Magnetostatyka w ośrodku

Omawiając magnetostatyką zakładaliśmy dotychczas, że prądy i pola magnetyczne występują w próżni lub, co na jedno wychodzi, że materialny ośrodek, który jest obecny, nie ma wpływu na opisywane zjawiska. Teraz rozważymy rolę ośrodka.

Magnetyzacja ośrodka

Jak pamiętamy, elektrostatyka w ośrodku tym różni się od elektrostatyki w próżni, że ośrodek pod działaniem zewnętrznego pola elektrycznego polaryzuje się tzn. pojawia się indukowany moment dipolowy cząsteczek lub atomów tworzących ośrodek, który z kolei modyfikuje pole elektryczne. W przypadku magnetostatyki sprawy mają się podobnie – zewnętrzne pole magnetyczne indukuje makroskopowy moment dipolowy, lecz nie elektryczny, a magnetyczny.

Wyobraźmy sobie, że mamy prąd $\vec{j}(\vec{r})$, który będziemy określać jako zewnętrzny (zewnętrzny wobec ośrodka), generujący potencjał wektorowy znany z dwóch poprzednich wykładów

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int d^3r' \, \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}. \tag{1}$$

Rzecz się dzieje w ośrodku, więc pole magnetyczne odpowiadające potencjałowi (1) indukuje gęstość magnetycznego momentu dipolowego $\vec{M}(\vec{r})$, która, jak wyjaśniono w poprzednim wykładzie, również wytwarza pole magnetyczne. Całkowity potencjał wektorowy wynosi więc

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int d^3r' \, \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + \int d^3r' \, \frac{\vec{M}(\vec{r}\,')\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}. \tag{2}$$

W kontekście magnetostatyki w ośrodku wielkość $\vec{M}(\vec{r})$ nazywa się zwykle wektorem magnetyzacji.

Pamiętany z Wykładu IV wzór

$$\nabla' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}, \tag{3}$$

wstawiamy teraz do drugiego członu w równaniu (2) i wykonujemy całkowanie przez części, przeprowadzając tę operację w notacji wskaźnikowej. Uwzględniając, że $\vec{M}(\vec{r})$ znika w nieskończoności, wyraz brzegowy znika, a formuła (2) po połączeniu dwóch całek w jedną przybiera postać

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int d^3r' \, \frac{\vec{j}(\vec{r}\,') + c\nabla'\times\vec{M}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}. \tag{4}$$

Równania magnetostatyki w ośrodku

Wyrażenie (4) pokazuje, że rotacja gęstości magnetycznego momentu dipolowego pomnożona przez c gra taką rolę jak prąd. Tak zatem prawo Ampère'a w różniczkowej postaci, omówione w Wykładzie V, modyfikujemy następująco

$$\nabla\times\vec{B}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c}\Big(\vec{j}(\vec{r}) + c\nabla\times\vec{M}(\vec{r})\Big). \tag{5}$$

Przenosząc człon zawierający $\nabla\times\vec{M}(\vec{r})$ na lewą stronę równania (6), otrzymujemy

$$\nabla\times\vec{H}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c}\,\vec{j}(\vec{r}), \tag{6}$$

gdzie wektor

$$\vec{H}(\vec{r}) \equiv \vec{B}(\vec{r}) - 4\pi\,\vec{M}(\vec{r}) \tag{7}$$

jest nazywany polem magnetycznym, zaś wektor $\vec{B}$ indukcją magnetyczną. Dopóki zajmowaliśmy się magnetostatyką w próżni nie było potrzeby rozróżniać pól $\vec{B}$ i $\vec{H}$, natomiast w ośrodku jest to kluczowo ważne. Z podobną sytuacją spotkaliśmy się już omawiając elektrostatykę w ośrodku, gdzie mieliśmy do czynienia z polami $\vec{E}$ i $\vec{D}$. Zwróćmy uwagę, że faktycznym fizycznym polem magnetycznym jest pole $\vec{B}$, tak jak faktycznym fizycznym polem elektrycznym jest pole $\vec{E}$. Pola $\vec{H}$ i $\vec{D}$ są jedynie wielkościami pomocniczymi. Niestety ukształtowana historycznie terminologia wprowadza pewne zamieszanie, gdyż indukcja elektryczna jest tym pomocniczym polem, a indukcja magnetyczna polem fizycznym.

