Wykład I Mechanika

Mechanika – opis ruchu ciał pod działaniem sił

- Kinematyka – opis ruchu bez wnikania w jego przyczyny
- Dynamika – opis ruchu uwzględniający rolę sił
- Statyka – analiza sił działających na obiekt spoczywający
- Mechanika ośrodków ciągłych (hydrodynamika)
- Teoria sprężystości

Wielki początek: *Philosophiae naturalis principia mathematica* – 1687 rok

Mechanika – język fizyki, serce fizyki, „mechanizacja" fizyki

Zalecany podręcznik: W. Rubinowicz i W. Królikowski, *Mechanika teoretyczna,* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1995

Kinematyka punktu materialnego

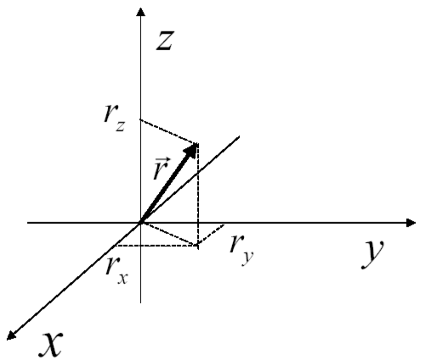
Punkt materialny: obiekt o rozmiarach dużo mniejszych niż charakterystyczne odległości występujące w danym problemie

Względność ruchu: ruch punktu rozpatrujemy względem innych punktów

Układ odniesienia: zbiór punktów stałych umożliwiających jednoznaczne określenie położenie punktu

Układ współrzędnych: układ pozwalający podać liczby (współrzędne) jednoznacznie określające położenie punktu w przestrzeni (R^3)

Kartezjański układ współrzędnych



układ prostokątny, globalny, prawoskrętny

wersory: $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$

zapis wektora:

$$\vec{r} = (r_x, r_y, r_z) = (x, y, z)$$

$$\vec{r} = r_x\vec{e}_x + r_y\vec{e}_y + r_z\vec{e}_z = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

Wektor wodzący punktu: $\vec{r}(t) = (r_x(t), r_y(t), r_z(t)) = r_x(t)\vec{e}_x + r_y(t)\vec{e}_y + r_z(t)\vec{e}_z$

Przykład:
ruch po prostej

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + at \\ y(t) = y_0 + bt \\ z(t) = z_0 + ct \end{cases}$$

Przykład:
ruch po okręgu
o promieniu R

$$\begin{cases} x(t) = R\sin(\omega t) \\ y(t) = R\cos(\omega t) \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

Wykład I cd. Mechanika

Tor, równanie toru: $f(r_x, r_y, r_z) = 0$ czas wyeliminowany

Przykład:
ruch po prostej

$$\begin{cases} y = y_0 - \frac{b}{a}x_0 + \frac{b}{a}x \\ z = z_0 - \frac{c}{a}x_0 + \frac{c}{a}x \end{cases}$$

Przykład:
ruch po okręgu

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ z = 0 \end{cases}$$

Droga: długość toru

$$\boxed{ds(t) \equiv \sqrt{dx^2(t) + dy^2(t) + dz^2(t)}}$$ element drogi, $$\boxed{\Delta s = \int_{s(t_1)}^{s(t_2)} ds(t)}$$

Przykład: ruch po prostej

$$\begin{cases} dx(t) = adt \\ dy(t) = bdt \\ dz(t) = cdt \end{cases}$$

$$ds(t) = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,dt$$
$$\Delta s = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,(t_2 - t_1)$$

Przykład: ruch po okręgu

$$\begin{cases} dx(t) = R\cos(\omega t)\,\omega dt \\ dy(t) = -R\sin(\omega t)\,\omega dt \\ dz(t) = 0 \end{cases}$$

$$ds(t) = R\omega dt = R\,d\varphi$$
$$\Delta s = R\omega(t_2 - t_1) = R(\varphi_2 - \varphi_1)$$

