ES 1

(1)

a) Die Lösung der Bewegungsgl. extremalisiert die Wirkung.

Die Bewegungsgl. lautet $\ddot{q} = 0$.

$q_m(t) = ct + b$

Anfangsbedingung: $q_m(0) = b = q_A$

Endbedingung: $q_m(t_E) = ct_E + q_A = q_E \longmapsto c = \frac{q_E - q_A}{t_A}$

Die Lösung ist: $\dot{q}_A =$

$$\boxed{q_m(t) = \frac{q_E - q_A}{t_E} t + q_A}$$

b) Die Wirkung ist

$$S = \int_0^{t_E} dt \left[\frac{m}{2} \left(\frac{q_E - q_A}{t_E} \right)^2 \right] = \frac{m}{2} \frac{(q_E - q_A)^2}{t_E} .$$

c) $q(t) = q_m(t) + \varepsilon t (t - t_E)$.

Die Randbedingungen sind erfüllt, da:

$q(t_A = 0) = q_m(t_A = 0) = q_A$

$q(t_E) = q_m(t_E) = q_E$.

$$\dot{q}(t) = \dot{q}_m(t) + \varepsilon(2t - t_E) = \frac{q_E - q_A}{t_E} + \varepsilon(2t - t_E)$$

$$\dot{q}^2 = \left(\frac{q_E - q_A}{t_E}\right)^2 + 2\varepsilon \frac{q_E - q_A}{t_E}(2t - t_A) + \varepsilon^2 (2t - t_E)^2$$

$$S = \frac{m}{2} \frac{(q_E - q_A)^2}{t_E} + \frac{m}{2} \varepsilon^2 \int_0^{t_E} (2t - t_E)^2 \, dt$$

Nämlich, der Term proportional zu ε verschwindet! (*)

$$S = \frac{m}{2} \frac{(q_E - q_A)^2}{t_E} + \frac{m}{2} \frac{\varepsilon^2}{2} \cdot \frac{1}{3} \left[t_E^3 - (-t_E)^3 \right]$$

$$= \frac{m}{2} \frac{(q_E - q_A)^2}{t_E} + \frac{m}{2} \frac{\varepsilon^2}{3} t_E^3 .$$

Es ist deutlich, dass S <u>minimal</u> für $\varepsilon = 0$ ist!

(*) $\displaystyle\int_0^{t_E} (2t - t_E)\, dt = 2 \frac{t_E^2}{2} - t_E \cdot t_G = 0$

$$H = q_1 p_2^2 + p_1 p_2$$

a) Die zyklische Variable ist q_2: H hängt nämlich nicht von q_2 ab

b) Hamilton-Gleichungen:

$$\dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} = p_2 \Rightarrow \dot{q}_1 = p_2$$

$$\dot{q}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2} = 2q_1 p_2 + p_1 \Rightarrow \dot{q}_2 = 2q_1 p_2 + p_1$$

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} = -p_2^2 \Rightarrow \dot{p}_1 = -p_2^2$$

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q_2} = 0 \Rightarrow \dot{p}_2 = 0$$

H-Gl.

c) $\dot{p}_2 = 0 \mapsto p_2(0) = a \rightarrow \boxed{p_2(t) = a} \ \forall t$

Dann:

$\dot{q}_1 = a \mapsto \boxed{q_1 = at}$

(N.b.: die Anfangsbedingungen werden berücksichtigt)

$\dot{p}_1 = -p_2^2 = -a^2 \quad \boxed{p_1 = -a^2 t}$

$\dot{q}_2 = 2q_1 p_2 + p_1 = 2(at)a + (-a^2 t) = a^2 t$

$$\boxed{q_2 = \frac{a^2}{2} t^2}$$

d)

$$\frac{dH}{dt} = \{H,H\} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0,$$

da in diesem Fall H *nicht* explizit von t a

H *ist* ein Integral der Bewegung.