Fakt, że pole indukcji magnetycznej w ośrodku jest sumą pola zewnętrznego i pola wytwarzanego przez indukowany moment dipolowy, nie zmienia natury tego pola i pozostaje ono bezźródłowe. Innymi słowy, pole $\vec{B}$ nadal jest rotacją potencjału wektorowego, a zatem

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0, \tag{8}$$

bo, jak pamiętamy z Wykładu V, dywergencja rotacji znika.

Równania elektrostatyki w próżni tworzą układ

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{B}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c}\,\vec{j}(\vec{r}), \\ \nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0, \end{cases} \tag{9}$$

w ośrodku zaś mamy

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c}\,\vec{j}(\vec{r}), \\ \nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Do równania określającego pole magnetyczne $\vec{H}(\vec{r})$ wchodzi jedynie gęstość prądu zewnętrznego. Nie oznacza to jednak, że przy tym samym rozkładzie ładunku $\vec{j}(\vec{r})$ pole $\vec{H}(\vec{r})$ w ośrodku będzie zawsze takie samo jako pole $\vec{B}(\vec{r})$ w próżni. Inne są bowiem warunki brzegowe.

Związki materiałowe

Aby rozwiązać równania (10), należy określić relacje pomiędzy polami $\vec{H}(\vec{r})$ i $\vec{B}(\vec{r})$ lub $\vec{H}(\vec{r})$ i $\vec{M}(\vec{r})$, czyli wprowadzić związek materiałowy. Wybiera się go nieraz w postaci

$$\vec{M}(\vec{r}) = \chi_m \vec{H}(\vec{r}), \tag{11}$$

gdzie wielkość χ_m nazywana jest podatnością magnetyczną ośrodka. Jak już wspominaliśmy w kontekście elektrycznych własności materiałów, związek (11) jest po pierwsze izotropowy tzn. kierunek wektora magnetyzacji $\vec{M}(\vec{r})$ jest zgodny z kierunkiem wektora $\vec{H}(\vec{r})$. Związek ten jest również liniowy, czyli długość wektora $\vec{M}(\vec{r})$ jest proporcjonalna do długości wektora $\vec{H}(\vec{r})$. Związek (11) jest w końcu niedyspersyjny – nie zależy od zmienności pola $\vec{H}(\vec{r})$ w przestrzeni. Wszystkie te własności mają zwykle charakter przybliżony. Izotropowość nie zachodzi dla kryształów, w których mamy wyróżnione kierunki. Proporcjonalność $\vec{M}(\vec{r})$ i $\vec{H}(\vec{r})$ załamuje się zwykle w przypadku dostatecznie silnego pola $\vec{H}(\vec{r})$. Jeśli zewnętrzne pole ulega zmianom na małych długościach, relacja dana równaniem (11) również przestaje obowiązywać.

Podstawiające związek (11) do równania (7), otrzymujemy

$$\vec{B}(\vec{r}) = \mu\,\vec{H}(\vec{r}), \tag{12}$$

gdzie

$$\mu \equiv 1 + 4\pi\, \chi_m \tag{13}$$

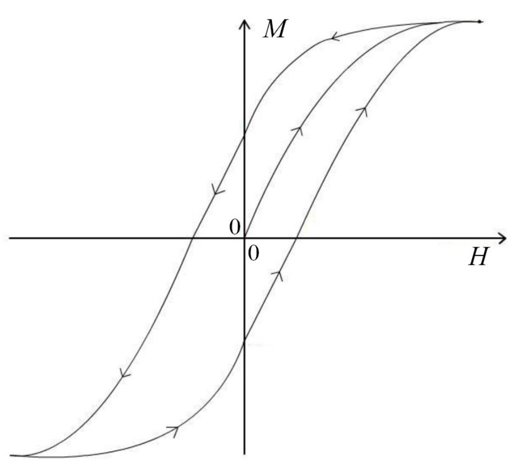
jest przenikalnością magnetyczna ośrodka. Stosując układ jednostek SI mówimy wtedy o względnej przenikalności magnetycznej, gdyż przenikalność próżni w tym układzie, w przeciwieństwie do układu CGS, jest różna od jedności.

