

## Magnetostatyka II

Wykład ten poświęcony jest trzem zagadnieniom. Rozważymy zrazu potencjał wektorowy pola magnetycznego i pewną jego nieokreśloność zwaną swobodą wyboru cechowania. Następnie przeanalizujemy pole magnetyczne pochodzące od zlokalizowanego rozkładu prądu, koncentrując się na magnetycznym momencie dipolowym. W końcu zajmiemy się siłami działającymi w obecności pola magnetycznego.

Podobnie jak w poprzednim wykładzie, wektor  $\vec{B}(\vec{r})$  będziemy zwykle nazywać polem magnetycznym, choć ściśle rzecz biorąc powinniśmy używać terminu indukcja magnetyczna. Rozróżnienie tych dwóch wielkości staje się istotne, gdy mamy do czynienia z magnetostatyką w ośrodku, którą zajmiemy się w następnym wykładzie.

### Potencjał wektorowy

Jak pamiętamy z poprzedniego wykładu, pole magnetyczne pochodzące od dowolnego rozkładu prądu  $\vec{j}(\vec{r})$  można wyrazić jako

$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}), \quad (1)$$

gdzie potencjał wektorowy  $\vec{A}(\vec{r})$  wynosi

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (2)$$

Przedstawienie pola magnetycznego jako rotacji potencjału wektorowego gwarantuje automatyczne spełnienie jednego z dwóch równań magnetostatyki tj.

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0, \quad (3)$$

które mówi o bezźródłowym charakterze pola  $\vec{B}$ .

Aby drugie równanie magnetostatyki, czyli prawo Ampère'a

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}), \quad (4)$$

wyrazić przez potencjał wektorowy, należy podstawić wyrażenie (1) do lewej strony równania (4). Trzeba więc obliczyć wektorową wielkość  $\nabla \times \nabla \times \vec{A}$ . Zrobimy to w notacji wskaźnikowej

$$(\nabla \times \nabla \times \vec{A})^i = \epsilon^{ijk} \partial^j \epsilon^{klm} \partial^l A^m = \epsilon^{ijk} \epsilon^{lmk} \partial^j \partial^l A^m. \quad (5)$$

Korzystając teraz z tożsamości

$$\epsilon^{ijk} \epsilon^{lmk} = \delta^{il} \delta^{jm} - \delta^{im} \delta^{jl}, \quad (6)$$

równanie (5) przepisujemy jako

$$(\nabla \times \nabla \times \vec{A})^i = (\delta^{il} \delta^{jm} - \delta^{im} \delta^{jl}) \partial^j \partial^l A^m = \partial^j \partial^i A^j - \partial^j \partial^j A^i = \partial^i \partial^j A^j - \partial^j \partial^j A^i, \quad (7)$$

co w notacji wektorowej można przedstawić następująco

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}. \quad (8)$$

Laplasjan  $\vec{A}$  jest, jak pokazuje ostatni człon prawej strony równania (7), wektorem, którego każda składowa jest laplasjanem odpowiedniej składowej  $\vec{A}$ .

Wykorzystując równanie (7), prawo Ampère'a (4) wyrażone przez potencjał wektorowy przybiera postać

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r})) - \Delta \vec{A}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}), \quad (9)$$

która jest magnetostatycznym odpowiednikiem elektrostatycznego równania Poissona na potencjał omówionego w Wykładzie II.

### Swoboda wyboru cechownia

Rozważając potencjał pola elektrostatycznego  $\Phi(\vec{r})$ , zwracaliśmy uwagę, że potencjał jest określony z dokładnością do stałej tzn. dodanie do potencjału  $\Phi(\vec{r})$  dowolnej stałej  $C$  nie zmienia pola elektrycznego odpowiadającego temu potencjałowi, gdyż  $\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla(\Phi(\vec{r}) + C) = -\nabla\Phi(\vec{r})$ .

W przypadku potencjału wektorowego  $\vec{A}(\vec{r})$  jego niedookreślenie, zwane swobodą wyboru cechowania, jest dalej idące. Pole magnetyczne nie ulegnie zmianie, jeśli do potencjału wektorowego  $\vec{A}(\vec{r})$  dodamy gradient dowolnej funkcji  $\Lambda(\vec{r})$ , czyli

$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times (\vec{A}(\vec{r}) + \nabla\Lambda(\vec{r})) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}) + \nabla \times \nabla\Lambda(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}), \quad (10)$$

ponieważ, jak wyjaśniliśmy w kontekście elektrostatyki, patrz Wykład II, rotacja gradientu dowolnej funkcji skalarnej znika.

