drücken Sie die Bewegungsgleichung in kovarianter Form aus.

2. Sei
$$\varphi(t,\vec{x}) = Ae^{i\left[\omega(\vec{k})t-\vec{k}\cdot\vec{x}\right]} + Be^{-i\left[\omega(\vec{k})t-\vec{k}\cdot\vec{x}\right]}\ , \tag{2}$$
wobei A und B komplexe Zahlen sind. Wie muss $\omega(\vec{k})$ aussehen, damit $\varphi(t,\vec{x})$ eine Lösung der Bewegungsgleichung ist?

3. Welche Bedingung müssen A und B erfüllen, damit das Feld $\varphi(X)$ reell ist?

4. Wie müssen A und B aussehen, damit die Lösung
$$\varphi(t,\vec{x}) = C\cos\left[\omega(\vec{k})t-\vec{k}\cdot\vec{x}\right] \tag{3}$$
lautet, wobei C eine reelle Zahl ist?

   Wie müssen A und B aussehen, damit die Lösung
$$\varphi(t,\vec{x}) = D\sin\left[\omega(\vec{k})t-\vec{k}\cdot\vec{x}\right] \tag{4}$$
lautet, wobei D eine reelle Zahl ist?

5. Ist die Funktion
$$\varphi(t,\vec{x}) = \int_Q d^3k\left(A(\vec{k})e^{i\left[\omega(\vec{k})t-\vec{k}\cdot\vec{x}\right]} + B(\vec{k})e^{-i\left[\omega(\vec{k})t-\vec{k}\cdot\vec{x}\right]}\right) \tag{5}$$
eine Lösung der Bewegungsgleichung? (Q ist ein beliebiges Volumen im Impulsraum).