

Rozpraszanie w przybliżeniu Borna

Rozkład na fale parcjalne jest efektywną metodą analizy procesów rozpraszania w obszarze niskich energii, gdy iloczyn wektora falowego rozproszonej cząstki i zasięgu oddziaływania jest dużo mniejszy od jedności. W obszarze wysokich energii zderzenia bardziej użyteczne jest przybliżenie Borna, którego omówienie zaczniemy od wyprowadzenia równania Lippmanna-Schwingera.

Równanie Lippmanna-Schwingera

Równania Schrödingera

$$\left(-\frac{\hbar^2 \Delta}{2m} + V(\mathbf{r}) \right) \varphi(\mathbf{r}) = E \varphi(\mathbf{r})$$

zapiszemy jako

$$(\Delta + k^2) \varphi(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}),$$

gdzie $k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ jest wektorem falowym, a $U(\mathbf{r}) \equiv \frac{2m}{\hbar^2} V(\mathbf{r})$.

Otrzymane równanie można potraktować jako niejednorodne równania $(\Delta + k^2) \varphi(\mathbf{r}) = j(\mathbf{r})$, gdzie $\varphi(\mathbf{r})$ jest poszukiwaną funkcją, a $j(\mathbf{r})$ funkcją znaną. Łatwo sprawdzić, że rozwiązanie takiego równania możemy zapisać jako

$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi_0(\mathbf{r}) + \int d^3 r' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') j(\mathbf{r}'),$$

gdzie $\varphi_0(\mathbf{r})$ jest ogólnym rozwiązaniem równania jednorodnego

$$(\Delta + k^2) \varphi_0(\mathbf{r}) = 0,$$

zaś $G(\mathbf{r})$ jest tzw. funkcją Greena spełniającą równanie

$$(\Delta + k^2) G(\mathbf{r}) = \delta^{(3)}(\mathbf{r}).$$

Równanie Lippmanna-Schwingera otrzymujemy zastępując $j(\mathbf{r})$ przez $U(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r})$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi_0(\mathbf{r}) + \int d^3 r' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') U(\mathbf{r}') \varphi(\mathbf{r}').$$

Równanie Lippmanna-Schwingera jest równaniem całkowym równoważnym różniczkowemu równaniu Schrödingera. Aby równanie Lippmanna-Schwingera stało się użyteczne musimy wyznaczyć funkcję Greena.

Funkcja Greena

Funkcję Greena znajdujemy z pomocą transformacji Fouriera. Transformatą Fouriera funkcji $f(\mathbf{r})$ nazywamy funkcję

$$f(\mathbf{p}) \equiv \int d^3 r e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r}} f(\mathbf{r}).$$

Transformacja odwrotna ma postać

$$f(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} f(\mathbf{p}).$$

Zakładamy oczywiście, że odpowiednie całki istnieją.

Działając operatorem $(\Delta + k^2)$ na funkcję Greena w postaci

$$G(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} G(\mathbf{p}),$$

i zauważając, że transformatą Fouriera funkcji $\delta^{(3)}(\mathbf{r})$ jest jedność, dostajemy równanie

$$\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} [(-p^2 + k^2)G(\mathbf{p}) - 1] = 0.$$

Ponieważ równanie to ma być spełnione dla wszystkich \mathbf{r} , otrzymujemy algebraiczne równanie na transformatę Fouriera funkcji Greena

$$(-p^2 + k^2)G(\mathbf{p}) = 1,$$

które natychmiast rozwiązujemy dostając

$$G(\mathbf{p}) = \frac{1}{k^2 - p^2}.$$

Wyrażenie to wymaga dookreślenia dla $p^2 = k^2$, co zrobimy później.

Aby znaleźć $G(\mathbf{r})$, należy wyliczyć całkę

$$G(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}}{k^2 - p^2}.$$

Rachunek wykonujemy we współrzędnych sferycznych z osią z wybraną wzdłuż wektora \mathbf{r} . Mamy więc

$$G(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 d(\cos\theta) \int_0^\infty dp p^2 \frac{e^{ipr\cos\theta}}{k^2 - p^2} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-1}^1 d(\cos\theta) \int_0^\infty dp p^2 \frac{e^{ipr\cos\theta}}{k^2 - p^2}.$$

Wykład XIX cd.

