Modele kwarkowe

w nieperturbacyjnej fizyce oddziaływań silnych

Wojciech Broniowski

Instytut Fizyki Jądrowej im. H. Niewodniczańskiego,

Polska Akademia Nauk

ul. Radzikowskiego 152, 31-342 Kraków

Skrypt wykładu dla Studium Doktoranckiego IFJ

(Wersja robocza: `http://www.ifj.edu.pl/~broniows/pp/wyklad.ps`

9-30 VI 1999, 11-25 X 2000, 10-24 X 2001, 17-31 III 2004

Spis treści

Pamięci Prof. Zbigniewa Bochnackiego

...
Three quarks for Muster Murk!
Sure he hasn't got much of a bark
And sure any he has it's all beside the mark. ...

James Joyce, *Finnegans Wake*

Część I

Wykład

1

Wstęp

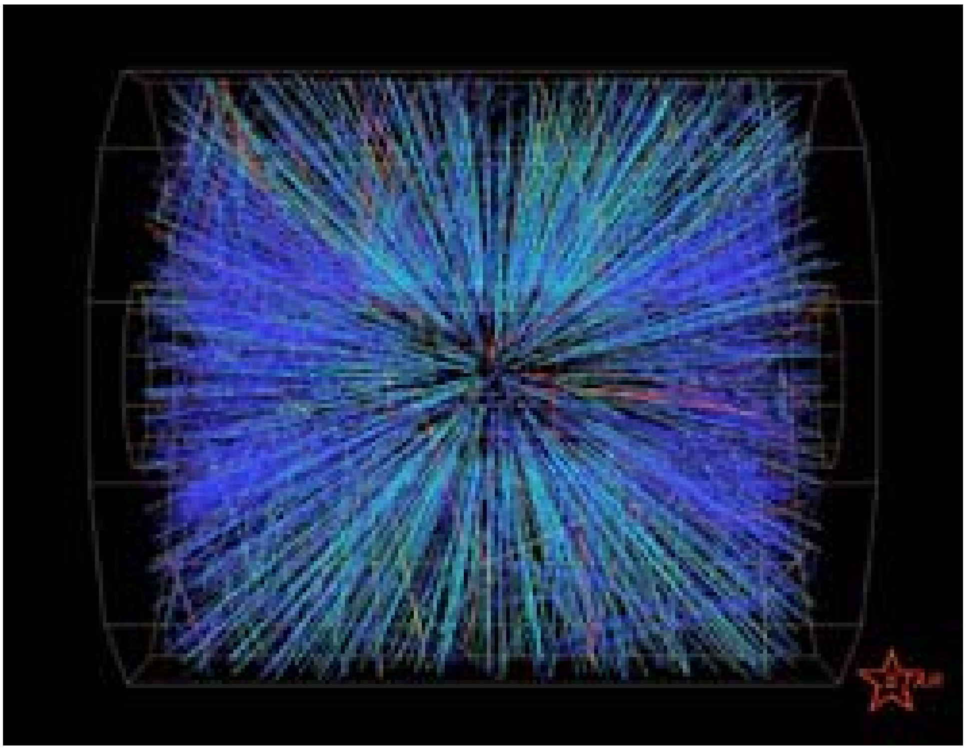
1.1 Cel wykładu

Celem niniejszego wykładu jest możliwie przystępne przedstawienie modeli kwarkowych stosowanych na przestrzeni ostatnich 30-tu lat w badaniach zjawisk nieperturbacyjnych fizyki oddziaływań silnych. Różnorodność i pomysłowość tych przybliżonych metod związana jest z brakiem ścisłej metody rachunkowej, pozwalającej na opis zjawisk nieperturbacyjnych w bezpośrednim oparciu o chromodynamikę (wyjątkiem są tu pewne wyniki rachunków QCD na siatkach). Proste modele, bazujące na podstawowych cechach oddziaływań silnych, jak np. uwięzienie kwarków, czy też techniki oparte o symetrie, pozwalają zrozumieć i wytłumaczyć wiele prawidłowości i współzależności Świata Hadronów, niejednokrotnie z zadziwiającą prostotą i dokładnością. Wychodząc z ogólnych własności chromodynamiki i spektrum hadronów potrafimy wykazać bardzo ważne fakty, jak spontaniczne łamanie symetrii chiralnej w próżni, czy też dowieść, że pion jest najlżejszym hadronem (przykład tzw. nierówności QCD).

Wykład ten nie stanowi systematycznego przeglądu, co ze względu na obszerność i zaawansowanie tematu nie byłoby możliwe w tak krótkim czasie. Pragniemy natomiast w możliwie przystępny sposób zaznajomić słuchacza z najciekawszymi i najbardziej owocnymi podejściami teoretycznymi, odsyłając dociekliwszych do licznej literatury. Wykład koncentruje się na trzech aspektach modeli kwarkowych: symetria zapachowa i teoriogrupowy model kwarków (cz. 2), zjawisko uwięzienia koloru i modele worków (cz. 4), oraz symetria chiralna i oparte o nią modele kwarkowe (cz. 5).

