Studia Math. 2 (1930), 171 - 180

Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen

von

J. SCHAUDER (Lwów).

Das Problem, welches in der vorliegenden Arbeit bis zu einem gewissen Abschluss gebracht wird, haben zuerst die Herren Birkhoff und Kellogg behandelt [1]). Die obengenannten Verfasser haben bereits die Richtigkeit des Fixpunktsatzes in den einfachsten Feldern erkannt, wobei aber noch für jedes einzelne Funktionenfeld der Beweis von Anfang an geführt werden musste [2]).

In meiner Arbeit über stetige Abbildungen in Funktionalräumen [3]) habe ich die Untersuchungen auf eine allgemeinere Grundlage gestellt und den Fixpunktsatz in allen solchen Räumen bewiesen, die eine lineare Basis besitzen [4]). Ich benützte dabei nur die Kompaktheit und Konvexität der in Betracht kommenden Mengen. In einer zweiten Arbeit [5]) wurden die Untersuchungen weitergeführt. Durch die dort eingeführten Begriffe der Schwachkompaktheit und Schwachstetigkeit konnten die Sätze

---

[1]) Invariant points in function space, Transactions of the Amer. Math. Soc. 23 (1922).

[2]) So z. B. für das Feld aller stetiger Funktionen, der Folgen $\{c_i\}$, deren „Quadratsumme" $\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2$ endlich ist. Nicht erledigt wurde das Feld der integrierbaren, der mit α-ter Potenz integrierbaren Funktionen, das Feld der absolut konvergenten Reihen u. s. w.

[3]) Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen, Math. Zeitschr. 26 (1927) p. 47 - 65.

[4]) Zur Definition einer linearen Basis siehe die unter [3]) zitierte Arbeit, insbesonde p. 47—51.

[5]) Diese Arbeit trägt den unglücklichen Titel: Bemerkungen zu meiner Arbeit „zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen", obwohl sie nur weitere neue Resultate enthält. Math. Zeitschr. 26 (1927) p. 417—431.

in der Weise verallgemeinert werden, daß die Lösung der Randwertaufgaben für die elliptische Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right); \quad \frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q$$

ermöglicht wurde; dabei genügte es von der Funktion $f(x, y, z, p, q)$ nur ihre Stetigkeit vorauszusetzen[6]).

Bei der praktischen Anwendung des Theorems blieb als die einzige Schwierigkeit in jedem einzelnem Falle die Existenz einer linearen Basis zu beweisen. Zunächst gelang es mir mich von dieser einschränkenden Bedingung zu befreien[7]). Weitere Überlegungen erlaubten mir die Voraussetzung der Kompaktheit in einem bescheideneren Maße auszunützen[8]), sowie die Menge der Räume, in welchen der Satz seine Gültigkeit behält, zu erweitern[9]).

In der vorliegenden Note bringe ich die Sätze in ihrer vorläufig endgültigen Fassung.

Sei E ein linearer, metrischer und vollständiger Raum. Wir bezeichnen mit $\overline{x, y}$ die Entfernung der Elemente x und y. Dann soll E noch folgenden Axiomen genügen, welche zuerst Herr Banach aufgestellt hat[10]):

1° $$\overline{x, y} = \overline{x - y, \Theta};$$
Θ bezeichnet hier das Nullelement.

2° Aus
$$\lim_{n=\infty} \overline{x_n, x} = 0, \quad \lim_{n=\infty} \overline{y_n, y} = 0$$
folgt
$$\lim_{n=\infty} \overline{x_n + y_n, \; x + y} = 0.$$

3° Ist $\{\lambda_n\}$ eine Folge von reellen Zahlen und $\{x_n\}$ eine Elementenfolge aus E und gilt

---

[6]) Vgl. die unter [5]) zitierte Arbeit. Es handelt sich dort besonders um die Sätze II, III, IV.

[7]) Satz III der vorliegenden Arbeit; die Sätze II und III wurden der Poln. Math. Ges. (Abt. Lwów) in der zweiten Hälfte des J. 1928 mitgeteilt.

[8]) Satz II dieser Arbeit.

[9]) Satz I dieser Arbeit.