Mechanika kwantowa

Ponieważ

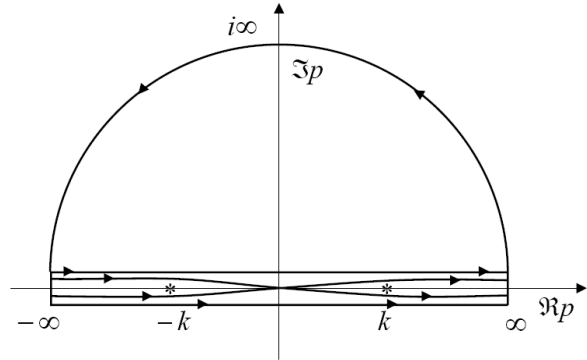
$$\int_{-1}^1 d(\cos \theta) e^{ipr \cos \theta} = \frac{e^{ipr} - e^{-ipr}}{ipr},$$

dostajemy

$$G(\mathbf{r}) = \frac{i}{(2\pi)^2 r} \int_0^\infty \frac{dp p}{p^2 - k^2} (e^{ipr} - e^{-ipr}).$$

Zauważając, że

$$\int_0^\infty \frac{dp p}{k^2 - p^2} e^{-ipr} = - \int_{-\infty}^0 \frac{dp p}{k^2 - p^2} e^{ipr},$$



co sprawdzamy zamieniając $p \rightarrow -p$, otrzymujemy

$$G(\mathbf{r}) = \frac{i}{(2\pi)^2 r} \int_{-\infty}^\infty \frac{dp p}{p^2 - k^2} e^{ipr} = \frac{i}{(2\pi)^2 r} \int_{-\infty}^\infty \frac{dp p e^{ipr}}{(p-k)(p+k)}.$$

Całkę obliczymy jako całkę po konturze zamkniętej w przestrzeni zespolonego p . Całkowanie od $-\infty$ do ∞ uzupełniamy całkowaniem po wielkim półokręgu pokazanym na rysunku. Ze względu na obecność czynnika e^{ipr} , w którym $r > 0$, całka po tym półokręgu znika.

Funkcja podcałkowa ma dwa bieguny w $p = \pm k$, które wypadają na drodze całkowania. Całka więc nie jest dobrze określona. Dookreślenie polega na podaniu sposobu omijania biegunów. Mamy cztery możliwości:

- 1) droga całkowania przebiega nad biegunami $p = \pm k$;
- 2) droga całkowania przebiega nad biegunem $p = -k$ i pod biegunem $p = k$;
- 3) droga całkowania przebiega pod biegunem $p = -k$ i nad biegunem $p = k$;
- 4) droga całkowania przebiega pod biegunami $p = \pm k$.

Tym czterem sposobom omijania biegunów odpowiadają cztery różne wyniki całkowania

$$G(\mathbf{r}) = \frac{i}{(2\pi)^2 r} \int_C \frac{dp p e^{ipr}}{(p-k)(p+k)} = \begin{cases} 0 & \text{dla } C_1, \\ -\frac{e^{-ikr}}{4\pi r} & \text{dla } C_2, \\ -\frac{e^{ikr}}{4\pi r} & \text{dla } C_3, \\ -\frac{e^{-ikr} + e^{ikr}}{4\pi r} & \text{dla } C_4. \end{cases}$$

Wykład XIX cd.