Magnetyczne własności materiałów ujawniają duże zróżnicowanie, większe niż własności elektryczne. Podatność elektryczna jest zwykle dodatnia, to znaczy indukowany elektryczny moment dipolowy $\vec{P}$ jest zgodny z kierunkiem pola elektrycznego $\vec{E}$, a przenikalność elektryczna $\epsilon \geqslant 1$. Podatność magnetyczna natomiast może być dodatnia lub ujemna $\chi_m \lesseqgtr 0$, a przenikalność magnetyczna $\mu \lesseqgtr 1$.

Materiały, których $\chi_m < 0$, a przenikalność magnetyczna $\mu < 1$, nazywa się diamagnetykami, Są one tym podobne do dielektryków, że osłabiają przyłożone pole $\vec{H}$ i faktyczne pole $\vec{B} < \vec{H}$. W przypadku paramagnetyków mamy $\chi_m > 0$, a przenikalność magnetyczna $\mu > 1$. Następuje więc wzmocnienie przyłożonego pola.

Dipolowy momenty magnetyczny diamagnetyka jest przeciwnie skierowany do wywołującego go pola magnetycznego, więc, jak wyjaśniliśmy w poprzednim wykładzie, materiał taki jest wypychany ku spadającym wartościom pola magnetycznego. W ten sposób zjawisko diamagnetyzmu zostało odkryte. Moment magnetyczny paramagnetyka natomiast jest skierowany zgodnie z wywołującym go polem magnetyczne, więc materiał taki jest wciągany w kierunku rosnących wartości pola magnetycznego.

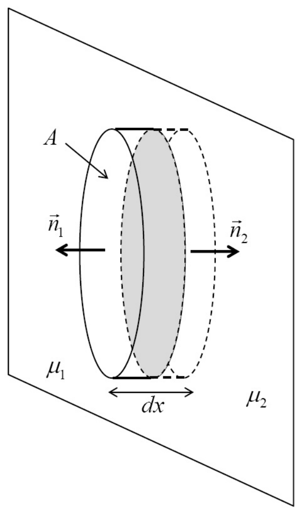
Jak pamiętamy z poprzedniego wykładu, występowanie momentu pędu cząstek naładowanych powoduje pojawienie się momentu magnetycznego. Dzięki temu właśnie występuje moment magnetyczny atomów i molekuł, do którego główny wkład wnoszą elektrony, jako najlżejsze cząstki. Mamy dwa rodzaje momentu pędu: orbitalny i spinowy. Pierwszy prowadzi do diamagnetyzmu, drugi do paramagnetyzmu. Zwykle występują oba efekty jednocześnie, a ten, który dominuje, określa właściwości materiału. Typowe wartości χ_m są małe, rzędu $\pm 10^{-3}$, więc μ, w odróżnieniu od ϵ, bardzo nieznacznie różni się od jedności.



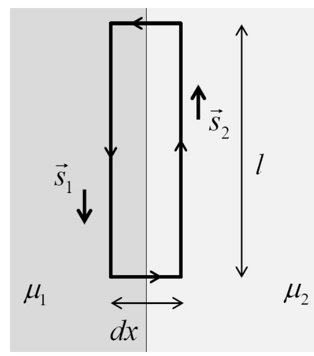
Rysunek 1: Pętla histerezy

Ważnym rodzajem materiału są ferromagnetyki wykazujące magnetyzację również w nieobecności zewnętrznego pola magnetycznego. Trzeba jednak podkreślić, że ferromagnetyki powyżej pewnej krytycznej temperatury, zwanej temperaturą Curie, stają się paramagnetykami. Związek materiałowy dla ferromagnetyków ma zupełnie inny charakter niż relacja (11). Magnetyzacja nie zależy wyłącznie od pola $\vec{H}$, lecz również od tego, jaka jest historii danej próbki, czyli występuje tutaj zjawisko histerezy.