Swoboda wyboru cechowania umożliwia nałożenie na potencjał wektorowy jakiegoś dodatkowego warunku – warunku cechowania, który pozwala uprościć analizę danego problemu. Dla przykładu, przyjmując tzw. warunek Coulomba

$$\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}) = 0, \quad (11)$$

równanie (9) upraszcza się do postaci

$$\Delta \vec{A}(\vec{r}) = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}). \quad (12)$$

Widzimy, że składowe potencjału wektorowego spełniają tak jak i potencjał skalarny  $\Phi(\vec{r})$  równanie Poissona, z tym że gęstość ładunku zastąpiona jest przez odpowiednią składową prądu.

Zachodzi pytanie jak sprawić, żeby potencjał wektorowy spełniał warunek cechowania, powiedzmy warunek Coulomba (11). Mamy potencjał  $\vec{A}(\vec{r})$ , a jego dywergencja wynosi  $C(\vec{r})$ , czyli

$$\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}) = C(\vec{r}), \quad (13)$$

a więc warunek Coulomba (11) nie zachodzi. Jeśli wprowadzimy nowy potencjał  $\vec{A}'(\vec{r})$ , taki że

$$\vec{A}'(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}) + \nabla\Lambda(\vec{r}), \quad (14)$$

gdzie funkcja  $\Lambda(\vec{r})$  spełnia równania

$$\Delta\Lambda(\vec{r}) = -C(\vec{r}), \quad (15)$$

wówczas

$$\nabla \cdot \vec{A}'(\vec{r}) = 0. \quad (16)$$

Zatem nowy potencjał czyni zadość warunkowi Coulomba.

Swoboda wyboru cechownia wydaje się jakąś ciekawostką bez większego znaczenia, a jak zrozumiano w drugiej połowie XX wieku jest jednym z najgłębszych praw fizyki. Elektrodynamika, w rozważanym przypadku mamy do czynienia z magnetostatyką, jest niezmiennicza lub wykazuje symetrię przy transformacjach cechowania

$$\vec{A}(\vec{r}) \longrightarrow \vec{A}'(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}) + \nabla\Lambda(\vec{r}). \quad (17)$$

Okazuje się, że dzięki twierdzeniu Noether prawo zachowania ładunku można traktować jako skutek tej symetrii. Ponadto niezmienniczość teorii przy transformacjach cechowania określa sposób w jaki ładunki, w szczególności elektrony, oddziałują z polem elektromagnetycznym.

Wszystkie oddziaływania występujące w mikroświecie, a więc siły słabe, elektromagnetyczne i silne, są opisywane przez teorie z symetrią cechowania, choć bardziej złożoną niż ta wyrażona równaniem (17). Również Ogólna Teoria Względności, czyli relatywistyczna teoria grawitacji ma podobny charakter, choć tutaj odpowiednikiem transformacji cechowania są transformacje między układami współrzędnych, które, oczywiście, nie mogą zmieniać praw fizyki. Zrozumienie kluczowej roli symetrii cechowania umożliwiło sformułowanie tych teorii opisujących Wszechświat w skali mikroskopowej i makroskopowej.

## Potencjał wektorowy od zlokalizowanego rozkładu prądu

Punktem wyjścia naszej analizy jest wyrażenie (2) na potencjał wektorowy. Dodatkowo jednak zakładamy, że prąd jest niezerowy w kuli o środku w  $\vec{r}' = 0$  i o promieniu  $R$ , co oznacza to, że wartość zmiennej całkowania  $r'$  nie przekracza  $R$ . Możemy więc skorzystać z przybliżenia

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} + \dots \quad (18)$$

zakładającego  $r \gg r'$ , omówionego w Wykładzie III, gdzie uwzględnialiśmy jeszcze jeden wyraz rozwinięcia (18). Teraz ograniczymy się do pierwszych dwóch wyrazów.