Mechanika kwantowa

Widzimy, że przy całkowaniu po konturze C_2 mamy do czynienia z falą kulistą schodzącą się do punktu $\mathbf{r} = 0$; kontur C_3 daje falą kulistą rozchodzącą się z punktu $\mathbf{r} = 0$; wreszcie wybór konturu C_4 prowadzi do złożenia fal schodzącej się i rozchodzącej. Analiza problemu rozpraszania wymaga wybrania funkcji Greena w postaci fali rozchodzącej się z punktu $\mathbf{r} = 0$, co daje

$$G(\mathbf{r}) = -\frac{e^{ikr}}{4\pi r}$$

Równanie Lippmanna-Schwingera otrzymuje więc postać

$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi_0(\mathbf{r}) - \frac{1}{4\pi} \int d^3 r' \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} U(\mathbf{r}') \varphi(\mathbf{r}')$$

Jak pamiętamy, w problemie rozpraszania interesujemy się funkcją falową na dużych odległościach od centrum rozpraszania. Przyjmując, że potencjał oddziaływania ma skończony zasięg tzn. $U(\mathbf{r}) = 0$, gdy $|\mathbf{r}| > d$, gdzie d jest zasięgiem oddziaływania. Poszukujemy więc przybliżonej postaci równania Lippmanna-Schwingera dla $|\mathbf{r}| \gg d$.

Ponieważ funkcja podcałkowa jest niezerowa tylko dla $|\mathbf{r}'| < d$, przybliżamy $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$, żądając, aby $r \gg r'$. Tak znajdujemy

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = \sqrt{r^2 - 2rr'\cos\theta + r'^2} \approx r \sqrt{1 - \frac{2r'}{r}\cos\theta} \approx r \left(1 - \frac{r'}{r}\cos\theta\right) = r - r'\cos\theta,$$

gdzie θ jest kątem między wektorami \mathbf{r} i \mathbf{r}' . Podstawiając przybliżone wyrażenie do równania Lippmanna-Schwingera otrzymujemy

$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi_0(\mathbf{r}) - \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \int d^3 r' e^{-ikr'\cos\theta} U(\mathbf{r}') \varphi(\mathbf{r}'),$$

gdzie $1/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ zostało przybliżone jako $1/r$. Ponieważ θ jest kątem między wektorami \mathbf{r} i \mathbf{r}' , iloczyn $kr'\cos\theta$ możemy zapisać jako $k\mathbf{n}\mathbf{r}'$ z jednostkowym wektorem $\mathbf{n} \equiv \frac{\mathbf{r}}{r}$. Definiując wektor $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$, określający kierunek, w którym porusza się rozpraszona cząstka, równanie Lippmanna-Schwingera ma postać

$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi_0(\mathbf{r}) - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3 r' e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}'} V(\mathbf{r}') \varphi(\mathbf{r}'),$$

gdzie wróciliśmy do potencjału $V(\mathbf{r})$.

Przybliżenie Borna

Rozwiązanie równania jednorodnego, będącego swobodnym równaniem Schrödingera wybieramy w postaci fali padającej (z pominiętym czynnikiem normalizacyjnym) tzn.

$$\varphi_0(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}_0\mathbf{r}},$$

gdzie wektor falowy $\mathbf{k}_0 = (0,0,k)$, tzn. fala padająca porusza się wzdłuż osi z . Rozpraszanie ma charakter elastyczny, więc długość pędu zderzających się cząstek w ich układzie środka masy nie ulega zmianie. Dlatego $|\mathbf{k}_0| = |\mathbf{k}| = k$.

Przybliżenie Borna polega na zastąpieniu funkcji $\varphi(\mathbf{r})$ przez $\varphi_0(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}_0\mathbf{r}}$ pod całką w równaniu Lippmanna-Schwingera. Zakładamy bowiem, że funkcja falowa jest zdominowana przez falę padającą, a proces rozproszenia wprowadza jedynie nieznaczące zaburzenie. Tak więc dostajemy

$$\varphi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}_0\mathbf{r}} - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{r} \int d^3r' e^{i(\mathbf{k}_0-\mathbf{k})\mathbf{r}'} V(\mathbf{r}') .$$

Porównując to wyrażenie z oczekiwaną postacią asymptotyczną funkcji falowej w problemie rozpraszania tzn.