Przykładową zależność M od H w postaci pętli histerezy ukazuje Rys. 1. Wyobraźmy sobie, że próbkę żelaza, która początkowo nie wykazuje magnetyzacji, poddajemy działaniu pola magnetycznego. Najpierw M rośnie liniowo z H, aż osiągamy stan nasycenia i dalsze zwiększanie H nie powoduje wzrostu M. Gdy zmniejszamy H, magnetyzacja spada, lecz pozostaje niezerowa nawet wtedy, gdy $H = 0$. Odwrócenie pola magnetyczne może doprowadzić magnetyzację do zera, a dalszemu wzrostowi odwróconego pola magnetycznego towarzyszy zwiększanie się odwróconej magnetyzacji aż do osiągnięcia nasycenia. Potem zwiększamy H i ostatecznie domykamy pętlę histerezy. Widzimy, że M nie jest funkcją H – jednej wartości H odpowiada więcej niż jedna wartość M.



Rysunek 2: Puszka o powierzchni denka A i infinitezymalnie małej wysokości dx, ustawiona na granicy dwóch ośrodków o przenikalnościach magnetycznych μ_1 po lewej stronie i μ_2 po prawej stronie.



Rysunek 3: Prostokątna pętla o długości l i infinizetymalnie małej szerokości dx, ustawiona na granicy dwóch ośrodków dielektrycznych o przenikalnościach magnetycznych μ_1 po lewej stronie i μ_2 po prawej stronie.

Wektor $\vec{B}$ na granicy ośrodków

Aby sformułować warunek jaki spełnia pole $\vec{B}(\vec{r})$ na granicy ośrodków, wykorzystamy twierdzenie Gaussa, które orzeka, że ze względu na bezźródłowość pola $\vec{B}$ strumień tego pola przez dowolną powierzchnię zamkniętą znika, czyli

$$\int_S d^2\vec{\sigma} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0, \tag{14}$$

gdzie S jest powierzchnią ograniczającą objętość V. Objętość V wybieramy jako puszkę pokazaną na Rys. 2, umieszczoną na granicy dwóch ośrodków o przenikalnościach magnetycznych μ_1 i μ_2 w taki sposób, że denka puszki są równoległe do powierzchni granicznej ośrodków. Długość puszki dx jest infinitezymalnie mała.

Obliczamy teraz strumień pola $\vec{B}(\vec{r})$ przez powierzchnię otaczającą puszkę, pomijając powierzchnię boczną ze względu na infinitezymalnie małą długość puszki. Rachunek sprowadza się do policzenia strumienia przez denka. Zakładamy przy tym, że rozmiary denek są tak małe, że pole $\vec{B}(\vec{r})$ na całej powierzchni A każdego z denek jest takie samo. Znajdujemy wtedy strumień

$$\int_S d^2\vec{\sigma} \cdot \vec{B} = A\,\vec{n}_1 \cdot \vec{B}_1 + A\,\vec{n}_2 \cdot \vec{B}_2 = A\,\vec{n}_1 \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0. \tag{15}$$

Ponieważ $\vec{n}_1 \cdot \vec{B}_1 = B_1^{\perp}$, gdzie $B_1^{\perp}$ jest składową pola $\vec{B}$ prostopadłą do powierzchni rozgraniczającej ośrodki, otrzymujemy warunek brzegowy

$$B_1^{\perp} = B_2^{\perp}. \tag{16}$$

A zatem *składowa indukcji magnetycznej prostopadła do granicy ośrodków jest ciągła.*

Wektor $\vec{H}$ na granicy ośrodków

Zgodnie z całkową postacią prawa Ampère'a

$$\int_C d\vec{l} \cdot \vec{H}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c} I_S, \tag{17}$$

gdzie I_s jest natężeniem prądu przepływającego przez powierzchnię ograniczoną pętlą C. Obliczamy więc krążenie pola magnetycznego wzdłuż prostokątnej pętli pokazanej na Rys. 3, umieszczonej na granicy dwóch ośrodków o przenikalnościach magnetycznych μ_1 i μ_2. Odcinki pętli równoległe do granicy ośrodków mają długość l, a długość odcinków prostopadłych jest infinitezymalnie mała i wynosi dx. Zakładamy, że długość l jest na tyle mała, że pole $\vec{H}(\vec{r})$ nie zmienia się istotnie, gdy posuwamy się wzdłuż boku pętli, który jest równoległy do granicy ośrodków.

