Tw. 1.11 (Akry-Bazziego, uogólnione). *Rozważmy rekurencję*

$$T(x) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{dla } 1 \le x \le x_0 \\ \sum_{i=1}^{k} a_i T(\beta_i x + h_i(x)) + g(x) & \text{dla } x > x_0 \end{cases}, \tag{1.58}$$

gdzie spełnione są warunki Tw. 1.10, warunek wielomianowości $g(x)$ zachodzi na przedziale $u \in [\beta_i x + h_i(x), x]$, $i = 1, \ldots, k$, ponadto funkcje $h_i(x)$ są ograniczone w następujący sposób:

$$\exists \epsilon > 0 \ \forall x > x_0 : |h(x)| < \frac{x}{\log^{1+\epsilon} x}.$$

Dodatkowo, przyjmuje się pewne techniczne założenia dotyczące wyboru x_0 (zob. [35]). Wtedy zachodzi ta sama teza, co w oryginalnym Tw. 1.10.

W szczególności co ma praktyczne znaczenie, założenia powyższego twierdzenia spełnione są dla $h_i(x) = x - \lceil x \rceil$ oraz $h_i(x) = x - \lfloor x \rfloor$.

Na tym kończymy nasze rozważania o rekurencji, do której jednak będziemy często powracać w dalszych częściach wykładu, albowiem wiele problemów matematyki dyskretnej sprowadza się do znanych zagadnień rekurencyjnych. Dalsze informacje dotyczące tej tematyki można znaleźć w podręcznikach [1–3].

Ćwiczenia

1.1. Rozwiąż rekurencję $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ dla $n > 2$ z warunkami początkowymi $a_1 = a_2 = 1$ za pomocą funkcji tworzącej oraz metody opartej na równaniu charakterystycznym.

1.2. Podczas rozwiązywania zadań poczuliśmy silny głód i zamówiliśmy pizzę. Jaka jest największa liczba kawałków p_n, na które możemy podzielić pizzę z pomocą n prostoliniowych cięć nożem? Inaczej: na jaką największą liczbę obszarów możemy podzielić płaszczyznę za pomocą n prostych? [2]

1.3. Liczby Lucasa: rozważ ciąg $L_n = F_n + 2F_{n-1}$, gdzie F_n są liczbami Fibonacciego, a L_n tzw. liczbami Lucasa. Znajdź rekurencję wyrażająca L_n poprzez L_{n-1} i L_{n-2} oraz stosowne warunki początkowe, a następnie rozwiąż tę rekurencję.

1.4. Pokaż, że liczby Fibonacciego i liczby Lucasa spełniają związek $F_{2n} = F_n L_n$.

1.5. Udowodnij następujące związki dla liczb Fibonacciego:

$$(a) \sum_{i=0}^{n} F_i = F_0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1,$$

$$(b) \sum_{i=0}^{n-1} F_{2i+1} = F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n},$$

$$(c) \sum_{i=1}^{n} i\ F_i = F_1 + 2F_2 + 3F_3 + \cdots + nF_n = nF_{n+2} - F_{n+3} + 2,$$

$$(d) \sum_{i=1}^{n} i\ F_{2(n-i)+1} =$$
$$= F_{2n-1} + 2F_{2n-3} + 3F_{2n-5} + \cdots + (n-2)F_3 + (n-1)F_1 = F_{2n+1} - 1,$$

$$(e) \sum_{i=0}^{n} F_i^2 = F_0^2 + F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1},$$

gdzie $F_0 = 0$.

1.6. Pokaż, że dla $n \geq 0$ oraz $0 \leq i \ \leq n-1$ zachodzi związek

$$F_n = F_{i+1}F_{n-i} + F_i F_{n-i-1}.$$

1.7. Oblicz ułamek łańcuchowy

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}$$

1.8. Używając dowolnej metody, rozwiąż rekurencję trzeciego stopnia

$$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$$

z warunkami początkowymi $a_0 = 0$, $a_1 = a_2 = 1$.

1.9. Rozwiąż rekurencję niejednorodną $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + (-1)^n$ dla $n > 2$ z warunkami początkowymi $a_1 = a_2 = 1$

1.10. Załóż, że masa kolejnych krążków Wież Hanoi rośnie jak n^2 – jest to dość realistyczne, bo typowa zabawka ma krążki o promieniach z grubsza wzrastających jak n i o tej samej grubości. Jaką całkowitą masę trzeba przenieść przy wykonaniu algorytmu 1.1?

1.11. Jaka jest największa liczba obszarów powstająca przy podziale trójwymiarowej przestrzeni n płaszczyznami?

1.12. Rozwiąż rekurencję $a_{n+1} = a_n^2$, gdzie $n \geq 1$, z warunkiem $a_1 = 2$.

1.13. Na okręgu wybrano (losowo) n różnych punktów, a między nimi narysowano wszystkie możliwe cięciwy. Na ile obszarów zostało podzielone koło?

