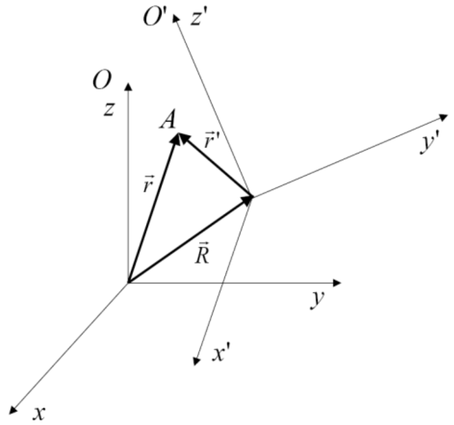
<u>Wykład V</u> Mechanika

Ruch w nieinercjalnym układzie odniesienia

Kinematyka

Mamy dwa poruszające się względem siebie układy współrzędnych *O* i *O'* oraz poruszający się względem tych układów punkt *A*. Chcemy wyznaczyć położenie $\vec{r}\,'$, prędkość $\vec{v}\,'$ i przyspieszenie $\vec{a}\,'$ punktu *A* względem *O'* znając położenie $\vec{r}$, prędkość $\vec{v}$ i przyspieszenie $\vec{a}$ punktu *A* względem *O*.



Położenie

$$\vec{r}(t) = \vec{r}\,'(t) + \vec{R}(t)$$

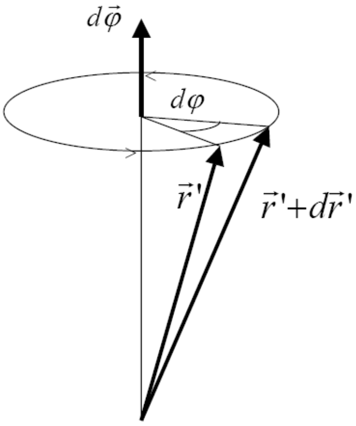
Należy pamiętać, że wszystkie trzy wektory są mierzone w tym samym układzie.

Prędkość

$$\vec{v} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \vec{v}\,' \equiv \frac{d'\vec{r}\,'}{dt}, \quad (t = t')$$

W definicji prędkości $\vec{v}$ wektor $\vec{r}$ określony jest w układzie *O*, a w przypadku $\vec{v}\,'$ wektor $\vec{r}\,'$ określamy w układzie *O'*. Tak więc przyrost $d\vec{r}$ mierzony jest w układzie *O*, a przyrost $d'\vec{r}\,'$ w układzie *O'*.

Zmiany wektora $\vec{r}\,'$ obserwowane w układzie *O'* spowodowane są ruchem punktu *A* względem układu *O* i ruchem układu *O'* względem układu *O*. Rozważamy przemieszczenie układu *O'* w krótkim przedziale czasu *dt*. Każde przemieszczenie może być przedstawione jako złożenie przesunięcia równoległego (translacji) i obrotu. Takie przedstawienie nie jest jednoznaczna, wybieramy więc złożenie, w którym obrót układu *O'* następuje wokół osi przechodzącej przez początek tego układu. Wówczas obrót nie ma wypływa na zmianę wektora $\vec{R}$, który zmienia się jedynie na skutek translacji. Wówczas



$$d\vec{r} = d\vec{r}\,' + d\vec{R} = d'\vec{r}\,' + d\vec{r}\,'_{\mathrm{rot}} + d\vec{R},$$

gdzie $d\vec{r}\,'_{\mathrm{rot}} = d\vec{\varphi} \times \vec{r}\,'$, a $d\vec{\varphi}$ jest wektorem obrotu skierowanym wzdłuż osi obrotu o zwrocie zgodnym z regułą śruby prawoskrętnej. Po podzieleniu przez *dt* ostajemy

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r}\,' + \vec{u}_{\mathrm{tr}}}$$

$\vec{u}_{\mathrm{tr}} \equiv \dfrac{d\vec{R}}{dt}$ - prędkość translacyjna, $\vec{\omega} \equiv \dfrac{d\vec{\varphi}}{dt}$ - prędkość kątowa.

Otrzymujemy też wzór: $\dfrac{d\vec{r}\,'}{dt} = \dfrac{d'\vec{r}\,'}{dt} + \omega \times \vec{r}\,'$.

<u>Wykład V cd.</u> Mechanika

<u>Przyspieszenie</u>

Różniczkując wzór $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}' + \vec{u}_{\text{tr}}$ po czasie, dostajemy

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt} + \frac{d\vec{u}_{\text{tr}}}{dt} \quad .$$

Stosując wzór $\frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d'\vec{r}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}'$ dla $\frac{d\vec{v}'}{dt}$ oraz $\frac{d\vec{r}'}{dt}$ otrzymujemy

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d'\vec{v}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \left(\frac{d'\vec{r}'}{dt} + \omega \times \vec{r}' \right) + \frac{d\vec{u}_{\text{tr}}}{dt}$$

Ostatecznie mamy

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \vec{a}_{\text{tr}}}$$

gdzie $\vec{a} \equiv \frac{d\vec{v}}{dt}$, $\vec{a}' \equiv \frac{d'\vec{v}'}{dt}$, $\vec{a}_{\text{tr}} \equiv \frac{d\vec{u}_{\text{tr}}}{dt}$, $2\vec{\omega} \times \vec{v}'$ - przyspieszenie Coriolisa[1], $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$ - przyspieszenie dośrodkowe.

<u>Siły bezwładności</u>

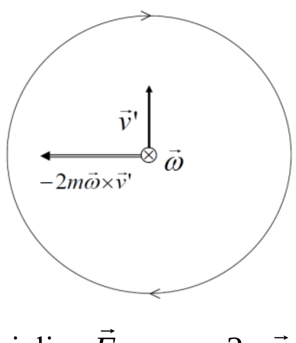
W inercjalnym układzie odniesienia zgodnie z II zasadą dynamiki dla punktu materialnego mamy $m\vec{a} = \vec{F}$. Wyrażając $\vec{a}$ przez przyspieszenie w układzie nieinercjalnym dostajemy

$$m\left(\vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \vec{a}_{\text{tr}} \right) = \vec{F} \ ,$$

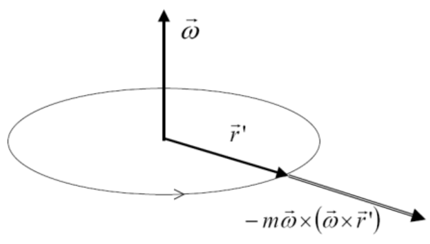
co prowadzi do

$$\boxed{m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{\text{bz}}}$$

gdzie siła bezwładności równa jest $\vec{F}_{\text{bz}} \equiv -m\left(2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \vec{a}_{\text{tr}} \right)$;



Siła Coriolisa $\vec{F}_{\text{Coriolis}} \equiv -2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$



Siła odśrodkowa $\vec{F}_{\text{odś}} \equiv -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$

---

[1] Gaspard-Gustave Coriolis 1792-1843