<u>Wykład VI</u> Mechanika

Formalizm Lagrange'a[1]

Ruch z więzami

Mamy układ M cząstek opisany równaniami ruchu

$$m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_i \quad i = 1, 2, \ldots M \,.$$

Jeśli ruch cząstek nie jest poddany jakimś zewnętrznym ograniczeniom, mamy $3M$ zmiennych niezależnych $\{x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots x_M, y_M, z_M\}$ i dla pełnego określenia ruchu układu należy wyznaczyć $3M$ współrzędnych – układ ma $3M$ **stopni swobody**.

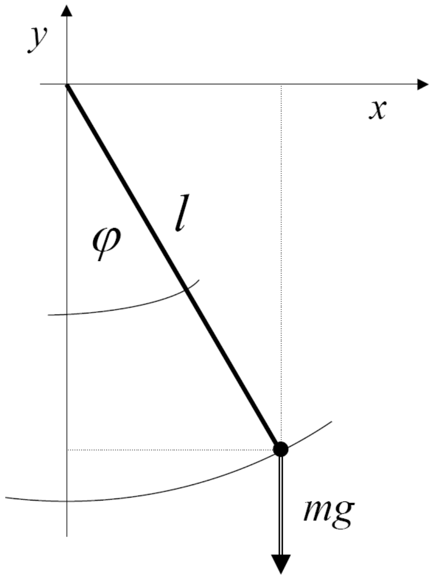
Jeśli ruch cząstek poddany jest ograniczeniom – na układ nałożone są **więzy** – np. w postaci warunku

$$f_k(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_M) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots f < 3M \ ,$$

wówczas liczba stopni swobody jest zmniejszona do $N = 3M - f$. Obecność więzów wprowadza jakby dodatkowe siły.

<u>Przykład 1</u>

Mamy wahadło – kulkę o masie m, zawieszoną na nieważkim pręcie o długości l.



$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = -mg \qquad\qquad x = l \sin\varphi, \quad y = -l\cos\varphi \\ x^2 + y^2 = l^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\sin\varphi\,\dot{\varphi}^2 + \cos\varphi\,\ddot{\varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi}^2 = \dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\,\ddot{\varphi} \\ \cos\varphi\,\dot{\varphi}^2 + \sin\varphi\,\ddot{\varphi} = -\dfrac{g}{l} = -\omega^2 \end{cases}$$

$$\boxed{\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin\varphi = 0}$$

Mamy początkowo 2 zmienne, lecz ze względu na wiąz nie są one niezależne - układ ma tylko jeden stopień swobody, a kąt φ jest „wygodą" współrzędną.

Współrzędne i prędkości uogólnione

Współrzędne uogólnione – zbiór wzajemnie niezależnych parametrów $\{q_1, q_2, \ldots, q_N\}$ zupełnie opisujących ruch danego układu zgodnie z nałożonymi nań więzami.

Prędkości uogólnione – pochodne czasowe współrzędnych uogólnionych $\{\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_N\}$.

<u>Przykład 1 cd.</u>

współrzędna uogólniona – φ, prędkości uogólniona – $\dot{\varphi}$.

[1] Joseph Louis Lagrange 1736-1813

Wykład VI cd. Mechanika

Funkcja Langrange'a

$$\boxed{L(q,\dot{q},t)=T(q,\dot{q})-V(q,t)}$$

$q\equiv\{q_1,q_2,\ldots,q_k\}$, $\dot{q}\equiv\{\dot{q}_1,\dot{q}_2,\ldots,\dot{q}_k\}$, T – energia kinetyczna, V – energia potencjalna.

Przykład 1 cd.

$$L=\frac{m}{2}l^2\dot{\varphi}^2-mgl\,(1-\cos\varphi)$$

Zasada najmniejszego działania (Hamiltona[2])

Działanie: $S\equiv\int_{t_1}^{t_2}dt\,L(q,\dot{q},t),\quad q(t_1)=q_1,\quad q(t_2)=q_2$

Układ porusza się w taki sposób, że działanie na drodze od $q(t_1)=q_1$ do $q(t_2)=q_2$ przyjmuje minimalną wartość

Równanie Lagrange'a – jeden stopień swobody

$q(t)$ – trajektoria przy której działanie jest minimalne. Rozważamy małe odchylenia od tej trajektorii tzn. $q(t)+\delta q(t),\quad \delta q(t_1)=\delta q(t_2)=0$.

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}dt\,L(q+\delta q,\dot{q}+\delta\dot{q},t)-\int_{t_1}^{t_2}dt\,L(q,\dot{q},t)=0$$

$f(x_0)$ - minimum

$$df\equiv f(x_0+dx)-f(x_0)=\frac{df(x_0)}{dx}dx=0$$

$$L(q+\delta q,\dot{q}+\delta\dot{q},t)=L(q,\dot{q},t)+\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial q}\delta q+\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial\dot{q}}\delta\dot{q}$$

$$\delta\dot{q}=\frac{d}{dt}\delta q$$

$$\left.\begin{aligned}q'(t)&\equiv q(t)+\delta q(t)\\ \dot{q}'(t)&\equiv\dot{q}(t)+\frac{d}{dt}\delta q(t)\\ \dot{q}'(t)&\equiv\dot{q}(t)+\delta\dot{q}(t)\end{aligned}\right\}\Rightarrow\ \frac{d}{dt}\delta q(t)=\delta\dot{q}(t)$$