Podstawiając przybliżone wyrażenie (18) do równania (2), otrzymujemy

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{cr} \int d^3r' \vec{j}(\vec{r}') + \frac{1}{cr^3} \int d^3r' (\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}'). \quad (19)$$

Dalsza analiza wzoru (19) wymaga wykazania dwóch równości

$$\int d^3r j^i(\vec{r}) = 0, \quad (20)$$

$$\int d^3r r^j j^k(\vec{r}) = - \int d^3r r^k j^j(\vec{r}), \quad (21)$$

wynikających z bezźródłowości prądu w magnetostatyce. Prawdziwość równości (20) dowodzimy następująco. Ponieważ  $\nabla \cdot \vec{j} = \partial^i j^i = 0$ , więc

$$0 = \int d^3r r^j \partial^i j^i(\vec{r}) = - \int d^3r (\partial^i r^j) j^i(\vec{r}) = - \int d^3r \delta^{ij} j^i(\vec{r}) = - \int d^3r j^j(\vec{r}), \quad (22)$$

gdzie wykonaliśmy całkowanie przez części, przyjmując, że prąd znika w nieskończoności. Podobnie wykazujemy relację (21), a mianowicie

$$\begin{aligned} 0 &= \int d^3r r^k r^j \partial^i j^i(\vec{r}) = - \int d^3r (\partial^i r^k r^j) j^i(\vec{r}) = - \int d^3r (\delta^{ik} r^j + \delta^{ij} r^k) j^i(\vec{r}) \\ &= - \int d^3r (r^j j^k(\vec{r}) + r^k j^j(\vec{r})), \end{aligned} \quad (23)$$

co daje równanie (21).

Korzystając z równości (20) stwierdzamy, że pierwszy wyraz – monopolowy – we wzorze (19) znika, co faktycznie wynika z nieistnienia monopoli magnetycznych. Dzięki zaś relacji (21) drugi wyraz wzoru (19) po przejściu do notacji wskaźnikowej przekształcamy następująco

$$\begin{aligned} A^i(\vec{r}) &= \frac{1}{cr^3} \int d^3r' r^j r'^j j^i(\vec{r}') = \frac{1}{2cr^3} \int d^3r' r^j (r'^j j^i(\vec{r}') - r'^i j^j(\vec{r}')) \\ &= \frac{1}{2cr^3} \int d^3r' \left( \vec{r} \times (\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')) \right)^i. \end{aligned} \quad (24)$$

Wykazanie ostatniej równości wymaga skorzystania z tożsamości (6).

A zatem potencjał wektorowy zapisujemy w postaci

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}, \quad (25)$$

gdzie  $\vec{m}$  jest magnetycznym momentem dipolowym danym jako

$$\vec{m} = \frac{1}{2c} \int d^3r \vec{r} \times \vec{j}(\vec{r}). \quad (26)$$

Przypomnijmy sobie elektrostatyczny odpowiednik wzoru (25), czyli wyrażenie na potencjał skalarny dipola elektrycznego

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{r^3}. \quad (27)$$

Pole magnetyczne pochodzące od dipola magnetycznego znajdujemy, obliczając rotację potencjału (25), co daje wyrażenie

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{3(\vec{m} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{m}}{r^3}, \quad (28)$$

które warto skonfrontować ze wzorem na pole elektryczne dipola elektrycznego

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{3(\vec{p} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{p}}{r^3}. \quad (29)$$

W obu wzorach  $\hat{r} \equiv \vec{r}/r$ .

Jeśli wprowadzić gęstość magnetycznego momentu dipolowego  $\vec{M}(\vec{r})$  wynoszącą

$$\vec{M}(\vec{r}) = \frac{1}{2c} \vec{r} \times \vec{j}(\vec{r}), \quad (30)$$

to całkowity moment magnetyczny wynosi

$$\vec{m} = \int d^3r \vec{M}(\vec{r}), \quad (31)$$

natomiast wzór na potencjał wektorowy przybiera postać

$$\vec{A}(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad (32)$$

gdzie sumujemy wkłady od gęstości magnetycznego momentu dipolowego w różnych punktach.

## Dipolowy moment magnetyczny

Przykładem dipola magnetycznego jest magnes sztabkowy pokazany na Rys. 1. Biegun północny dipola N (od ang. North) to ten, który zgodnie z historyczną tradycją, kieruje się ku północnemu biegunowi Ziemi. Ponieważ przyciągają się przeciwne bieguny magnetyczne, więc północny biegun Ziemi jest faktycznie południowym S (od ang. South) biegunem magnetycznym.