[10]) Einzelne Axiome können in weniger scharfer Fassung ausgesprochen werden. Vgl. das bald zu erscheinende Buch des Herrn Banach über lineare Funktionaloperationen.

$$\lim_{n=\infty} \lambda_n = \lambda, \quad \lim_{n=\infty} \overline{x_n, x} = 0,$$

so folgt daraus

$$\lim_{n=\infty} (\overline{\lambda_n x_n, \lambda x}) = 0 \text{ [11]}.$$

In solchen Räumen gilt der folgende

Satz I. *Die stetige Funktionaloperation $F(x)$ bilde die konvexe, abgeschlossene und kompakte Menge H auf sich selbst ab. Dann ist ein Fixpunt x_0 vorhanden; d. h. es gilt*

$$F(x_0) = x_0.$$

Wir benützen den folgenden Hilfsatz, den man leicht aus den Axiomen 1°, 2°, 3° erhalten kann.

Hilfsatz I. *Sei n eine natürliche Zahl $n \geqslant 2$, ε eine beliebige positive Zahl. Es gibt dann ein $\delta(n, \varepsilon)$ von folgenden Eigenschaften:*

Hat man n Punkte $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ auf solche Weise gewählt, daß die gegenseitigen Entfernungen

$$\overline{x_i, x_k} < \delta(n, \varepsilon) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

sind (sonst können $x_1, x_2, \ldots x_n$ ganz beliebig aus dem Raume herausgegriffen werden), so gelten für jeden Punkt x der Form

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, \qquad \lambda_i \geqslant 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

die Ungleichungen

$$\overline{x_i, x} < \varepsilon \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \text{ [12]}.$$

Dieser Hilfsatz läßt sich geometrisch wie folgt fassen: Sind die Eckpunkte $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ eines $(n-1)$-dimensionalen Simplexes [13]) von einander weniger als um δ entfernt, so ist jeder Punkt x des Simplexes von allen Eckpunkten weniger als um ε entfernt.

Den leichten indirekten Beweis überlassen wir dem Leser.

---

[11]) Diesen Axiomen genügen alle bekannten Funktionenfelder; auch das Feld aller Folgen von reellen Zahlen, wenn wir es nach Fréchet metrisieren.

[12]) Für die s. gn. normierten Felder läßt sich ein schärferer Satz viel leichter beweisen. In diesem Falle ist nämlich $\delta(n, \varepsilon) = \varepsilon$.

[13]) Die Begriffe des Simplexes, einer simplizialen Abbildung u. s. w. entnehme ich den topologischen Arbeiten des Herrn Brouwer.

Beweis des Satzes I. Da H kompakt und abgeschlossen ist, so lassen sich endlich viele Punkte $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_s$[14]) finden, welche zu H gehören, so daß jeder Punkt x der Menge H von wenigstens einem ξ_i $(i \leqslant s)$ weniger als um ε entfernt ist (ε eine beliebige positive Zahl). Die Anzahl s dieser „Basiselemente" hängt von der Wahl der Zahl ε ab. Über $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_s$ spannen wir jetzt die kleinste konvexe und abgeschlossene Menge H_{n-1} auf. Die Dimension $(n-1)$ dieser Menge kann natürlich $s-1$ nicht übersteigen. Wir teilen jetzt H_{n-1} simpliziai in $(n-1)$-dimensionale Simplexe ein, so daß die Eckpunkte eines jeden Teilsimplexes von einander weniger als um $\delta(n, \varepsilon)$ entfernt sind. Die Existenz der Zahl $\delta(n, \varepsilon)$ für jedes (n, ε) wurde im Hilfsatze I bewiesen. Wir bemerken weiter, daß H_{n-1} ganz zu H gehört. Es gehören nämlich $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_s$ zu H, also auch H_{n-1} als kleinste konvexe Menge über den $\{\xi_i\}$. Somit ist unsere Funktionaloperation $F(x)$ auch in H_{n-1} erklärt und stetig. Es folgt daraus, daß die Einteilung von H_{n-1} in Teilsimplexe so dicht gemacht werden kann, daß für zwei Eckpunkte d_1 und d_2 desselben Teilsimplexes die Beziehung

$$\overline{F(d_1), F(d_2)} < \operatorname{Min}\Big[\varepsilon, \delta(n, \varepsilon)\Big] \tag{1}$$

besteht.

