Matematyka Dyskretna, informatyka, 2008/2009, W. Broniowski

Zestaw 2 z częściowymi odpowiedziami (jak ktoś nie chce, niech nie patrzy!
Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa

1. Z pomocą wzoru Stirlinga dla $n!$ wyprowadź analog tego wzoru dla $n!!$.

2. Rozważ tzw. kości Efrona,[1] których poszczególne ściany posiadają nastepującą liczbę oczek:

I:	4,4,4,4,0,0
II:	3,3,3,3,3,3
III:	6,6,2,2,2,2
IV:	5,5,5,1,1,1

   Czterej gracze, każdy z kością I, II, II lub IV, grają ze sobą parami i wygrywa ten, który wyrzuci wiekszą liczbe oczek. Jakie jest prawdopodobieństwo, że I wygra z II, II z III, itd.? Przedyskutuj wynik.

3. Która z kości z ćw. 2 jest "najlepsza", tzn. w grze z losowo wybranym przeciwnikiem daje najwieksze prawdopodobieństwo wygranej?

4. Ile jest sposobów rozmieszczenia n nierozróżnialnych obiektów w k rozróżnialnych pudłach, przy czym pudła mogą pozostać puste?

5. Na ile sposobów można wybrać k obiektów z n rozróżnialnych obiektów, jeśli wybór możemy powtarzać? Jest to tzw. kombinacja z powtórzeniami, $\bar{C}_k^n$.

6. Z pomocą funkcji tworzącej pokaż, że dla $n > 1$

$$\sum_{k=0}^{n} k(-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

   Sprawdź wynik dla kilku pierwszych wartości n w oparciu o trójkąt Pascala.

7. Wyprowadź wzory na

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}, \text{ oraz } \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}.$$

8. (kontunuacja problemu rozwiązanego na wykładzie) Pokaż, że dla problemu szalików $\bar{k} = \sum_{k=0}^{n} kP_k^n = 1$. Wynik ten oznacza, że średnia liczba kibiców, którzy odzyskali swój szalik wynosi 1.

9. A oto problem Augusta Gombaud, kawalera de Méré. Rzucamy dwiema kośćmi 24 razy pod rząd. Jakie jest prawdopodobieństwo, że choć raz wypadną dwie szóstki ⚅ ⚅?

[1]Bradley Efron (1938 –), statystyk amerykański.

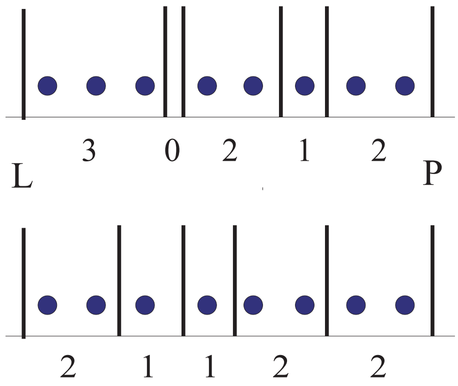
10. Jakie są prawdopodobieństwa wylosowania układów z pokera: para, dwie pary, strit, trójka, full, kolor, kareta, poker? Załóż, że talia jest a) od dziewiątek, b) siódemek, c) dwójek. Wybierz do rozwiązania kilka przypadków.

11. Wyprowadź wzory na liczbę pokryć odcinka oraz okręgu o długości n przy pomocy k sztuk domina o długości 3 i kwadratami o długości 1.

12. Ile jest wszystkich pokryć odcinka o długości n z pomocą kości domina o długości 2 i kwadratów o długości 1, gdzie domina i kwadraty wystepują w dwóch kolorach?

13. Trzej równej klasy szachiści A, B i C grają w szachy wg. zasady, że gracz wygrywający dwie partie z rzędu wygrywa turniej, a gracz przegrywający partię w nastepnej pauzuje. Zaczynają A z B. Jakie jest prawdopodobieństwo wygrania turnieju przez poszczególnych graczy? Rozważ wariant nieskończonej liczby partii oraz liczby partii n.

14. (wariant problemu rozwiązanego na wykładzie) Rozwiąż zmodyfikowany problem sadowienia na przyjęciu, gdzie żadamy, aby współmałżonkowie nie siedzieli koło siebie, ale kobiety i mężczyźni *nie muszą* siedzieć na przemian.