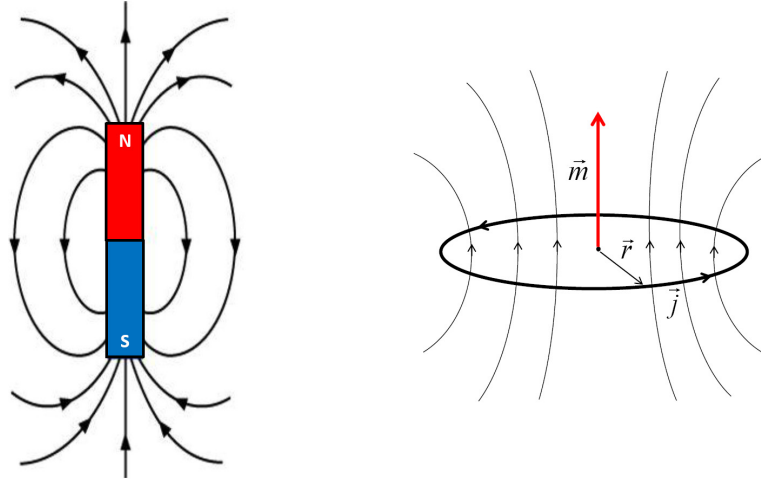
Prostym modelem dipola magnetycznego jest cienki przewód w kształcie okręgu o promieniu  $R$  również pokazany na Rys. 1. Jego magnetyczny moment dipolowy znajdujemy następująco

$$\vec{m} = \frac{1}{2c} \int d^3r \vec{r} \times \vec{j}(\vec{r}) = \frac{I}{2c} \int \vec{r} \times d\vec{l}. \quad (33)$$

gdzie wykonaliśmy całkę po poprzecznym przekroju przewodu, więc pojawiło się natężenie  $I$  prądu płynącego w przewodzie,  $\vec{dl}$  jest zorientowanym infitezymalnie małym elementem przewodu, a całkowanie przebiegu wzdłuż przewodu. Widzimy, że wektor  $\vec{m}$  jest prostopadły do płaszczyzny okręgu, a zwrot wyznaczamy regułą śruby prawoskrętnej, uwzględniając kierunek przepływu prądu. Jeśli początek układu współrzędnych znajduje się w środku okręgu, to wektor  $\vec{r}$  jest prostopadły do wektora stycznego do okręgu, a zatem

$$|\vec{m}| = \frac{I R}{2c} \int dl = \frac{\pi R^2 I}{c}, \quad (34)$$

gdzie uwzględniliśmy, że długość okręgu wynosi  $2\pi R$ .



Rysunek 1: Dipol magnetyczny w postaci magnesu sztabkowego i przewodu z prądem w kształcie okręgu

Skoro prąd płynący w zamkniętym obwodzie wytwarza moment dipolowy, domyślamy się, że cząstki naładowane krążące po orbitach działają podobnie. Rzeczywiście, wyrażając prąd we wzorze (34) jako  $\vec{j}(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) \vec{v}$  i zastępując całkowanie sumowaniem po dyskretnych ładunkach, otrzymujemy wzór na moment magnetyczny  $N$  cząstek o ładunkach  $q_i$  i prędkościach  $\vec{v}_i$

$$\vec{m} = \frac{1}{2c} \sum_{i=1}^N q_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i. \quad (35)$$

Ponieważ moment pędu  $i$ -tej cząstki o masie  $m_i$  wynosi

$$\vec{L}_i = m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i, \quad (36)$$

więc moment magnetyczny  $N$  cząstek równa się

$$\vec{m} = \frac{1}{2c} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{m_i} \vec{L}_i. \quad (37)$$

Widzimy więc, że występowanie momentu pędu cząstek naładowanych powoduje pojawienie się momentu magnetycznego. To jest właśnie mechanizm odpowiedzialny za moment magnetyczny atomów i molekuł, do którego główny wkład wnoszą elektrony, jako najbliższe cząstki.