Wir konstruieren jetzt eine simpliziale Abbildung F_{n-1} von H_{n-1} auf sich selbst, auf folgende Weise:

Es sei d ein Eckpunkt irgend eines Teilsimplexes bei der vorher angegebenen Einteilung Der Punkt $F(d)$ ist nach Voraussetzung ein Punkt von H, ist also von wenigstens einem ξ_i weniger als um ε entfernt. Ein solches ξ_i lassen wir dem Punkte d entsprechen und bezeichnen es mit $F_{n-1}(d)$. $F_{n-1}(d)$ gehört zu H_{n-1}. Somit ist die Funktion F_{n-1} in allen Eckpunkten der Einteilung definiert und wir können sie jetzt zu einer Abbildung des ganzen H_{n-1} auf sich selbst simplizial erweitern.

Nach dem Brouwerschen Satze[15]) besitzt F_{n-1} einen Fixpunkt, d. h. es gilt für ein gewisses $x \in H_{n-1}$

$$F_{n-1}(x) = x. \tag{2}$$

[14]) Eine unmittelbare Folge des Borelschen Überdeckungssatzes, der hier giltig ist.

[15]) Einen einfachen Beweis gaben B. Knaster, C. Kuratowski und S. Mazurkiewicz, Fund. Math. 14 (1929) p. 132—137.

Nun sei d irgend ein Eckpunkt desjenigen Teilsimplexes in welchem x liegt. Da die Eckpunkte dieses Simplexes nach de Konstruktion von einander weniger als um $\delta(n, \varepsilon)$ entfernt sind so folgt aus dem Hilfsatze I

$$\overline{x, d} < \varepsilon. \tag{3}$$

Aus demselben Grunde ist wegen (1)

$$\overline{F_{n-1}(x), F_{n-1}(d)} < \varepsilon; \tag{4}$$

die Ungleichungen (3), (4) ergeben wegen (2)

$$\overline{d, F_{n-1}(d)} < 2\varepsilon \tag{5}$$

und da weiter nach der Konstruktion der Funktion F_{n-1}

$$\overline{F(d), F_{n-1}(d)} < \varepsilon \tag{6}$$

ist, so folgt endlich, indem wir (5), (6) in Betracht ziehen,

$$\overline{d, F(d)} < 3\varepsilon; \qquad d \in H_{n-1} \subset H.$$

Da ein solcher Punkt d für jedes ε gefunden werden kann, so schließen wir daraus wegen der Kompaktheit und Abgeschlossenheit der Menge H auf das Vorhandensein eines Fixpunktes x_0,

$$F(x_0) = x_0,$$

w. z. b. w.

Für lineare, normierte und vollständige Räume, welche Herr Banach in seiner Dissertation betrachtet[16]) — wir nennen sie kurz „B" - Räume — läßt sich der vorstehende Satz noch erweitern. Man braucht nämlich nicht die Kompaktheit der konvexen und abgeschlossenen Menge H vorauszusetzen. Es genügt zu wissen, daß die Bildmenge $F(H)$ kompakt ist. Also gilt

Satz II. *In einem „B" - Raume sei eine konvexe und abgeschlossene Menge H gegeben. Die stetige Funktionaloperation $F(x)$ bilde H auf sich selbst ab. Ferner sei die Menge $F(H) \subset H$ kompakt. Dann ist ein Fixpunkt vorhanden.*

Beim Beweise dieses Satzes stützen wir uns auf den folgenden

Hilfsatz II. *Sei M eine beliebige kompakte und abgeschlossene Menge in einem „B" - Raume. Dann ist die kleinste konvexe und abgeschlossene Menge über M auch kompakt.*

---

[16]) Opérations dans les ensembles abstraits. Fund. Math. 3 (1922) p. 135.

Dieser Hilfsatz wurde auf meine Anregung von Herrn S. Mazur bewiesen[17]). Wir wenden ihn nun beim Beweise des Satzes II an.

Beweis des Satzes II[18]). Über $F(H)$ — das kompakt ist — spannen wir die kleinste konvexe und abgeschlossene Menge H_1 auf. Nach dem Hilfsatze II ist auch H_1 kompakt. Mittels $F(x)$ wird H_1 auf sich selbst abgebildet. Somit ist nach Satz I ein Fixpunkt vorhanden, w. z. b. w.

Um weiter vorzugehen, stellen wir einige Definitionen zusammen.