Rysunek 1: Dwa przykłady rozmieszczenia $n = 8$ nierozróżnialnych kul w $k = 5$ rozróżnialnych pudłach. Pionowe kreski to przegrody tworzące pudła. L i P oznaczają skrajne przegrody, które są rozróżnialne. Liczby poniżej rysunków podają liczbę kul w poszczególnych pudłach.

Rozwiązania

- Ćw. 1. Dla n parzystych korzystamy ze wzoru $n!! = 2^n(n/2)!$ i wzoru Stirlinga. Dla n nieparzystych używamy związku $n!! = n!/(n-1)!!$.

- Ćw. 4. Załóżmy, że ułożyliśmy n nierozróżnialnych kul w rzędzie i następnie ustawiamy $k+1$ tekturowych przegród w taki sposób, aby powstały pudła (zob. rys. 1). Dwie przegrody muszą być zawsze na krańcach, a pozostałe $k-1$ "przegrody wewnętrzne" gdzieś pomiędzy nimi. Te $k-1$ przegród też jest nierozróżnialnych, bo nie jest istotne którą przegrodą rozdzielimy pudła. Powstałe z tej konstrukcji pudła mogą zawierać kule lub pozostać puste. Teraz zastosujemy bardzo częstą sztuczkę, mianowicie potraktujemy *na chwilę* zarówno kule jak i $k-1$ przegród wewnętrznych jako *rozróżnialne*. Każda z sytuacji z rys. 1 odpowiada teraz pewnej permutacji $n+k-1$ obiektów (kule + przegrody wewnętrzne), co możemy oczywiście zrobić na $(n+k-1)!$ sposobów. Teraz "poprawiamy" ten wynik: ponieważ kule są nierozróżnialne, policzyliśmy niepotrzebnie aż $n!$ ustawień kul w rzędzie, podczas gdy jest tylko jedno. Musimy więc podzielić wynik przez $n!$. Podobnie, przegrody wewnętrzne, których jest $k-1$, są nierozróżnialne, więc dzielimy przez $(k-1)!$. Ostatecznie, rozwiązanie ma postać
$$\frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)} = \binom{n+k-1}{n}.$$
Zauważmy jeszcze, że w wyniku naszej procedury pudła pozostają rozróżnialne, ponieważ dwie skrajne przegrody, lewa i prawa , są rozróżnialne. Tak więc możemy je ponumerować np. wg. odległości od lewej ściany.

- Ćw. 5. Ćwiczenie to jest w istocie tym samym zadaniem, co ćw. 4. Należy po prostu utożsamić rodzaj kuli z numerem pudła, w którym się znajduje. Np. dla górnej części rys. 1 mamy 3 kule pierwszego rodzaju, 0 drugiego, 2 trzeciego, 1 czwartego i 2 piątego rodzaju. Tak więc liczba wyboru n obiektów z powtórzeniami spośród k obiektów (kombinacje z powtórzeniami) wynosi
$$\bar{C}_k^n = \binom{n+k-1}{n}.$$

- Ćw. 6. Funkcja tworząca dla współczynników dwumianowych ma postać

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = (1+z)^n.$$

Różniczkując po z otrzymujemy

$$\frac{df(z)}{dz} = \sum_{k=0}^{n} k z^{k-1} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = n(1+z)^{n-1}.$$

Biorąc $z = -1$ dostajemy żądany związek

$$\sum_{k=0}^{n} k(-1)^k \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = 0.$$

Np. dla czwartego rzędu trójkata Pascala mamy $0 \cdot 1 - 1 \cdot 4 + 2 \cdot 6 - 3 \cdot 4 + 4 \cdot 1 = 0$.

