<u>Wykład II</u> Mechanika

Zasady dynamiki Newtona[1]

<u>I zasada dynamiki</u>: Jeśli na ciało nie działa żadna siła bądź działające siły równoważą się, ciało to porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym ($\vec{v} = const$) lub spoczywa.

<u>Pęd:</u> $\vec{p} = m\vec{v}$

<u>II zasada dynamiki</u>: Zmiana pędu ciała w (nieskończenie) krótkim czasie jest równa sile działającej na to ciało pomnożonej przez ten czas

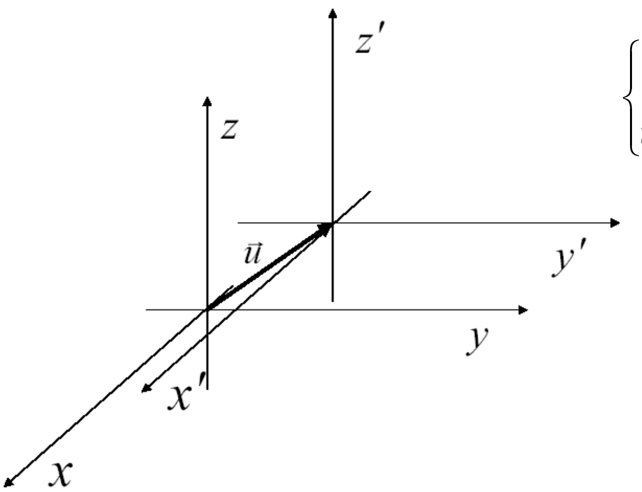
$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}} \qquad \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}$$

<u>Masa grawitacyjna (m^*) i bezwładna (m):</u>

$$\vec{F}_g = m^*\vec{g} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \frac{m^*}{m}\vec{g} \quad \Rightarrow \quad m \sim m^*, \ \text{przyjmuje się } m^* = m$$

<u>Układ inercjalny:</u> układ w którym zachodzi I zasada dynamiki

<u>Transformacja Galileusza</u>[2]



$$\begin{cases} \vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{u}t \\ t' = t \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = x - u_x t \\ y' = y - u_y t \\ z' = z - u_z t \\ t' = t \end{cases}$$

$$\frac{d\vec{r}\,'}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} - \vec{u}$$

$$\frac{d^2\vec{r}\,'}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Jeśli dany układ jest inercjalny, to układy poruszające się względem niego ze stałą prędkością też są inercjalne

<u>Zasada superpozycji sił</u>: jeśli na dany punkt działa kilka sił, to siła wypadkowa jest sumą wektorową sił składowych

[1] Isaac Newton 1643-1727
[2] Galileo Galilei 1564-1642

Wykład II cd. Mechanika

II zasada dynamiki dla układu *N* punktów materialnych:

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec{F}_{ij} \qquad i,\, j = 1,2,\ldots N$$

$\vec{F}_i$ - siła zewnętrzna działająca na *i*-ty punkt,

$\vec{F}_{ij}$ - siła działająca na *i*-ty punkt pochodząca od punkty *j*-tego

III zasada dynamiki: siła reakcji jest równa i przeciwnie skierowana do akcji

$$\boxed{\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}}$$

Suma sił wzajemnego oddziaływania punktów znika $\sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{N} \vec{F}_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{N}\left(\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}\right) = 0$

Prawa zachowania

Zachowanie pędu

$$\begin{cases} \vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i \\ \vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \end{cases} \quad i = 1, 2, \ldots N$$

- całkowity pęd układu punktów

- całkowita siła zewnętrzna

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq i}}^{N} \vec{F}_{ij} = \vec{F}$$

Jeśli siła zewnętrzna znika, całkowity pęd układu jest zachowany: $\frac{d\vec{P}}{dt} = 0$

Środek masy: $\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i$, $M = \sum_i m_i$, $\vec{P} = M\frac{d\vec{R}}{dt}$

Ruch środka masy określają wyłącznie siły zewnętrzne

Zachowanie momentu pędu

$$\begin{cases} \vec{J}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i \\ \vec{J} = \sum_{j=1}^{N} \vec{J}_i\ , \quad i = 1,2,\ldots N \end{cases}$$