Definition I. Die Elementenfolge $\{x_n\}$ konvergiert *schwach* (im Zeichen $\xrightarrow{\text{schwach}}$) gegen das Element x, wenn für jedes lineare, stetige Funktional[19]) $A(x)$ die Beziehung

$$\lim_{n=\infty} A(x_n) = A(x)$$

gilt.

Definition II. Eine Menge heißt *schwachkompakt*, wenn in jeder Elementenfolge eine schwachkonvergente Teilfolge existiert.

Definition III. Eine Menge heißt *schwachabgeschlossen*, wenn mit jeder schwachkonvergenten Folge $\{x_n\} \subset H$, auch ihre „schwache" Grenze zu H gehört.

Definition IV. Eine Funktionaloperation $F(x)$ heißt *schwachstetig*, wenn aus

$$x_n \xrightarrow{\text{schwach}} x$$

die Beziehung

$$F(x_n) \xrightarrow{\text{schwach}} F(x)$$

folgt.

Satz III. *Sei ein separabler*[20]) *Raum S vom Typus „B" gegeben. Wenn eine in einem solchen Raume gelegene konvexe, schwachkompakte und schwachabgeschlossene Menge H mittels*

---

[17]) Über die kleinste konvexe Menge, die eine gegebene Menge enthält, Studia Math. 2 (1930) p. 7—9.

[18]) Eine andere Aussage des Satzes II wäre die folgende: Wird in einem „B"-Raume eine konvexe und abgeschlossene Menge H auf sich selbst vollstetig abgebildet, so ist ein Fixpunkt vorhanden.

[19]) Das Funktional ordnet jedem Elemente x des Funktionenfeldes eine reelle Zahl zu. Der Begriff einer Funktionaloperation $y = F(x)$ ist allgemeiner. Mittels einer Funktionaloperation werden die Elemente x eines Feldes auf die Elemente y eines anderen Feldes abgebildet.

[20]) Einen Raum nennt man *separabel*, wenn in ihm eine überalldichte Menge vorhanden ist. In den „Bemerkungen" (vgl. Fußnote [5]) wurde ein dem Satz III analoger Satz für Räume mit linearer Basis bewiesen.

einer schwachstetigen Funktionaloperation $F(x)$ auf sich selbst abgebildet wird, so gibt es einen Fixpunkt [21]).

Beweis. Es sei S ein linearer, normierter, vollständiger und separabler Raum. Wir betrachten den zu S konjugierten Raum $\mathfrak{A}$ aller in S erklärten linearen und stetigen Funktionale $A(x)$.

*Nun hat Herr Banach ein Prinzip aufgestellt, welches erlaubt den ganzen $\mathfrak{A}$-Raum auf eine Teilmenge des Raumes aller beschränkten Folgen linear und schwachstetig abzubilden. Diese eineindeutige Zuordnung wird auf folgende Weise erhalten: Man nehme eine in der Einheitskugel des Raumes S überalldichte Menge $\{e_i\}$,

$$\|e_i\| \leqslant 1, \qquad i = 1, 2, \ldots, \qquad e_i \in S,$$

und ordne jedem Funktional A die Zahlenfolge

$$c_i = A(e_i), \qquad i = 1, 2, \ldots$$

zu. Dies ist die gewünschte Zuordnung. Diesem Übertragungsprinzip, das sich auf Funktionale beziehende Sätze in analoge Theoreme im Raume der beschränkten Folgen überführen läßt, stelle ich jetzt ein Verfahren gegenüber, welches für Mengen H, die im Raume S selbst gelegen sind, dasselbe leistet. Dazu kommt aber im voraus eine wichtige einschränkende Bedingung. Es ist im allgemeinen nicht möglich den ganzen Raum S beiderseits schwachstetig auf eine Teilmenge des Raumes der beschränkten Folgen abzubilden. Vielmehr gelingt eine solche Abbildung nur für solche Mengen $H \subset S$, die selbst schwachkompakt und schwachabgeschlossen sind. Dies sind gerade Mengen, welche die Voraussetzungen dieses Satzes erfüllen. Überdies soll H konvex sein.*

Wir betrachten zu diesem Zwecke noch einmal den konjugierten Raum $\mathfrak{A}$. Er ist, wie man sich leicht überzeugen kann,

---

[21]) Für das Feld der stetigen Funktionen ist die schwache Konvergenz einer Funktionenfolge $\{f_n\}$ mit der folgenden Bedingung äquivalent:

1° Die Funktionen $f_n(x)$ sind gleichmäßig beschränkt.