Pomijając wkład do krążenia od infinitezymalnie małych odcinków pętli prostopadłych do granicy ośrodków, znajdujemy

$$\int_C d\vec{l} \cdot \vec{H} = l\vec{s}_1 \cdot \vec{H}_1 + l\vec{s}_2 \cdot \vec{H}_2 = l\vec{s}_1 \cdot (\vec{H}_1 - \vec{H}_2), \tag{18}$$

gdzie wielkości z indeksem 1 odnoszą się do ośrodka po lewej stronie, a z indeksem 2 do ośrodka po prawej stronie. W równaniu (18) uwzględniliśmy, że $\vec{s}_1 = -\vec{s}_2$. Ponieważ $\vec{s}_1$ jest wektorem jednostkowym, więc zachodzi równość $\vec{s}_1 \cdot \vec{H}_1 = H_1^{\parallel}$, w której $H_1^{\parallel}$ jest składową pola magnetycznego w ośrodku 1 równoległą do granicznej powierzchni między ośrodkami. A zatem

$$\int_C d\vec{l} \cdot \vec{H} = l(H_1^{\parallel} - H_2^{\parallel}) \tag{19}$$

i otrzymujemy warunek brzegowy

$$H_1^{\parallel} - H_2^{\parallel} = \frac{4\pi}{c} K, \tag{20}$$

gdzie $K = I_s/l$ jest natężeniem prądu powierzchniowego płynącego na granicy ośrodków. Warunek (20) mówi, że *składowa pola magnetycznego równoległa do granicy ośrodków jest ciągła, o ile nie występuje prąd powierzchniowy. W obecności tego prądu składowa pola $\vec{H}$ równoległa do granicy ośrodków doznaje skoku.* Zwróćmy uwagę, że pole $\vec{H}$ ma dwie składowe równoległe do granicy, gdyż ta jest powierzchnią.

Prostoliniowy przewodnik

Jako prostą ilustrację powyższych rozważań, wyliczymy pola $\vec{H}(\vec{r})$ i $\vec{B}(\vec{r})$, pochodzące od nieskończenie cienkiego, nieskończonego, prostoliniowego przewodnika, w którym płynie prąd o natężeniu I. Przewód jest umieszczony koncentrycznie w walcu o promieniu R, wykonanym z materiału o przenikliwości magnetycznej μ. Poza walcem rozciąga się próżnia.

Ze względu na symetrię cylindryczną problemu linie pola $\vec{H}(\vec{r})$ i $\vec{B}(\vec{r})$ są równoległe do powierzchni oddzielającej ośrodek o przenikliwości μ od próżni. Nie występuje więc składowa pól prostopadła do powierzchni rozgraniczającej ośrodki, mamy tylko składową równoległą. Na granicy ośrodków nie płynie zewnętrzny prąd powierzchniowy, więc zgodnie z warunkiem (20) pole $\vec{H}(\vec{r})$ jest ciągłe i dane jest wyrażeniem dla $\vec{B}(\vec{r})$ w próżni znanym z Wykładu V, a mianowicie

$$H(r) = \frac{2I}{c\,r}. \tag{21}$$

Indukcja magnetyczna zaś otrzymana z pomocą relacji (12) wynosi

$$B(r) = \frac{2I}{c\,r} \begin{cases} \mu, & r \leqslant R, \\ 1 & r > R. \end{cases} \tag{22}$$

Widzimy, że indukcja magnetyczna doświadcza skoku na granicy ośrodków, co wiąże się z indukowaniem tam prądu powierzchniowego o natężeniu $I(1-\mu)$. Kierunek tego prądu zależy od znaku $(1-\mu)$.