## Siły pola magnetycznego

Jak już wspomnieliśmy w poprzednim wykładzie, pole magnetyczne ujawnia swą fizyczną naturę poprzez siły, jakimi działa na poruszające się cząstki naładowane, a ogólniej prądy. Najbardziej podstawowym pojęciem jest siła Lorentza

$$\vec{F} = \frac{q}{c} \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}), \quad (38)$$

działająca na ładunek  $q$  poruszający się z prędkością  $\vec{v}$ . Ze wzoru (38) wyprowadziliśmy wyrażenie na siłę działającą na prąd  $\vec{j}(\vec{r})$  tj.

$$\vec{F} = \frac{1}{c} \int d^3r \vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}), \quad (39)$$

a zakładając, że prąd płynie cienkim przewodem otrzymaliśmy wyrażenie

$$\vec{F} = \frac{I}{c} \int d\vec{l} \times \vec{B}(\vec{r}), \quad (40)$$

gdzie  $I$  jest natężeniem prądu, a całkowanie wykonujemy wzdłuż przewodu. Teraz rozważymy dwa proste przykłady działania sił pola magnetycznego.

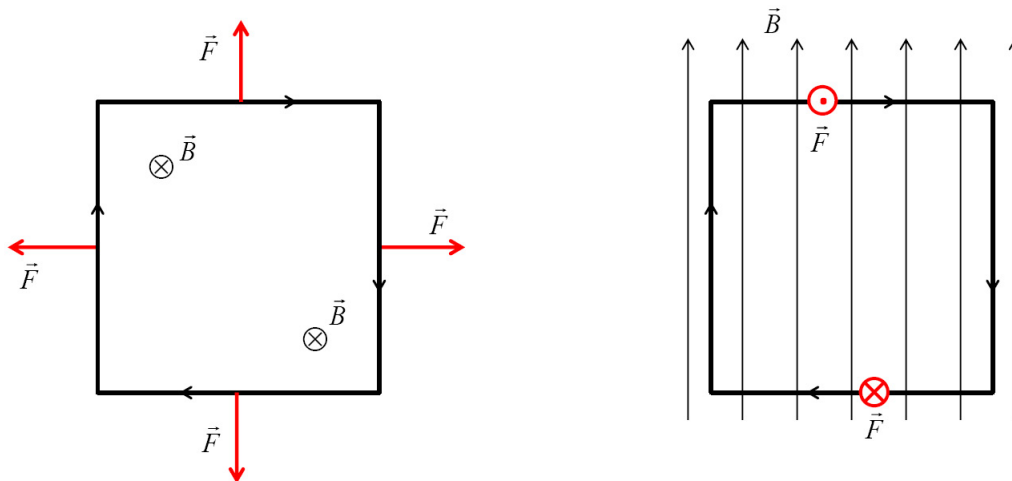
### 1. Prostokątny przewodnik w jednorodnym polu

Przeanalizujmy na początek, jakie siły działają na przewodnik w kształcie prostokąta umieszczony w jednorodnym polu magnetycznym. W przewodniku płynie prąd o natężeniu  $I$ . Rozważamy dwie sytuacje pokazane na Rys. 2, kiedy pole magnetyczne jest prostopadłe i równoległe do płaszczyzny prostokąta.

W pierwszym przypadku na każdy bok prostokąta działa siła  $F = IlB/c$ , gdzie  $l$  jest długością boku. Widzimy, że siły parami się znoszą. Jeśli odwrócić kierunek przepływu prądu albo kierunek pola magnetycznego siły zamiast rozrywać przewodnik będą go ściskać.

Jeśli pole magnetyczne jest równoległe do płaszczyzny prostokąta, to nie działają żadne siły na boki prostokąta równoległe do pola, natomiast siły działające na boki prostopadłe do kierunku pola magnetycznego są przeciwnie skierowane. Pojawia się więc moment siły, który stara się obrócić przewodnik, tak by płaszczyzna prostokąta była prostopadła do kierunku pola. Efekt ten wykorzystywany jest w silnikach elektrycznych.

Zauważmy też, że prostokątny przewodnik, podobnie jak każdy przewodnik tworzący zamkniętą płaską pętlę dowolnego kształtu, jest dipolem magnetycznym, którego wektor momentu dipolowego jest prostopadły do płaszczyzny pętli. Moment siły spowodowany występowaniem pola magnetycznego stara się obrócić dipol, aby wektor momentu dipolowego był równoległy do wektora pola.