2° Es gilt $\lim_{n=\infty} f_n(x) = f(x)$, wobei $f(x)$ eine stetige Funktion bedeutet.

Der Grenzübergang braucht nicht gleichmäßig zu geschehen. Wir überlassen es dem Leser nach diesen Erklärungen Satz III für das Feld der stetigen Funktionen auszusprechen. Die Anwendungen auf elliptische Differentialgleichungen findet man in den „Bemerkungen".

schwachseparabel, d. h. es gibt eine abzählbare Menge von Funktionalen $\{A_n\}$, welche folgende Eigenschaften besitzen [22]):

1° $\|A_n\| \leqslant 1, \qquad n = 1, 2, \dots$

2° Zu jedem Funktional $A \in \mathfrak{A}$, dessen $\|A\|$ [23]) $\leqslant 1$ ist, existiert eine aus der „überalldichten" Folge $\{A_n\}$ herausgegriffene Teilfolge A_{n_m}, die nach A schwach konvergiert, d. h. $\lim_{m=\infty} A_{n_m}(x) = A(x)$ für jedes $x \in S$. Wir wählen noch eine feste Zahlenfolge $\{\varepsilon_i\}$, die nach Null konvergiert. Es sei nun $x \in H \subset S$. Wir bilden die Folge

$$c_n(x) = \varepsilon_n \cdot A_n(x), \qquad n = 1, 2, \dots$$

Somit haben wir jedem $x \in H$ eine nach Null konvergierende Folge reeller Zahlen $\{c_n\}$ zugeordnet. Diese zugeordnete Folge bezeichnen wir kurz mit $\varphi(x)$. Im Raume S' der nach Null konvergierenden Folgen wird auf diese Weise eine — offensichtlich konvexe — Menge H' erhalten. Wir werden beweisen, daß sobald eine Elementenfolge $\{x_m\}$ aus H schwach nach x konvergiert, die entsprechenden Zahlenfolgen $\varphi(x_n)$ stark nach $\varphi(x)$ konvergieren. Daraus folgt aber sofort, daß H' kompakt und abgeschlossen ist. In der Tat, es sei

$$x_m \xrightarrow{\text{schwach}} x; \quad x_m \in H; \quad x \in H.$$

Die Folgen $\varphi(x_m)$:

$$\varphi(x_1) \dots\dots \qquad c_1(x_1) = \varepsilon_1 A_1(x_1),\ c_2(x_1) = \varepsilon_2 A_2(x_1), \dots\dots$$

$$\vdots$$

$$\varphi(x_m) \dots\dots \qquad c_1(x_m) = \varepsilon_1 A_1(x_m),\ c_2(x_m) = \varepsilon_2 A_2(x_m), \dots\dots$$

konvergieren also (wegen der Definition der schwachen Konvergenz) nach der Folge $\varphi(x)$

$$\varphi(x) \dots\dots \qquad c_1(x) = \varepsilon_1 A_1(x),\ c_2(x) = \varepsilon_2 A_2(x), \dots\dots$$

Diese „kolonnenmäßige" Konvergenz geschieht aber gleichmäßig, da die festen Zahlen ε_i und die Zahlen $A_i(x_m)$ — unabhängig von i und m — beschränkt sind [23]). Dies bedeutet aber nach der im Raume S' üblichen Normierung, daß die Folgen $\varphi(x_m)$ stark nach $\varphi(x)$ konvergieren.

---

[22]) Vgl. St. Banach, Sur les fonctionnelles linéaires II, Studia Math. I (1929) p. 223—239, insb. p. 232, Hilfsatz 6.

Mit $\|A\|$ (Norm des Funktionales) bezeichnen wir die kleinste positive Zahl M, so daß $|A(x)| \leqslant M\|x\|$ für jedes x gilt.

[23]) Es genügt nämlich für unseren Zweck sich mit solchen Funktionalen A zu beschäftigen, für welche $\|A\| \leqslant 1$.

Die Abbildung x zu $\varphi(x)$ ist überdies eineindeutig. Denn wäre für zwei linear unabhängige Elemente x_0 und x_1

$$A_n(x_0) = A_n(x_1) \qquad \text{für } n = 1, 2, \ldots,$$

so müssten auch alle Funktionale $A(x)$ für x_0 und x_1 übereinstimmen. Es existiert aber ein Funktional $A(x)$, für welches

$$A(x_0) = 0, \quad A(x_1) = 1, \qquad \|A(x)\| \leqslant 1$$

ist[24]).