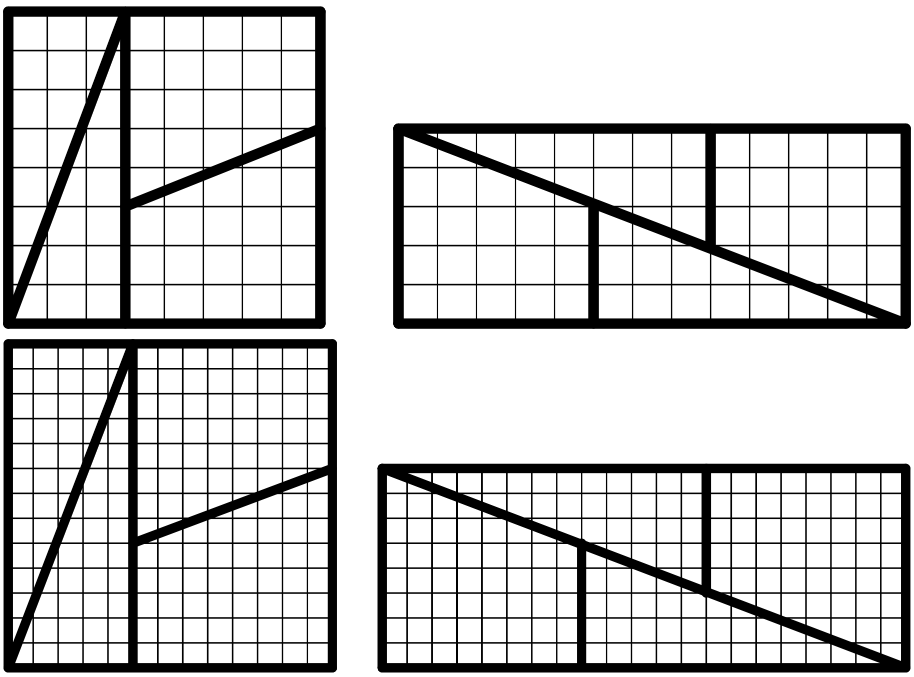
1.14. Wiedząc, że truteń płodzony jest bezpłciowo z królowej, a królowa płodzona jest płciowo z trutnia i królowej, narysuj drzewo genealogiczne przodków trutnia. Policz liczbę osobników w każdym pokoleniu tego drzewa. Co odkryłeś? Udowodnij odkryty fakt.

1.15. Zmodyfikuj model rozmnażania królików Fibonacciego tak, aby każdy miot zawierał k par. Zapisz i rozwiąż stosowną rekurencję.

1.16. Zmodyfikuj model rozmnażania królików Fibonacciego tak, aby młode dojrzewały m razy dłużej niż czas trwania ciąży. Zapisz stosowną rekurencję i równanie charakterystyczne.

1.17. Korzystając z (1.9) możemy z łatwością sprawdzić, że np. $5 \cdot 13 - 8^2 = 1$, $8 \cdot 21 - 13^2 = -1$ itd. Twierdzenie 1.3 jest podstawą zabawnej łamigłówki, przedstawionej na rys. 1.13. Licząc kwadraciki na lewej części górnego rysunku, otrzymujemy $8 \cdot 8 = 64$, podczas gdy zliczenie po prawej stronie daje $5 \cdot 13 = 65$. Dzięki rozcięciu na kawałki zyskaliśmy jedną kratkę! Natomiast dla dolnego przypadku po lewej stronie $13 \cdot 13 = 169$, a po prawej $8 \cdot 21 = 168$. Tym razem gubimy jedna kratkę! Gdzie leży oszustwo?

1.18. Nostalgiczna powtórka z geometrii: udowodnij, że przekątne pentagramu dzielą się w stosunku, będącym złotym podziałem, zob. rys. 1.7.



Rysunek 1.13: Dwie łamigłówki oparte o tożsamość Cassiniego, pokazujące paradoksalnie, że $64 = 65$ i $169 = 168$! Kwadraty po lewej stronie rozcinamy wzdłuż linii i składamy tak, jak ukazano po prawej stronie. Dla górnego rys. 1.13 zliczenie kratek po lewej stronie daje $8 \cdot 8 = 64$, podczas gdy po prawej stronie mamy $5 \cdot 13 = 65$. Podobnie, dla dolnego przypadku z rys. 1.13 otrzymujemy $13 \cdot 13 = 169$, a $8 \cdot 21 = 168$

Rysunek 1.14: Apollo Belwederski (http://hamlet.edu.pl/shi/galeria/show.php?id0=3&id1=0). Stosunek R wzrostu do odległości pępka od podstawy jest bliski ϕ. Jeśli zmierzyć na rysunku wzrost od czubka prawej stopy do połowy czupryny, dostajemy $R = 1.61 \simeq \phi$ z dokładnością pomiaru ok. 1%

1.19. Z linijką w ręce doszukaj się złotego podziału w otaczających Cię przedmiotach.

1.20. Apollo Belwederski (zob. rys. 1.14 Leocharesa[21], zob. rys. 1.14, ucieleśnia ideał proporcji ciała ludzkiego. W szczególności stosunek jego wzrostu do odległości pępka od podstawy jest bardzo bliski złotemu podziałowi ϕ. Dokonaj tego pomiaru na sobie!