Mit den vorherigen Anfangsbedingungen:

$$H = q_1 p_2^2 + p_1 p_2 =$$

$$= at \cdot a^2 + (-a^2 t) \cdot a = 0$$

$$H = 0 \quad \forall t.$$

e) $F(q_1, q_2, p_1, p_2)$

$$\frac{dF}{dt} = \{F,H\} = \left(\frac{\partial F}{\partial q_1}\frac{\partial H}{\partial p_1} - \frac{\partial F}{\partial p_1}\frac{\partial H}{\partial q_1}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial q_2}\frac{\partial H}{\partial p_2} - \frac{\partial F}{\partial p_2}\frac{\partial H}{\partial q_2}\right);$$

β) $F = q_1 p_1 p_2$

$$\frac{dF}{dt} = p_1 p_2 \cdot p_2 - q_1 p_2 \cdot p_2^2 + \Big(\underbrace{\frac{\partial F}{\partial q_2}}_{=0} \frac{\partial H}{\partial p_2} - \frac{\partial F}{\partial p_2} \underbrace{\frac{\partial H}{\partial q_2}}_{=0} \Big)$$

$$= p_1 p_2^2 - q_1 p_2^3 \neq 0.$$ F ist keine Bewegungskonstante.

Auch bei direkten Substitution in unserem Fall:

$$F = q_1 p_1 p_2 = at \cdot (-a^2 t) \cdot a = -a^4 t^2 \neq \text{const}!$$

(Beide Verfahren sind korrekt)

[ElekRel] 1.2

$m_0 = m$

6

$$L = -m_0\sqrt{1-\dot{x}^2}$$

a) Bewegungsgl.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m_0 \frac{\dot{x}}{\sqrt{1-\dot{x}^2}} \,; \quad \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \,; \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m_0 \frac{\ddot{x}\sqrt{1-\dot{x}^2} - \dot{x}\left(-\frac{\dot{x}\ddot{x}}{\sqrt{1-\dot{x}^2}}\right)}{(1-\dot{x}^2)} =$$

$$= m_0 \frac{\ddot{x}(1-\dot{x}^2) + \dot{x}^2\ddot{x}}{(1-\dot{x}^2)^{3/2}} = m_0 \frac{\ddot{x}}{(1-\dot{x}^2)^{3/2}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\ddot{x}}{(1-\dot{x}^2)^{3/2}} = 0 \rightarrow \ddot{x} = 0 \Rightarrow$$ Mit Berücksichtigung der Anfangsbedingungen: $\boxed{x(t) = v_0 t + x_0}$

b) $$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{m_0 \dot{x}}{\sqrt{1-\dot{x}^2}} \Rightarrow p^2(1-\dot{x}^2) = m_0^2\dot{x}^2 \Rightarrow \dot{x}^2(m_0^2+p^2) = p^2$$

$$\rightarrow \dot{x} = \frac{p}{\sqrt{m_0^2+p^2}}$$

$$H = p\dot{x} - L = \frac{p^2}{\sqrt{m_0^2+p^2}} + m_0\sqrt{1-\frac{p^2}{m_0^2+p^2}}$$

$$= \frac{p^2}{\sqrt{m_0^2+p^2}} + \frac{m_0^2}{\sqrt{m_0^2+p^2}} = \boxed{\sqrt{m_0^2+p^2} = H}$$

c) $$p = \frac{m_0\dot{x}}{\sqrt{1-\dot{x}^2}} \Rightarrow E = \sqrt{m_0^2 + \frac{m_0^2\dot{x}^2}{1-\dot{x}^2}} = \boxed{\frac{m_0}{\sqrt{1-\dot{x}^2}} = E}$$

(Das ist die Energie eines Teilchens in der Relativitätstheorie)

d) $$L = -m_0\left(1-\frac{1}{2}\dot{x}^2\right) + \mathcal{O}\ldots = \underbrace{-m_0}_{\text{Konstanter Term}} + \underbrace{\frac{1}{2}m_0\dot{x}^2}_{\text{Klassische kinetische Energie}} + \ldots$$