Ćwiczenia VIII Fizyka cząstek elementarnych

Zadanie 1

Wykazać, że macierze obrotu o kąt φ postaci

$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

tworzą grupę.

Zadanie 2

Wykazać, że macierze postaci

$$R(a) = \begin{pmatrix} \cosh a & \sinh a \\ \sinh a & \cosh a \end{pmatrix}$$

tworzą grupę.

Zadanie 3

Macierze tworzące grupę SU(2) zapisuje się zwykle w postaci

$$U = \exp[i\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{I}] = \exp[i(\omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + \omega_3 I_3)],$$

gdzie $\boldsymbol{\omega} \equiv (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ jest zbiorem trzech parametrów rzeczywistych, a $\mathbf{I} = (I_1, I_2, I_3)$ trzema generatorami grupy. Znaleźć te generatory jako macierze 2×2 przyjmując, że wektory

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

są wektorami własnymi operatora I_3 o wartościach własnych, odpowiednio, $\frac{1}{2}$ oraz $-\frac{1}{2}$. Wynik porównać, ze standardowym przedstawieniem operatora izospinu $\mathbf{I} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}$, gdzie wektor $\boldsymbol{\sigma}$ tworzą trzy macierze Pauliego $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$