1.21. Gracz wchodzi do kasyna, posiadając 100 monet, rozbicie banku następuje, gdy gracz posiądzie 200 monet. Prawdopodobieństwo wygranej wynosi $p = 0.49$. Krzysztof ma strategię taką, że wychodzi po wygraniu 50 monet, a Ludwik po przegraniu 50 monet. Jakie jest prawdopodobieństwo tych zdarzeń? Który z graczy będzie grał dłużej?

1.22. Jakie jest prawdopodobieństwo, że gracz w zadaniu o ruinie gracza osiągnie w trakcie gry ponownie swój początkowy stan posiadania?

1.23. Pewien profesor z Krakowa po dwóch piwach przechadza się ul. Sienkiewicza w Kielcach i na każdym skrzyżowaniu zupełnie losowo idzie albo w kierunku dworca PKP, albo w kierunku przeciwnym, gdzie ul. Sienkiewicza rozciąga się w nieskończoność. Jakie jest prawdopodobieństwo i średni czas dotarcia na dworzec?

1.24. Rozważ uogólnienie algorytmu Karatsuby i Ofmana na przypadek, gdzie liczba n dzielona jest na trzy mniejsze liczby [15] (tzw. algorytm Tooma[22]

[21] Leochares, IV w. pne., grecki rzeźbiarz.

[22] Andrej Toom (1942-), rosyjski matematyk.

i Cooka[23]). Jaka jest złożoność tego algorytmu, czyli asymptotyczna zależność czasu wykonywania od n dla dużych n? Jakie jest uogólnienie, gdy podział dokonywany jest na s liczb?

1.25. Znajdź zachowanie asymptotyczne rekurencji

$$T(x) = \frac{1}{2} T\left(\frac{x}{2}\right) + 2T\left(\frac{x}{4}\right) + x^{\alpha}.$$

1.26. Rozważ algorytm *przeszukiwania binarnego* (ang. *binary search*) uporządkowanej rosnąco listy L o długości n, zawierającej obiekty p_i. Algorytm działa w następujący sposób: szukamy obiektu a, który jest zawarty gdzieś w liście. Porównujemy go z obiektem $b = p_{\lfloor n/2 \rfloor}$, tj. obiektem najbliżej środka listy. Jeśli $a = b$, kończymy, bo znaleźliśmy nasz obiekt. Jeśli $a > b$, przeszukujemy dolną część listy, tj. poniżej b. Jeśli $a < b$, przeszukujemy górną część listy. Czynność powtarzamy rekurencyjnie. Znajdź złożoność algorytmu.

1.27. Rozważ algorytm *sortowania przez scalanie* (ang. *merge sort*) listy L o długości n, w którym lista dzielona jest rekurencyjnie na dwie mniejsze listy L_1 i L_2 o długościach $\lceil n/2 \rceil$ oraz $\lfloor n/2 \rfloor$, każda z tych list jest sortowana, a wynik jest scalany w następujący sposób: 1) tworzymy wskaźniki w_1 i w_2 oraz ustawiamy je na początku list L_1 i L_2, $w_1 = 1$, $w_2 = 1$. Tworzymy pustą listę wynikową K. 2) Jeżeli $L_1(w_1) \leq L_2(w_2)$, dopisujemy $L_1(w_1)$ na końcu K i zwiększamy w_1 o jeden, w przeciwnym przypadku dopisujemy $L_2(w_2)$ na końcu K i zwiększamy w_2 o jeden. Powtarzamy krok 2) aż wszystkie wyrazy z list L_1 i L_2 zostaną wpisane do K. Zapisz stosowną rekurencję „dziel i rządź" i oszacuj jej czas wykonywania dla dużych n. Algorytm ten pochodzi od Johna von Neumanna[24].

[23] Stephen Arthur Cook (1939-), amerykański informatyk.

[24] John von Neumann (1903-1957), urodzony na Węgrzech i pracujący w USA matematyk i fizyk. Przyczynił się bardzo istotnie do rozwoju analizy funkcjonalnej, mechaniki kwantowej, teorii mnogości, topologii, teorii gier, informatyki, statystyki, a także hydrodynamiki reakcji termojądrowych, które badał w ramach projektu Manhattan.