Rysunek 2: Siły działające na przewodnik w kształcie prostokąta umieszczony w jednorodnym polu magnetycznym. Pole magnetyczne jest prostopadłe (lewy rysunek) i równoległe (prawy rysunek) do płaszczyzny prostokąta

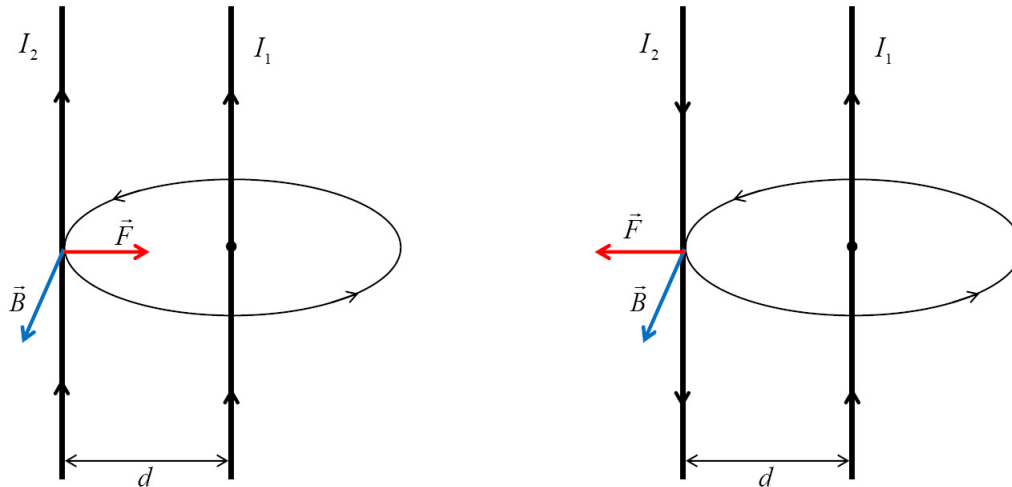
## 2. Równoległe przewody

Rozważmy dwa nieskończone, prostoliniowe i równoległe do siebie przewody pokazane na Rys. 3. W przewodach płyną prądy o natężeniach  $I_1$  i  $I_2$  w tym samym lub przeciwnym kierunku. Pamiętając o aksjalnym charakterze pola magnetycznego wytwarzanego przez przewód – linie pola tworzą współśrodkowe okręgi, stwierdzamy, że pole  $\vec{B}$  wytwarzane przez prawy przewód, jest prostopadłe do kierunku przepływu prądu w lewym. Zauważamy też, że przewody przyciągają się (odpychają), jeśli prądy płyną w tym samym (przeciwnym) kierunku. Doszlibyśmy, oczywiście, do tych samych wniosków, rozpatrując działanie pola magnetycznego wytwarzanego przez lewy przewód na prawy.

Jak pamiętamy z poprzedniego wykładu, wielkość pola na odległości  $d$  od przewodu wynosi  $B = 2I_1/(cd)$ , więc ze wzoru (40) znajdujemy siłę działającą na jednostkowy odcinek lewego przewodu jako

$$f \equiv \frac{F}{l} = \frac{2I_1I_2}{c^2 d}, \quad (41)$$

gdzie  $F$  jest siłą działającą na odcinek przewodu o długości  $l$ . Siła działająca na cały nieskończony przewód jest nieskończona, więc dlatego mówimy o sile na jednostkę długości.



Rysunek 3: Siła działająca pomiędzy równoległymi przewodami, gdy prądy w nich płyną w tym samym kierunku (lewy rysunek) i przeciwnych kierunkach (prawy rysunek).

## Dipol magnetyczny w niejednorodnym polu

Wyprowadzimy teraz siłę jaka działa na dipol magnetyczny znajdujący się w niejednorodnym polu magnetycznym. Wyprowadzenie jest dosyć żmudne, lecz uzyskany wynik jest ważny ze względu na liczne zastosowania, szczególnie w mechanice kwantowej.

Punktem wyjścia jest wyrażenie na siłę (38), które zapisujemy w notacji wskaźnikowej jako

$$F^i = \frac{1}{c} \epsilon^{ijk} \int d^3r j^j(\vec{r}) B^k(\vec{r}). \quad (42)$$

Dalej zakładamy, że rozkład prądu jest zlokalizowany w kuli o środku w  $\vec{r} = 0$  i promieniu  $R$ , zaś pole magnetyczne  $\vec{B}(\vec{r})$  zmienia się na długościach dużo większych niż  $R$ . Możemy więc rozwinąć pole  $\vec{B}(\vec{r})$  w szereg Taylora wokół  $\vec{r} = 0$

$$B^k(\vec{r}) = B^k(0) + r^l \partial^l B^k(\vec{r}) \Big|_{\vec{r}=0}. \quad (43)$$