$$\varphi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}z} + f(\theta) \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{r},$$

znajdujemy amplitudę rozpraszania w przybliżeniu Borna jako

$$f(\theta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3r e^{i(\mathbf{k}_0-\mathbf{k})\mathbf{r}} V(\mathbf{r}),$$

gdzie kąt rozproszenia θ jest kątem między wektorami \mathbf{k}_0 i \mathbf{k} . Wprowadźmy wektor $\mathbf{q} \equiv \mathbf{k}_0 - \mathbf{k}$, który pomnożony przez \hbar jest przekazem pędu w zderzeniu. Długość wektora \mathbf{q} wyraża się przez kąt rozproszenia θ w następujący sposób

$$q \equiv |\mathbf{k} - \mathbf{k}_0| = \sqrt{k^2 - 2k^2 \cos\theta + k^2} = k\sqrt{2(1 - \cos\theta)} = 2k\sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{2}} = 2k \sin\frac{\theta}{2}.$$

Wzór na amplitudę w przybliżeniu Borna przyjmuje ostateczną postać

$$f(\theta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3r e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} V(\mathbf{r})$$

czyli amplituda rozpraszania jest proporcjonalna do transformaty Fouriera potencjału.

Rozpraszanie w potencjale Yukawy

Jako zastosowanie przybliżenia Borna rozważymy rozpraszanie w potencjale Yukawy danym wzorem

$$V(\mathbf{r}) = \frac{\alpha}{r} e^{-\mu r},$$

gdzie α i μ są stałymi, przy czym α jest dowolnego znaku zaś stała μ jest dodatnia; $1/\mu$ może być traktowane jako zasięg oddziaływania. Potencjał Yukawy pojawia się przy opisie oddziaływań jądrowych, a także wtedy, gdy mamy ekranowane oddziaływanie coulombowskie; $1/\mu$ ma wówczas interpretację długości ekranowania. Zauważmy, że w granicy $\mu \rightarrow 0$, potencjał Yukawy staje się potencjałem coulombowskim, a α jest (w układzie CGS) iloczynem ładunków oddziałujących cząstek.

Podstawiając potencjał Yukawy do wzoru na amplitudę mamy

$$f(\theta) = -\frac{m\alpha}{2\pi\hbar^2} \int d^3r \frac{e^{i\mathbf{q}\mathbf{r} - \mu r}}{r}.$$

Całkowanie wykonujemy we współrzędnych sferycznych, w których oś z pokrywa się z wektorem \mathbf{q} . Po wykonaniu trywialnego całkowania po kącie azymutalnym dostajemy

$$f(\theta) = -\frac{m\alpha}{\hbar^2} \int_{-1}^1 d(\cos\vartheta) \int_0^\infty dr r e^{iqr \cos\vartheta - \mu r},$$

gdzie ϑ jest kątem między wektorami \mathbf{q} i \mathbf{r} . Całka kątowna jest elementarna

$$\int_{-1}^1 d(\cos\vartheta) e^{iqr \cos\vartheta} = \frac{e^{iqr} - e^{-iqr}}{iqr} = \frac{2}{qr} \sin(qr),$$

co daje

$$f(\theta) = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2 q} \underbrace{\int_0^\infty dr e^{-\mu r} \sin(qr)}_{=\frac{q}{q^2 + \mu^2}} = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2} \frac{1}{q^2 + \mu^2}.$$

Różniczkowy przekrój czynny wynosi

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 = \frac{4m^2\alpha^2}{\hbar^4} \frac{1}{(4k^2 \sin^2(\theta/2) + \mu^2)^2}.$$

Jak widzimy przekrój czynny ma maksimum dla zerowego kąta rozpraszania $\theta = 0$ i minimum dla $\theta = \pi$.

Wykład XIX cd.