- Ćw. 7. Korzystamy z funkcji tworzącej dla współczynników dwumianowych. W pierwszym przypadku obliczamy $df(z)/dz$ dla $z = 1$, co daje

$$\sum_{k=0}^{n} k \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = 2^{n-1} n.$$

W drugim przypadku obliczamy $\frac{d}{dz}[z \frac{d}{dz} f(z)]$ dla $z = 1$, co daje

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = 2^{n-2} n(n+1).$$

- Ćw. 8. Ze wzoru z wykładu

$$\bar{k} = \sum_{k=0}^{n} k P_k^n = \sum_{k=0}^{n} k \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^{n-k} \frac{(-1)^l}{l!} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n-k} k \frac{1}{(k+l)!} \left(\begin{array}{c} k+l \\ k \end{array} \right) (-1)^l.$$

Wprowadźmy $l' = n - k - l$,

$$\bar{k} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l'=0}^{n-k} k \frac{1}{(n-l')!} \left(\begin{array}{c} n-l' \\ k \end{array} \right) (-1)^{n-k-l'},$$

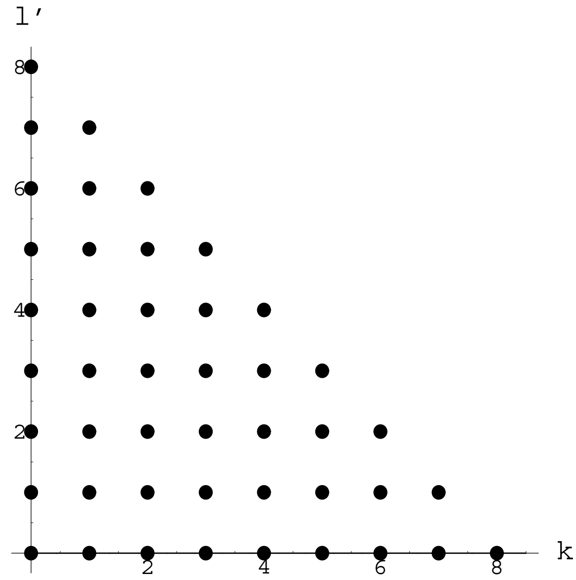
a następnie zmieńmy kolejność sumowania. Granice sumowania odczytujemy z rys. 2. Otrzymujemy

$$\bar{k} = \sum_{l'=0}^{n} \frac{1}{(n-l')!} (-1)^{n-l'} \sum_{k=0}^{n-l'} k \left(\begin{array}{c} n-l' \\ k \end{array} \right) (-1)^k.$$

Na podstawie ćw. 6 suma po k w powyższym wzorze wynosi 0 dla $n - l' > 1$, zatem jedyny niezerowy przyczynek otrzymujemy dla $l' = n - 1$, $k = 1$, który daje

$$\bar{k} = \frac{1}{1!}(-1)^1 \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right) (-1)^1 = 1.$$

Średnio, jeden kibic odzyskuje swój własny szalik.



Rysunek 2: Granice sumowania w rozwiązaniu ćw. 8 dla $n = 8$: dla ustalonego l' sumujemy po k od 0 do $n - l'$, tj. otrzymujemy sumę $\sum_{l'=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-l'} \ldots$.

- Ćw. 9. W każdym rzucie dwiema kostkami prawdopodobieństwo wypadnięcia ⚅⚅ wynosi $1/36$, a prawdopodobieństwo dowolnej innej konfiguracji $35/36$. Mamy $n = 24$ rzutów. Najpierw wybieramy, w których k rzutach wypadną ⚅⚅, co możemy zrobić na C_k^n sposobów. Sytuacja wygrywająca to przynajmniej jedno wyrzucenie ⚅⚅, $k = 1, 2, \ldots, n$, zatem

$$P = \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \left(\frac{1}{36}\right)^k \left(\frac{35}{36}\right)^{n-k} = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n,$$

gdzie $\left(\frac{35}{36}\right)^n$ to prawdopodobieństwo zdarzenia dopełniającego. Dla $n = 24$ otrzymujemy $P = 0.4914$, nieco mniej niż $1/2$. Prowadzący kasyno zarabia, ale różnica jest na tyle mała, że trudno to zauważyć. Kawaler de Méré musiał być namietnym hazardzistą, skoro spostrzegł empirycznie, że przegrywa. Zauważmy jeszcze, że już dla $n = 25$ grający ma większą szansę wygranej niż przegranej, $P = 0.5055$.

- Ćw. 10.

Dla talii o $n = 4k$ kartach mamy $|\Omega| = \begin{pmatrix} n \\ 5 \end{pmatrix}$ wszystkich możliwości wyboru pięciu kart.

Każda karta ma rangę (A, K, D, W, 10, ..., itd.) oraz jeden z czterech kolorów.