In der konvexen, abgeschlossenen und kompakten Menge H' der Folgen $\varphi(x)$ betrachten wir jetzt die Abbildung

$$\varphi'(x) = \varphi[F(x)],$$

welche der Folge $\varphi(x)$ die Folge $[F(x)]$ zuordnet. Diese Abbildung ist nach dem Vorhergesagten eindeutig, stetig und bildet H' auf sich selbst ab[25]). Nach Satz I gibt es also einen Fixpunkt

$$\varphi[F(x)] = \varphi(x).$$

Für das eineindeutig entsprechende Element x gilt also

$$x = F(x),$$

w. z. b. w.

Zum Schluß zeigen wir, daß die Axiome 1°, 2°, 3° denen ein linearer, metrischer und vollständiger Raum genügen soll, damit in ihm Satz I gelte, nicht entbehrt werden können.

In der Tat: betrachten wir den Raum E aller geordneten Zahlenpaare (x, y); die Entfernung zweier Paare

$$\omega = (x, y), \qquad \omega_1 = (x_1, y_1)$$

sei euklidisch

$$\overline{\omega_1, \omega_2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Somit ist E vollständig. Linear machen wir aber den Raum E nicht wie üblich, sondern wie folgt. E hat die Mächtigkeit des Kontinuums. Auch die Menge H der Zahlenpaare $\omega = (x, y)$, für welche $x^2 + y^2 = 1$ ist, besitzt die Mächtigkeit des Kontinuums.

---

[24]) Diese Tatsache folgt aus einem Erweiterungssatze für Funktionale, welchen Herr Banach bewiesen hat: Sur les fonctionnelles linéaires I, Stud. Math. 1 (1929) p. 211—216. Für separable Räume wurde ein analoger Satz von Helly bewiesen: Berichte der Wiener Akad. d. Wissensch. IIa, 121 (1912) p. 265.

[25]) Ich möchte noch bemerken, daß die Zuordnung

$$c_i(x) = A_i(x)$$

die Menge H auf eine kompakte Menge des Fréchetschen Raumes abbildet.

Wir können also E auf die Gerade eineindeutig (aber nicht stetig) abbilden, so daß der Menge H die Strecke (0, 1) entspricht und der Rest der Geraden dem Komplemente $E-H$. Wir übertragen jetzt die Linearität in der Geraden auf den Raum E der Zahlenpaare. Der Raum E ist jetzt also metrisch, vollständig und linear, erfüllt aber offensichtlich nicht die Axiome 1°, 2°, 3°. Wir zeigen, daß in ihm Satz I nicht besteht. Denn die Menge H ist nach dieser Definition der Linearität eine konvexe Menge. Da H die euklidische Metrik besitzt, so ist H kompakt und abgeschlossen. Durch die Drehung um den Nullpunkt wird aber H auf sich selbst ohne Fixpunkt stetig abgebildet[26]).

---

[26]) Anm. bei der Korrektur am 26. 7. 1930. Auch andere (für den Fall der stetigen Funktionen in der Birkhoff-Kelloggschen Arbeit enthaltene) Sätze, können nach den hier entwickelten Methoden für allgemeine Räume vom Typus „B" bewiesen werden, z. B. der folgende Satz: Wir bezeichnen mit I den Rand der Einheitskugel in einem unendlichdimensionalen „B"-Raume, d. h. die Gesamtheit derjenigen Punkte x, für welche $\|x\|=1$ gilt. Es sei $y=f(x)$ eine nur in I erklärte Funktionaloperation, welche I stetig auf die kompakte Menge abbildet. Die Bildmenge $f(I)$ habe ferner vom Nullpunkte eine positive Entfernung. Dann gibt es eine invariante Richtung, d. h. es gilt für ein gewisses Element x_0 und entsprechende reelle Zahl λ_0

$$f(x_0)=y_0=\lambda_0 \cdot x_0 .$$

Der Beweis wird dem Leser überlassen.

*(Reçu par la Rédaction le 19. 4. 1930: le texte entre les astérisques * * a été fixé le 4. 7. 1930).*