Termin (nieprzekraczalny!): 24.05.07

Matematyka Dyskretna, informatyka, 2006/2007, W. Broniowski

Każda praca ma być oddana indywidualnie! *Jeśli zadanie nie było rozwiązane samodzielnie, proszę o podanie źródła lub osoby, z która zadanie było rozwiązywane.*

Zestaw 3: Grafy

1. Zadanie *o wilku, kozie i kapuście*. Przewoźnik musi przeprawić promem na drugą stronę rzeki wilka, kozę i kapustę. Łódź jest na tyle mała, że może pomieścić oprócz przewoźnika tylko jeden "obiekt". Jak ma to zrobić, aby móc przypilnować, by wilk nie zjadł kozy, a koza kapusty? Narysuj graf ilustrujący możliwe sytuacje i zaznacz rozwiązanie. Ile najmniej przepraw potrzeba? Ile jest takich optymalnych rozwiązań?

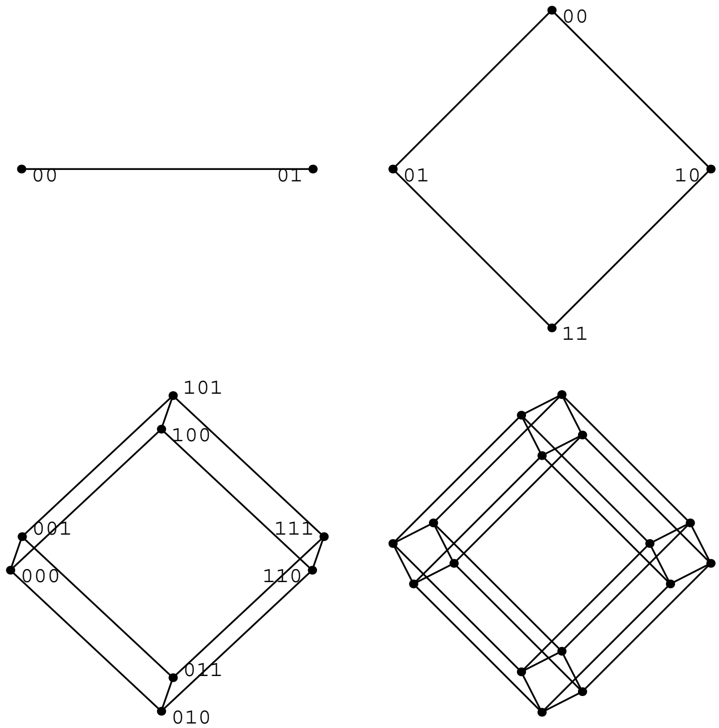
2. Narysuj wszystkie nieizomorficzne grafy 3-regularne o sześciu wierzchołkach (graf k-regularny to graf prosty o stopniu każdego wierzchołka równym k). Dla dowolnego z narysowanych grafów wyznacz macierz incydencji, macierz sąsiedztwa, oraz listy incydencji.

3. Cząsteczkę węglowodoru o wzorze sumarycznym C_kH_{2k+2} można przedstawić w postaci spójnego grafu prostego, w którym wierzchołki oznaczają atomy węgla (C) lub wodoru (H), a krawędzie wiązania chemiczne. Każdy atom wodoru związany jest z jednym innym atomem, a każdy atom węgla z czterema innymi atomami. Narysuj kilka grafów dla małych wartości k. Pokaż, że dla każdy graf reprezentujący C_kH_{2k+2} jest drzewem. Nieizomorficzne grafy dla ustalonego k nazywamy izomerami. Ile jest izomerów dla $k = 1, 2, 3, 4, 5$?

4. Do trzech budowanych domów należy doprowadzić ziemią linie zasilania prądem, wodą i gazem. Czy można to zrobić bez krzyżowania tych linii?

5. Na balu jest n mężczyzn i $m \geq n$ kobiet. Ile najmniej tańców potrzeba, aby każda kobieta zatańczyła z każdym partnerem?

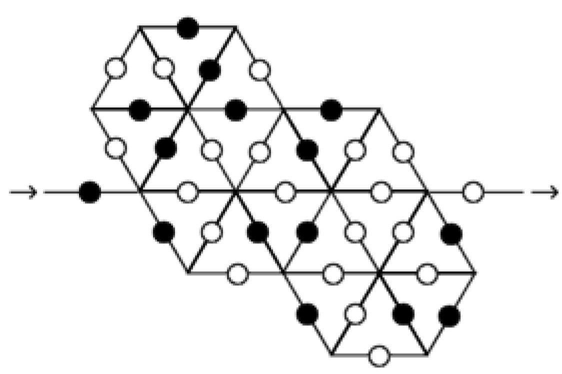
6. n-wymiarowa hiperkostka Q_n zdefiniowana jest jako następujący graf: zbiór wierzchołków to wszystkie n-wyrazowe ciągi liczb 0 i 1, np. dla $n = 2$ zbiór wierzchołków to zbiór punktów na płaszczyźnie
$$\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\},$$
a dla $n = 3$
$$\{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0),(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\},$$
itd. dla większej liczby wymiarów n (zob. rys. 1). Z definicji, wierzchołki są sąsiednie, jeśli określające je ciągi współrzędnych różnią się w dokładnie jednym miejscu, np. dla $n = 3$ wierzchołki $(1,0,1)$ i $(1,0,0)$ są sąsiednie, a $(1,0,1)$ i $(1,1,0)$ nie są. Udowodnij, że liczba wierzchołków Q_n wynosi 2^n, a liczba krawędzi $n2^n$. Pokaż, że Q_n jest grafem dwudzielnym.



Rysunek 1: Hiperkostki Q_n dla $n = 1, 2, 3, 4$.

7. Przejdź przez labirynt z rys. 2, przechodząc na zmianę przez krawędzie z białym i czarnym kółkiem. Czy rys. 2 reprezentuje graf?

8. Problem chińskiego listonosza (Mei Ku Kwan, 1962) polega na tym, aby w grafie o krawędziach z wagami równymi ich długości znaleźć najkrótszy cykl przechodzący przez każdą krawędź co najmniej raz. Rozwiąż ten problem dla fragmentu twojej miejscowości zawierającego kilka ulic w okolicy Twojego domu.



Rysunek 2: Łamigłówka.