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}dt\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial q}\delta q+\int_{t_1}^{t_2}dt\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial\dot{q}}\frac{d}{dt}\delta q$$

całkowanie przez części drugiego członu uwzględniające, że $\delta q(t_1)=\delta q(t_2)=0$:

$$\int_{t_1}^{t_2}dt\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial\dot{q}}\frac{d}{dt}\delta q=\underbrace{\left.\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial\dot{q}}\delta q\right|_{t_1}^{t_2}}_{=0}-\int_{t_1}^{t_2}dt\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial\dot{q}}\right)\delta q$$

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}dt\left(\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial q}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial\dot{q}}\right)\delta q=0\quad\Rightarrow\quad\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial\dot{q}}-\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial q}=0}$$

[2] William Rowan Hamilton 1805-1865

Wykład VI cd. Mechanika

Związek z równaniem Newtona

$q = x$ – współrzędna kartezjańska

$$L(q,\dot{q},t) = T(q,\dot{q}) - V(q,t) = \frac{m\dot{x}^2}{2} - V(x,t)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial q} = 0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} + \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} = 0$$

Przykład 1 cd.

$$L = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 - mgl\,(1 - \cos\varphi)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial q} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} - \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$$

Równania Lagrange'a – N stopni swobody

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1,2,\ldots N}$$

$$q \equiv \{q_1, q_2, \ldots, q_N\}, \quad \dot{q} \equiv \{\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_N\}$$

Uogólnione pędy i siły

$p_i \equiv \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ - uogólniony pęd $\quad \left(q_i = r_i \quad \Rightarrow \quad p_i = m_i \dot{r}_i\right)$

$F_i \equiv \dfrac{\partial L}{\partial q_i}$ - uogólniona siła $\quad \left(q_i = r_i \quad \Rightarrow \quad F_i = -\dfrac{\partial V}{\partial r_i}\right)$

Zachowanie pędu

$$P \equiv \sum_i p_i = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \qquad \frac{dP}{dt} = \sum_i \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

zakładamy zachodzenie równań Lagrange'a

1) $\dfrac{dP}{dt} = 0$ pod nieobecność sił $\dfrac{\partial L}{\partial q_i} = 0$.

2) $\dfrac{dP}{dt} = 0$, gdy L zależy tylko od różnic (q_i-q_j), wtedy $\dfrac{\partial L}{\partial q_i} = -\dfrac{\partial L}{\partial q_j}$ i $\sum_i \dfrac{\partial L}{\partial q_i} = 0$.

Wykład VI cd. Mechanika

Energia

$$E \equiv \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \quad \left(q_i = r_i \quad \Rightarrow \quad E = T + V\right)$$

Zachowanie energii

$$\frac{dE}{dt} = \sum_i \frac{d}{dt}\left(\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{dL}{dt} = \sum_i \left(\ddot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \dot{q}_i \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial t} - \sum_i \left(\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial q_i} + \ddot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)$$

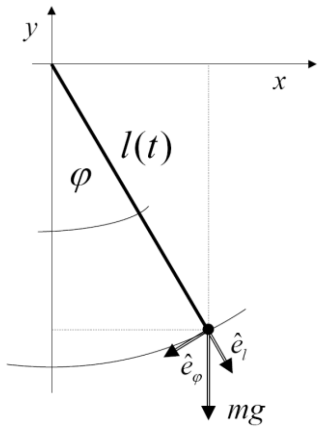
$$\frac{dE}{dt} = \sum_i \dot{q}_i \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

zakładamy zachodzenie
równań Lagrange'a

Energia jest zachowywana, gdy funkcja Lagrange'a nie zależy jawnie od czasu.

Przykład 2

Równanie ruchu wahadła o zmiennej długości $l(t)$, która jest zadaną funkcją czasu.



$$L = \frac{m}{2}\left(\vec{v}_l^{\,2} + \vec{v}_\varphi^{\,2}\right) - mgl\,(1-\cos\varphi) = \frac{m}{2}\left(\dot{l}^2 + l^2\dot{\varphi}^2\right) - mgl\,(1-\cos\varphi)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi}, \qquad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mgl\sin\varphi, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\ddot{\varphi} + 2ml\dot{l}\dot{\varphi}$$

$$\boxed{\ddot{\varphi} + 2\frac{\dot{l}}{l}\dot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0}$$

Przykład 3

Równanie ruchu wahadła zawieszonego na nici nawiniętej na walcu o promieniu R długości l.

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - mg\left(l + R\sin\varphi - (l+R\varphi)\cos\varphi\right) = \frac{m}{2}(l+R\varphi)^2\dot{\varphi}^2 - mg\left(l + R\sin\varphi - (l+R\varphi)\cos\varphi\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m(l+R\varphi)^2\dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m(l+R\varphi)^2\ddot{\varphi} + 2m(l+R\varphi)R\dot{\varphi}^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = m(l+R\varphi)R\dot{\varphi}^2 - mg\,(l+R\varphi)\sin\varphi$$

$$\boxed{(l+R\varphi)\ddot{\varphi} + R\dot{\varphi}^2 + g\sin\varphi = 0}$$