Podstawiając rozwinięcie (43) do równania (42) otrzymujemy

$$F^i = \frac{1}{c} \epsilon^{ijk} \int d^3r j^j(\vec{r}) r^l \partial^l B^k(\vec{r}) \Big|_{\vec{r}=0}, \quad (44)$$

gdzie pierwszy wyraz rozwinięcia (43) nie daje wkładu ze względu na równość (20). Zauważmy, że pochodną pola magnetycznego wziętą w  $\vec{r} = 0$  można wynieść przed całkę, a skorzystanie równości (21) pozwala zapisać siłę (42) jako

$$F^i = \frac{1}{2c} \epsilon^{ijk} \partial^l B^k(\vec{r}) \Big|_{\vec{r}=0} \int d^3r (r^l j^j(\vec{r}) - r^j j^l(\vec{r})), \quad (45)$$

Teraz użyjemy równości

$$r^l j^j - r^j j^l = \epsilon^{ljm} (\vec{r} \times \vec{j})^m \quad (46)$$

którą bez trudu sprawdzamy, korzystając z tożsamości (6). Podstawiając prawą stronę równości (46) pod całkę (45) otrzymujemy

$$F^i = \frac{1}{2c} \epsilon^{ijk} \epsilon^{ljm} \partial^l B^k(\vec{r}) \Big|_{\vec{r}=0} \int d^3r (\vec{r} \times \vec{j})^m. \quad (47)$$

Po obliczeniu iloczynu tensorów antysymetrycznych z pomocą tożsamości (6)

$$\epsilon^{ijk} \epsilon^{ljm} = \epsilon^{ikj} \epsilon^{lmj} = \delta^{il} \delta^{km} - \delta^{im} \delta^{lk}, \quad (48)$$

znajdujemy

$$F^i = \frac{1}{2c} \partial^i B^k(\vec{r}) \Big|_{\vec{r}=0} \int d^3r (\vec{r} \times \vec{j})^k - \frac{1}{2c} \partial^k B^k(\vec{r}) \Big|_{\vec{r}=0} \int d^3r (\vec{r} \times \vec{j})^i. \quad (49)$$

Drugi człon wyrażenia (49) znika ze względu na bezźródłowość pola magnetycznego ( $\nabla \cdot \vec{B} = \partial^i B^i = 0$ ), natomiast w pierwszym rozpoznajemy magnetyczny moment dipolowy dany wzorem (34). Tak znajdujemy ostateczny wynik

$$F^i = \partial^i B^k(\vec{r}) \Big|_{\vec{r}=0} m^k, \quad (50)$$

który zapiszemy jako gradient iloczynu skalarnego  $\vec{m}$  i  $\vec{B}$

$$\vec{F} = \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B}). \quad (51)$$

Nie zaznaczyliśmy tutaj, że pochodną bierzemy w  $\vec{r} = 0$ , przyjmujemy natomiast, że pole magnetyczne wchodzące do wzoru (51) jest wzięte w punkcie, w którym znajduje się magnetyczny dipol.

Aby wyjaśnić fizyczny sens wzoru (51), wyobraźmy sobie magnes sztabkowy o magnetycznym momencie dipolowym  $\vec{m}$  w polu magnetycznym  $\vec{B}$ . Jeśli wektory  $\vec{m}$  i  $\vec{B}$  są zgodnie skierowane, siła dana wzorem (51) ciągnie magnes w kierunku najszybszego wzrostu pola magnetycznego. Gdy zaś wektory  $\vec{m}$  i  $\vec{B}$  są przeciwnie skierowane, siła jest skierowana w kierunku, gdzie pole magnetyczne najszybciej maleje. Siła nie występuje w przypadku pola jednorodnego, gdyż jego gradient znika.

Ponieważ siła, zgodnie ze wzorem (51), jest gradientem funkcji skalarnej  $\vec{m} \cdot \vec{B}$ , to ta funkcja skalarne wzięta ze znakiem minus jest energią potencjalną dipola magnetycznego w polu magnetycznym, czyli

$$U = -\vec{m} \cdot \vec{B}. \quad (52)$$

Energia ta jest najmniejsza, gdy wektory  $\vec{m}$  i  $\vec{B}$  są zgodnie skierowane, a największa, jeśli wektory  $\vec{m}$  i  $\vec{B}$  są skierowane przeciwnie.