Mechanika kwantowa

Aby znaleźć całkowity przekrój czynny, q^2 zapisujemy jako $2k^2(1 - \cos \theta)$. Po wykonaniu trywialnego całkowania po kącie azymutalnym dostajemy

$$\sigma = \frac{8\pi m^2 \alpha^2}{\hbar^4} \int_{-1}^1 \frac{d(\cos \theta)}{(2k^2(1 - \cos \theta) + \mu^2)^2}.$$

Całka jest w istocie elementarna, co łatwiej zauważyć wprowadzając $x \equiv \cos \theta$

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{(2k^2 + \mu^2 - 2k^2x)^2} = \frac{1}{2k^2} \frac{1}{2k^2 + \mu^2 - 2k^2x} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{2k^2} \left(\frac{1}{\mu^2} - \frac{1}{4k^2 + \mu^2} \right) = \frac{2}{\mu^2(4k^2 + \mu^2)}.$$

I tak całkowity przekrój czynny wynosi

$$\sigma = \frac{16\pi m^2 \alpha^2}{\hbar^4 \mu^2 (4k^2 + \mu^2)}.$$

Granica coulombowska

Potencjał Coulomba ma nieskończony zasięg więc przybliżenie Borna zdaje się nie mieć tutaj zastosowania. Jak już jednak wspomnieliśmy, potencjał Yukawy staje się potencjałem coulombowskim w granicy $\mu \rightarrow 0$. Jeśli przejść z μ do zera w różniczkowym przekroju czynnym otrzymujemy

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4m^2 \alpha^2}{\hbar^4} \frac{1}{q^4} = \frac{m^2 \alpha^2}{4\hbar^4} \frac{1}{k^4 \sin^4(\theta/2)} = \frac{\alpha^2}{16} \frac{1}{E^2} \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}.$$

Pamiętając, że $k \equiv \sqrt{2mE}/\hbar$, ostatecznie znajdujemy

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{16} \frac{1}{E^2} \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}}$$

Uzyskany wynik zwany przekrojem czynnym Rutherforda jest ważny i niezwykle ciekawy. Zauważmy, że nie występuje w nim stała Plancka, co w pewnej mierze wyjaśnia, że pokrywa się on z przekrojem czynnym na oddziaływanie klasycznych cząstek naładowanych, wyprowadzonym po raz pierwszy przez Ernesta Rutherforda w 1909 roku. Zgodność tego przekroju czynnego z obserwowanym rozkładem kąta rozpraszania cząstek alfa przechodzących przez złotą folię doprowadziło do sformułowania planetarnego modelu atomu.

Kolejną osobliwością coulombowskiego przekroju czynnego otrzymanego w przybliżeniu Borna jest jego całkowita zgodność nie tylko z klasycznym przekrojem czynnym, ale i ze ścisłym wynikiem kwantowym. Innymi słowy klasyczny przekrój czynny, kwantowy przekrój czynny i przekrój czynny otrzymany w przybliżeniu Borna są identyczne.

Wykład XIX cd.

Mechanika kwantowa

Wykonując przejście graniczne $\mu \rightarrow 0$ w różniczkowym przekroju czynnym Yukawy otrzymaliśmy przekrój czynny Rutherforda. Jeśli natomiast przejdziemy z μ do zera w całkowitym przekroju czynnym Yukawy, dostajemy nieskończony przekrój czynny. Podobny wynik uzyskamy całkując po kącie θ różniczkowy przekroju czynny Rutherforda. Przekrój ten bowiem jest rozbieżny gdy $\theta \rightarrow 0$ jak θ^{-4} . Po uwzględnieniu $\sin \theta$ z elementu kąta bryłowego, całka w obszarze małych kątów zachowuje się jak

$$\int_{\theta_{\min}} \frac{d\theta}{\theta^3} \sim \frac{1}{\theta_{\min}^2} \xrightarrow{\theta_{\min} \rightarrow 0} \infty.$$

Nieskończoność całkowitego przekroju czynnego wiąże się ze wspomnianym już nieskończonym zasięgiem potencjału Coulomba – nawet cząstki zderzające się z nieskończenie dużym parametrem zderzenia ulegają rozproszeniu choć na nieskończenie mały kąt θ .