Poker to konfiguracja w jednym kolorze o kolejnych rangach. Dla pełnej talii mamy następujące możliwe pokery: A-K-D-W-10, K-D-W-10-9, ... 6-5-4-3-2, 5-4-3-2-A (as liczy się też za 1), czyli łącznie 10 możliwości. Dla $k < 13$ nie ma sekwencji z asem na końcu, więc mamy $k - 4$ możliwości, co ogólnie mozemy zapisać, jako $k - 3 - m$, $m = 0$ dla $k = 13$, $m = 1$ dla $k < 13$. Poker może być w dowolnym z czterech kolorów, więc liczba wszystkich pokerów to $N_{\text{poker}} = 4(k-3-m)$. Kareta to cztery karty o tej samej randze. Wybieramy tę rangę na k sposobów, a pozostałą piątą kartę na $n-4$ sposobów, co daje $N_{\text{kareta}} = k(n-4)$.

Tabela 1: Prawdopodobieństwa wylosowania układów w pokerze w grze taliami od dziewiątek ($k = 6$), siódemek ($k = 8$) i dwójek ($k = 13$).

	$k = 6,\ m = 1$	$k = 8,\ m = 1$	$k = 13,\ m = 0$
poker	0.000188	0.000078	0.000015
kareta	0.002823	0.001112	0.000240
full	0.016940	0.006674	0.001441
kolor	0.000376	0.001033	0.001965
street	0.047996	0.020261	0.003925
trójka	0.090344	0.053393	0.021129
dwie pary	0.203275	0.120133	0.047539
para	0.542067	0.533927	0.422569
pozostałe	0.095991	0.263388	0.501177

Full to trzy karty o tej samej randze plus dwie karty o tej samej randze. Rangę trójki można wybrać na k sposobów, kolory kart w trójce na C_3^4 sposoby, rangę pary na $(k-1)$ sposobów (jedna jest już "zajęta" przez trójkę), a kolory kart w parze na C_2^4 sposoby. Łącznie mamy $N_{\text{full}} = k \binom{4}{3} (k-1) \binom{4}{2}$. Kolor to układ pięciu kart w tym samym kolorze, który nie jest pokerem. Wybieramy więc jeden z czterech kolorów i pięć kart spośród k kart w tym kolorze, co daje $N_{\text{kolor}} = 4 \binom{k}{5} - N_{\text{poker}}$. Street to sekwencja kart o kolejnych rangach, która nie jest pokerem. Mamy więc $N_{\text{street}} = (k-m-3)4^5 - N_{\text{poker}}$, gdzie czynnik $(k-m-3)$ jest uzyskany podobnie, jak dla pokera, a 4^5 to możliwości wyboru koloru dla każdej z pięciu kart. Dla trójki mamy k możliwości wyboru rangi kart trójki, C_3^4 możliwości wyboru koloru dla trzech kart, następnie wybieramy na C_2^{k-1} możliwości dwie rangi spośród $(k-1)$ dla pozostałych dwóch kart, oraz ich kolory na 4^2 sposobów. Łącznie mamy więc $N_{\text{trjka}} = k \binom{4}{3} \binom{k-1}{2} 4^2$ możliwości. Dla dwóch par wybieramy dwie rangi dla par na C_2^k sposobów, kolory kart w parach na $(C_2^4)^2$ sposobów, rangę piątej karty na $(k-2)$ sposoby, a jej kolor na 4 sposoby, co daje $N_{\text{2pary}} = \binom{k}{2} \binom{4}{2} (k-2)4$. Wreszcie dla jednej pary wybieramy rangę na k sposobów, dwa spośród czterech możliwych kolorów kart w parze na C_2^4 sposoby, rangi pozostałych trzech kart na $\binom{k-1}{3}$ sposoby, oraz ich kolory na 4^3 sposobów. Łącznie daje to $N_{\text{para}} = \binom{k}{1} \binom{4}{2} \binom{k-1}{3} 4^3$. Prawdopodobieństwa obliczamy jako $N_i/|\Omega|$. Wyniki liczbowe dla trzech typów talii, od dwójek, siódemek i dziewiatek, przedstawione są w Tabeli 1. Zauważmy, że zmiana liczby kart w talii zmienia kolejność poszczególnych układów wzgledem ich prawdopodobieństwa, np. $k = 8$ kareta i full są bardziej prawdopodobne od koloru.