- moment pędu *i*-tego punktu materialnego

- całkowity moment pędu układu punktów

$$\vec{v}_i \times \vec{p}_i = 0$$

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \sum_i\left(\vec{v}_i \times \vec{p}_i + \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt}\right) = \sum_i \vec{r}_i \times \left(\vec{F}_i + \sum_{j,j\neq i}\vec{F}_{ij}\right) = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_{i,j,j\neq i}\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}$$

$$= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j,j\neq i}\left(\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji}\right) = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j,j\neq i}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij}$$

Wykład II cd. Mechanika

Jeśli układ jest izolowany $\left(\vec{F}_i = 0\right)$, a siły wzajemnego oddziaływania centralne $\left((\vec{r}_i - \vec{r}_j) \parallel \vec{F}_{ij}\right)$

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = 0$$

Wielkość momentu pędu zależy od wyboru układu współrzędnych.

Układ środka masy (CM)

Położenie środka masy $\vec{R}$ i promienie wodzące $\vec{r}_i^{\,*}$ w CM są zdefiniowane:

$$\begin{cases} \vec{R} \equiv \dfrac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} \\ \vec{r}_i^{\,*} \equiv \vec{R} - \vec{r}_i \end{cases}$$

Promienie wodzące spełniają warunek $\sum_i m_i \vec{r}_i^{\,*} = 0$, który umożliwia zapisać moment pędu jako: $\vec{J} = \vec{R} \times \vec{P} + \vec{J}^{\,*}$, $\quad \vec{P} \equiv \sum_i m_i \vec{p}_i$, $\quad \vec{J}^{\,*} \equiv \sum_i \vec{r}_i^{\,*} \times \vec{p}_i$

Zachowanie energii

pojedyncza cząstka

$T \equiv \dfrac{\vec{p}^{\,2}}{2m}$ to energia kinetyczna. Obliczamy pochodną po czasie $\dfrac{dT}{dt} = \dfrac{\vec{p}}{m}\dfrac{d\vec{p}}{dt}$. Skorzystawszy z II zasady dynamiki $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$, dostajemy $\dfrac{dT}{dt} = \dfrac{\vec{p}}{m}\vec{F} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}\vec{F}$. Dalej zakładamy, że siła jest potencjalna, czyli można ją zapisać jako gradient energii potencjalnej czyli

$$\vec{F} = -\nabla V(\vec{r}) = -\left(\frac{\partial V(\vec{r})}{\partial x}, \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial y}, \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial z}\right),$$

V – energia potencjalna. Dodatkowo zakładamy, że układ jest konserwatywny, tj. $\dfrac{\partial V}{\partial t} = 0$.

Wtedy $-\dfrac{d\vec{r}}{dt}\vec{F} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}\nabla V(\vec{r}) = \dfrac{dx}{dt}\dfrac{\partial V}{\partial x} + \dfrac{dy}{dt}\dfrac{\partial V}{\partial y} + \dfrac{dz}{dt}\dfrac{\partial V}{\partial z} = \dfrac{dV(\vec{r})}{dt}$. A zatem mamy

$\dfrac{dT}{dt} = -\dfrac{dV}{dt}$, czyli

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(T + V\right) = 0}.$$

Ostatnie równanie wyraża niezmienność w czasie całkowitej energii tj. $T+V$, a więc jest <u>prawem zachowania energii</u>.

układ cząstek

W przypadku układu cząstek powtarzamy te same kroki, co wypadku pojedynczej cząstki.

$$T \equiv \sum_i \frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2m_i}, \quad \frac{dT}{dt} = \sum_i \frac{\vec{p}_i}{m_i}\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}\left(\vec{F}_i(\vec{r}_i) + \sum_{j,j\neq i} \vec{F}_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)\right) = \sum_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}\vec{F}_i(\vec{r}_i) + \frac{1}{2}\sum_{i,j,i\neq j}\frac{d(\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{dt}\vec{F}_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

$\vec{F}_i = -\nabla V_i(\vec{r}), \quad \vec{F}_{ij} = -\nabla V_{ij}(\vec{r})$ siły potencjalne

$U \equiv \sum_i V_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j,i\neq j} V_{ij}$ energia potencjalna układu

$T + U$ energia całkowita układu

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(T + \sum_i V_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j,i\neq j} V_{ij}\right) = 0}$$