Stosowność przybliżenia Borna

Przybliżenie Borna polega na zastąpieniu funkcji falowej funkcją fali padającej w wraźniu całkowym reprezentującym fale rozproszone w równaniu Lippmanna-Schwingera. Przybliżenie ma więc zastosowanie, jeśli moduł fali rozproszonej jest dużo mniejszy niż moduł fali padającej. Prowadzi to do warunku

$$\left| \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3r' \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} V(\mathbf{r}') e^{ik_0\mathbf{r}'} \right| \ll 1.$$

Ponieważ spodziewamy się, że fala rozproszona jest największa w punkcie, gdzie znajduje się centrum rozpraszania, powyższy warunek sprawdzamy dla $\mathbf{r} = 0$. Zamieniając $\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}$, dostajemy

$$\left| \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3r \frac{e^{ikr}}{r} V(\mathbf{r}) e^{ik_0\mathbf{r}} \right| \ll 1.$$

Dalej zakładamy, że potencjał jest sferycznie symetryczny tj. $V(\mathbf{r}) = V(r)$ i wprowadzamy zmienne sferyczne z osią z wzdłuż wektora $\mathbf{k}_0 = (0,0,k)$. Po wykonaniu trywialnej całki po kącie azymutalnym znajdujemy

$$\left| \frac{m}{\hbar^2} \int_0^\infty dr r e^{ikr} V(r) \int_{-1}^1 d(\cos\theta) e^{ikr \cos\theta} \right| \ll 1.$$

Wykład XIX cd.

Mechanika kwantowa

Obliczywszy całkę $\int_{-1}^1 d(\cos \theta) e^{ikr \cos \theta} = (e^{ikr} - e^{-ikr})/ikr$, otrzymujemy

$$\left| \frac{m}{\hbar^2 k} \int_0^\infty dr (e^{2ikr} - 1) V(r) \right| \ll 1.$$

Rozważamy teraz oddzielnie granicę niskoenergetyczną $kd \ll 1$ i wysokoenergetyczną $kd \gg 1$, gdzie d jest zasięgiem potencjału. W pierwszym przypadku $e^{2ikr} - 1$ przybliżamy jako $2ikr$, w drugim jako -1 , gdyż czynnik e^{2ikr} szybko oscyluje i odpowiedni człon nie daje wkładu do całki. Tak zatem znajdujemy

$$1 \gg \left| \frac{m}{\hbar^2 k} \int_0^\infty dr (e^{2ikr} - 1) V(r) \right| \approx \begin{cases} \left| \frac{2m}{\hbar^2} \int_0^\infty dr r V(r) \right| & \text{dla } kd \ll 1, \\ \left| \frac{m}{\hbar^2 k} \int_0^\infty dr V(r) \right| & \text{dla } kd \gg 1. \end{cases}$$

Oszacowując wartości całek jako

$$\int_0^\infty dr r V(r) = d^2 V_0, \quad \int_0^\infty dr V(r) = d V_0,$$

gdzie V_0 jest charakterystyczną wartością potencjału, ostatecznie znajdujemy

$$\begin{cases} \frac{md^2}{\hbar^2} |V_0| \ll 1 & \text{dla } kd \ll 1, \\ \frac{md}{\hbar^2 k} |V_0| \ll 1 & \text{dla } kd \gg 1. \end{cases}$$

Sprawdźmy, co powyższe warunki oznaczają dla potencjału Yukway $V(r) = \alpha e^{-\mu r} / r$, gdzie zakładamy, że $\alpha > 0$. Jak już wspomnieliśmy, zasięg potencjału Yukway przyjmuje się jako $d = 1/\mu$. Określamy V_0 jako $V(r = 1/\mu) = \alpha \mu$. Warunek stosowalności przybliżenia Borna w granicy niskoenergetycznej i wysokoenergetycznej przybiera, odpowiednio, postać

$$\begin{cases} \frac{\alpha m}{\hbar^2 \mu} \ll 1 & \text{dla } \frac{k}{\mu} \ll 1, \\ \frac{\alpha m}{\hbar^2 k} \ll 1 & \text{dla } \frac{k}{\mu} \gg 1. \end{cases}$$

Widzimy, że w wypadku granicy wysokoenergetycznej zawsze istnieje odpowiednio duża wartość wektora falowego, aby przybliżenie Borna miało zastosowanie.