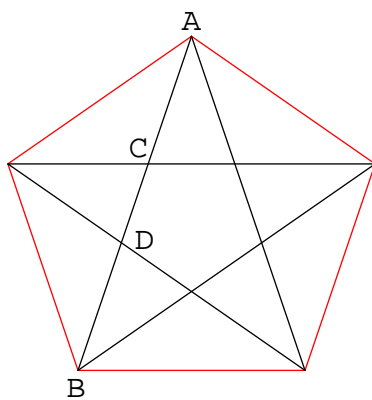


Zestaw 1: Rekurencja

1. Rozwiąż rekurencję $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ dla $n > 2$ z warunkami początkowymi $a_1 = a_2 = 1$ z pomocą funkcji tworzącej oraz metody opartej o równanie charakterystyczne.
2. Liczby Lucasa: rozważ ciąg $l_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$, gdzie a_n są liczbami Fibonacciego. Znajdź rekurencję wyrażającą l_n poprzez l_{n-1} i l_{n-2} , oraz stosowne warunki początkowe, następnie rozwiąż tę rekurencję.
3. W oparciu o dowolną metodę rozwiąż rekurencję $a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$ z warunkami początkowymi $a_0 = a_1 = a_2 = 1$.
4. Rozwiąż rekurencję niejednorodną $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + (-1)^n$ dla $n > 2$ z warunkami początkowymi $a_1 = a_2 = 1$.
5. Załóż, że masa kolejnych krążków Wież Hanoi rośnie jak n^2 – jest to dość realistyczne, bo typowa zabawka ma krążki o promieniach z grubsza wzrastających jak n i o tej samej grubości. Jaką całkowitą masę trzeba przenieść przy wykonaniu algorytmu?
6. Rozwiąż rekurencję $a_{n+1} = a_n^2$, gdzie $n \geq 1$, z warunkiem $a_1 = 2$. (Wskazówka: wykorzystaj funkcję \log .)
7. Na okręgu wybrano n różnych punktów, a między nimi narysowano wszystkie możliwe cięciwy. Na ile obszarów zostało podzielone koło?
8. Wiedząc, że truteń płodzony jest bezpłciowo z królowej, a królowa płodzona jest płciowo z trutnia i królowej, narysuj drzewo genealogiczne trutnia. Policz liczbę osobników w każdym pokoleniu tego drzewa. Co odkryłeś?
9. Zmodyfikuj model rozmnażania królików Fibonacciego tak, aby 1) młode dojrzewały m razy dłużej niż czas trwania ciąży, 2) każdy miot zawierał k par. Zapisz i rozwiąż stosowną rekurencję.
10. Nostalgiczna powtórka z geometrii: udowodnij, że przekątne pentagramu dzielą się w stosunku, będącym Złotym Podziałem, zob. rys. 1.
11. Z linijką w ręce doszukaj się Złotego Podziału w otaczających Cię przedmiotach. Znajdź co najmniej dwa.
12. Gracz wchodzi do kasyna, posiadając 100 monet, rozbicie banku następuje, gdy gracz osiągnie 200 monet. Prawdopodobieństwo wygranej wynosi $p = 0.49$. Krzysztof ma strategię taką, że wychodzi po wygraniu 50. monet, a Ludwik po przegraniu 50. monet. Jakie jest prawdopodobieństwo tych zdarzeń? Który z graczy będzie grał dłużej?



Rysunek 1: Pentagram i Złoty Podział: $|AB|/|AD| = \phi = |AD|/|AC|$.