Wektor wodzący i droga:

$$d\vec{r} = (dx, dy, dz)$$ $$\boxed{d\vec{r} = \vec{\sigma}\,ds}$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$ $\vec{\sigma}$ jednostkowy wektor styczny do toru

Prędkość:

$$\boxed{\vec{v}(t) \equiv \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt}\right) = \frac{d\vec{r}(s)}{ds}\frac{ds(t)}{dt} = \vec{\sigma}v(t)}$$

prędkość jest zawsze styczna do toru

Przykład:
ruch po prostej

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + at \\ y(t) = y_0 + bt \\ z(t) = z_0 + ct \end{cases} \qquad \vec{v}(t) = (a, b, c)$$

Przykład:
ruch po okręgu

$$\begin{cases} x(t) = R\sin(\omega t) \\ y(t) = R\cos(\omega t) \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

$$\vec{v}(t) = (R\omega\cos(\omega t), -R\omega\sin(\omega t), 0)$$
$$v(t) = R\omega$$

Wykład I cd. Mechanika

Droga: $$ds(t) \equiv \sqrt{dx^2(t) + dy^2(t) + dz^2(t)} = \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t) + v_z^2(t)} = v(t)\, dt$$

$$\boxed{\Delta s = \int_{t_1}^{t_2} dt\, v(t)}$$

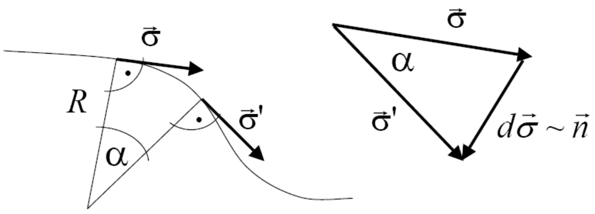
Przyspieszenie:

$$\boxed{\vec{a}(t) \equiv \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \left(\frac{dv_x(t)}{dt}, \frac{dv_y(t)}{dt}, \frac{dv_z(t)}{dt} \right) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \left(\frac{d^2x(t)}{dt^2}, \frac{d^2y(t)}{dt^2}, \frac{d^2z(t)}{dt^2} \right)}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\big(\vec{\sigma}(t)v(t)\big)}{dt} = \frac{d\vec{\sigma}(t)}{dt}v(t) + \vec{\sigma}(t)\frac{dv(t)}{dt} = \frac{d\vec{\sigma}(s)}{ds}v^2(t) + \vec{\sigma}(t)\frac{dv(t)}{dt}$$

$$\frac{d\vec{\sigma}(t)}{dt} = \frac{d\vec{\sigma}(s)}{ds}\frac{ds(t)}{dt} = \frac{d\vec{\sigma}(s)}{ds}v(t)$$

Wzór Freneta[1]



$$\boxed{\frac{d\vec{\sigma}(s)}{ds} = \frac{\vec{n}}{R}}$$

$$\frac{ds}{R} = \alpha = \frac{d\sigma}{\sigma} = d\sigma \qquad (\sigma = 1)$$

$\vec{n}$ jednostkowy wektor normalny do toru

$$\boxed{\vec{a}(t) = \vec{n}(t)\frac{v^2(t)}{R(t)} + \vec{\sigma}(t)\frac{dv(t)}{dt} = \vec{a}_n(t) + \vec{a}_s(t)}$$

przyspieszenie ma składową normalna i styczna do toru

Przykład:
ruch po prostej

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + at \\ y(t) = y_0 + bt \\ z(t) = z_0 + ct \end{cases} \qquad \vec{a}(t) = 0$$

Przykład:
ruch po okręgu

$$\begin{cases} x(t) = R\sin(\omega t) \\ y(t) = R\cos(\omega t) \\ z(t) = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \vec{a}(t) = (-R\omega^2\sin(\omega t), -R\omega^2\cos(\omega t),,0) \\ a_n(t) = R\omega^2, \qquad a_s(t) = 0 \end{array}$$

[1] Jean Frédéric Frenet 1816-1900