

## Termin (nieprzekraczalny!): 13.03.07

Matematyka Dyskretna, informatyka, 2006/2007

*Jeśli zadanie nie było rozwiązane samodzielnie, proszę o podanie źródła lub osoby, z która zadanie było rozwiązywane.*

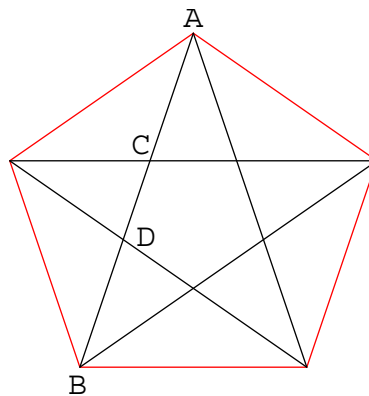
### Zestaw 1: Rekurencja

1. Rozwiąż rekurencję  $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$  dla  $n > 2$  z warunkami początkowymi  $a_1 = a_2 = 1$  z pomocą funkcji tworzącej oraz metody opartej o równanie charakterystyczne.
2. Liczby Lucasa: rozważ ciąg  $l_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ , gdzie  $a_n$  są liczbami Fibonacciego. Znajdź rekurencję wyrażającą  $l_n$  poprzez  $l_{n-1}$  i  $l_{n-2}$ , oraz stosowne warunki początkowe, następnie rozwiąż tę rekurencję.
3. W oparciu o dowolną metodę rozwiąż rekurencję  $a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$  z warunkami początkowymi  $a_0 = a_1 = a_2 = 1$ .
4. Rozwiąż rekurencję niejednorodną  $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + (-1)^n$  dla  $n > 2$  z warunkami początkowymi  $a_1 = a_2 = 1$ .
5. Załóż, że masa kolejnych krążków Wieży Hanoi rośnie jak  $n^2$  – jest to dość realistyczne, bo typowa zabawka ma krążki o promieniach z grubsza wzrastających jak  $n$  i o tej samej grubości. Jaką całkowitą masę trzeba przenieść przy wykonaniu algorytmu ???
6. Rozwiąż rekurencję  $a_{n+1} = a_n^2$ , gdzie  $n \geq 1$ , z warunkiem  $a_1 = 2$ . (Wskazówka: wykorzystaj funkcję log.)
7. Na okręgu wybrano  $n$  różnych punktów, a między nimi narysowano wszystkie możliwe cięciwy. Na ile obszarów zostało podzielone koło?
8. Wiedząc, że truteń płodzony jest bezpłciowo z królowej, a królowa płodzona jest płciowo z trutnia i królowej, narysuj drzewo genealogiczne trutnia. Policz liczbę osobników w każdym pokoleniu tego drzewa. Co odkryłeś?
9. Zmodyfikuj model rozmnażania królików Fibonacciego tak, aby 1) młode dojrzewały  $m$  razy dłużej niż czas trwania ciąży, 2) każdy miot zawierał  $k$  par. Zapisz i rozwiąż stosowną rekurencję.
10. Nostalgiczna powtórka z geometrii: udowodnij, że przekątne pentagramu dzielą się w stosunku, będącym Złotym Podziałem, zob. rys. 1.
11. Z linijką w ręce doszukaj się Złotego Podziału w otaczających Cię przedmiotach. Znajdź co najmniej dwa.

12. Apollo Belwederski Leocharesa<sup>1</sup> ucieleśnia ideał proporcji ciała ludzkiego. W szczególności, stosunek jego wzrostu do odległości pępka od podstawy wynosi  $\phi$ . Dokonaj tego pomiaru na sobie!
13. Gracz wchodzi do kasyna, posiadając 100 monet, rozbić banku następuje, gdy gracz posiada 200 monet. Prawdopodobieństwo wygranej wynosi  $p = 0.49$ . Krzysztof ma strategię taką, że wychodzi po wygraniu 50. monet, a Ludwik po przegraniu 50. monet. Jakie jest prawdopodobieństwo tych zdarzeń? Który z graczy będzie grał dłużej?

---

<sup>1</sup>Leochares, IV w. pne., rzeźbiarz grecki.



Rysunek 1: Pentagram i Złoty Podział:  $|AB|/|AD| = \phi = |AD|/|AC|$ .