- Ćw. 13. Równa klasa graczy oznacza, że w każdej partii prawdopodobieństwo wygrania przez każdego gracza wynosi $1/2$. Załóżmy najpierw, że mamy dostatecznie długą grę (nikt nie wygrywa pod rząd), aby zauważyć pewne prawidłowości. Przy stoliku siadają A i B. Jeśli wygrywa A, to wchodzi z ławki C. Teraz musi wygrać C, aby gra trwała dalej, więc A siada na ławce, a do gry przystępuje B. Teraz z kolei musu wygrać B, a do gry wchodzi ponownie A, itd. Mamy więc sekwencję kolejnych zwycięzców $ACBACBACB\ldots$. Podobnie, jeśli pierwszą partię wygrał B, to mamy sekwencję zwycięzców $BCABCABCA\ldots$. Rozważmy teraz prawdopodobieństwo, że wygra A. Sekwencje zwycęzców muszą się teraz kończyć przez $\ldots AA$. Jeśli pierwszą partię wygrał A, to mamy możliwości

$$AA + ACBAA + ACBACBAA + ACB\ldots ACBAA = \frac{1}{1-ACB}AA,$$

które formalnie zsumowaliśmy jako szereg geometryczny. Podobnie, jeśli pierwszy wygrał B, to mamy

$$BCAA + BCABCAA + BCA\ldots BCAA = BCA\frac{1}{1-BCA}A.$$

Teraz wystarczy podstawić prawdopodobieństwa wygrania partii $A = B = C = 1/2$ i zsumować dwa powyższe wzory, co daje

$$P_A = \frac{1}{1-\frac{1}{8}}\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\frac{1}{1-\frac{1}{8}}\frac{1}{2} = \frac{5}{14}.$$

Z symetrii zagadnienia $P_B = P_A = \frac{5}{14}$. Dla gracza C otrzymujemy następujące sekwencje:

$$ACC + ACBACC + ACBA\ldots CBACC = A\frac{1}{1-CBA}CC,$$

oraz

$$BCC + BCABCC + BCAB\ldots CABCC = B\frac{1}{1-CAB}CC.$$

Po podstawieniu prawdopodobieństw i zsumowaniu otrzymujemy $P_C = \frac{4}{14}$. Oczywiście, $P_A + P_B + P_C = 1$. Rozwiązanie pokazuje, że zaczynajacy turniej ma nieco większą szansę wygrania (w stosunku 5:4 do gracza początkowo pauzującego).

- Ćw. 14. Oznaczmy szukane liczby usadowień n par jako M'_n. Podobnie jak na wykładzie, zasada włączeń i wyłączeń prowadzi do wzoru

$$M'_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} |A'_k|, \tag{1}$$

gdzie $|A'_k|$ oznacza liczbę usadowień, w których k wybranych par siedzi razem (a inne mogą siedzieć razem lub nie). Anatomia $|A'_k|$ jest następująca:

  - Wybór (podwójnych) miejsc dla wybranych k par – $c_k^{2n} = \frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}$. Pamietamy, że jest to liczba pokryć $2n$ punktów na okregu z pomocą k kości domina i $2n-k$ kwadratów.

n	M'_n	$M'_n/(2n)!$
1	0	0
2	8	1/3
3	192	4/15
4	11904	0.295
5	1125120	0.310
6	153262080	0.320

Tabela 2: Liczby usadowień n małżeństw na przyjeciu, jeśli małżeństwa muszą siedzieć osobno.

- Rozmieszczenie k par w k miejscach – $k!$.
- W każdej parze możliwe są dwa usadowienia, co daje – 2^k.
- Usadowienie pozostałych $2n-2k$ osób – $(2n-2k)!$.

Mamy więc

$$|A'_k| = c_k^{2n} k! 2^k (2n-2k)!^2 = 2n(2n-k-1)!2^k,$$

oraz ostatecznie szukany wynik w postaci sumy:

$$M'_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} 2n(2n-k-1)!2^k. \tag{2}$$

Kilka pierwszych wartości dla liczb M'_n oraz dla prawdopodobieństwa uzyskania losowo właściwego usadowienia, $M'_n/|\Omega| = M'_n/(2n)!$, przedtawionych jest w tabeli 2.