1.2 Trochę historii

Wiek XX to wiek badań mikroświata, gdzie obserwacje cząstek splatają się w nierozerwalnym łańcuchu z odkryciami rządzących nimi praw: mechaniki kwantowej, teorii pola, symetrii cechowania, modelu standardowego oddziaływań elektrosłabych, wreszcie chromodynamiki kwantowej z jej asymtotyczną swobodą i uwięzieniem kwarków. Minął cały wiek od pierwszej obserwacji protonu (wówczas jeszcze "nie ochrzczonego") przez Wilhelma Wiena w dowiadczeniach ze zjonizowanymi gazami w rurze wyładowczej. Obecnie tysiącosobowe ze-

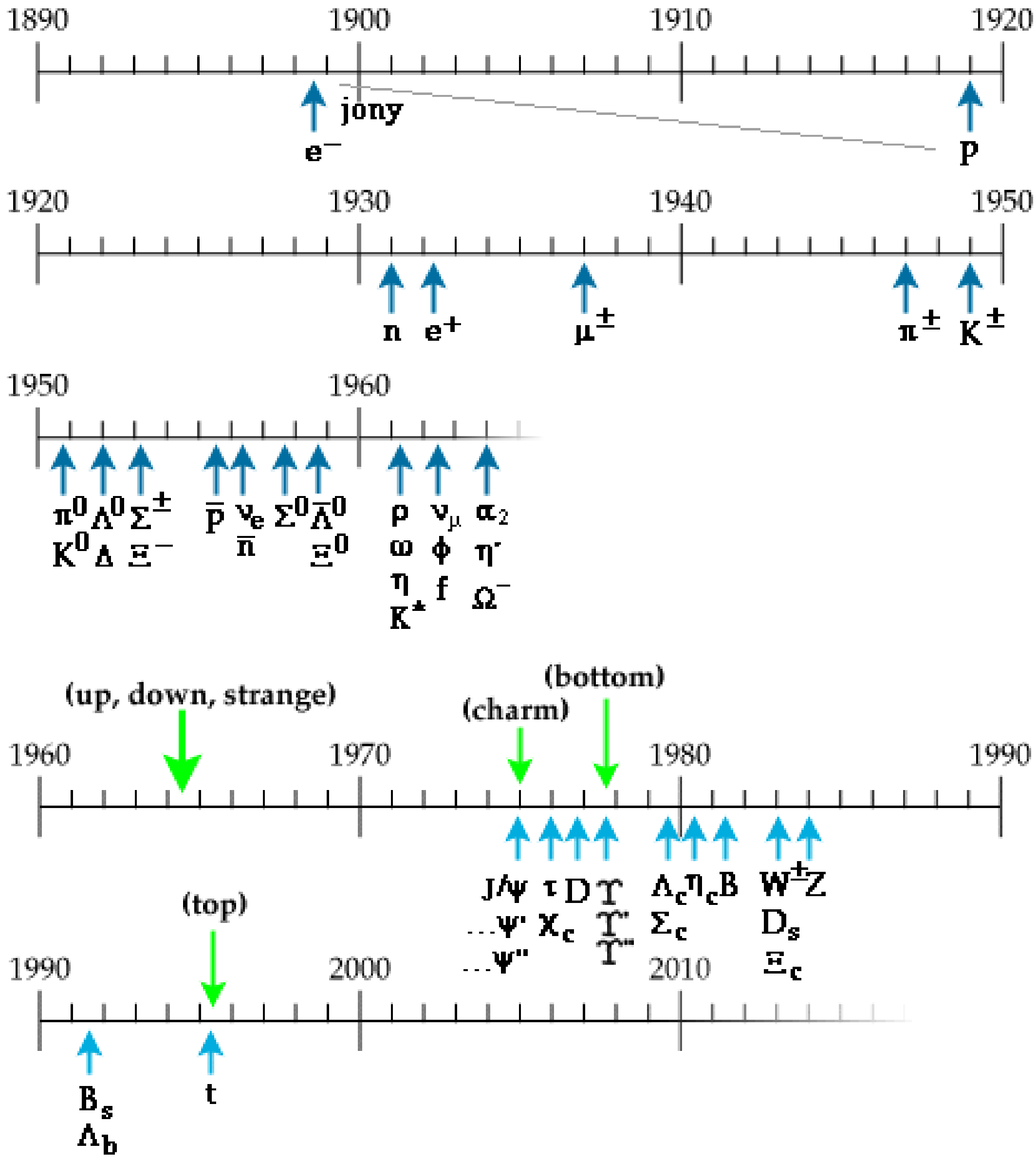


Rys. 1.1: Jedno z pierwszych zdarzeń zaobserwowanych w detektorze STAR na zderzaczu RHIC (Relativistic Heavy Ion Collider) w Brookhaven, lipiec 2000. W ultrarelatywistycznym zderzeniu dwóch jąder złota produkowane są tysiące cząstek *(http://www.rhic.bnl.gov)*.

społy badawcze prowadzą wieloletnie programy doświadczalne na urządzeniach kosztujących milardy dolarów, produkujących tysiące cząstek w pojedynczych zderzeniach (Rys. 1.1). Z tą perspektywą końca wieku przypatrzmy się kamieniom milowym odkryć w fizyce hadronów.

Rys. 1.2 przedstawia odkrycia cząstek elementarnych na osi czasu, natomiast poniższe zestawienie ukazuje najważniejsze wydarzenia z naciskiem na fizykę hadronów, będącą przedmiotem tego wykładu.

- 1898 Wilhelm Wien, a następnie w 1910 Joseph J. Thompson obserwują dodatnio naładowane cząstki o masie wodoru podczas doświadczeń ze zjonizowanymi gazami w rurach wyładowczych
- 1909 Hans Geiger, Ernest Marsden i Ernest Rutherford rozpraszają cząstki α na folii złota i wnioskują o istnieniu małych, ciężkich, dodatnio naładowanych cząstek w materii
- 1911 Ernest Rutherford wysuwa hipotezę jądra atomowego
- 1919 Ernest Rutherford pokazuje, że jądro azotu bombardowane cząstkami α emituje dodatnio naładowane cząstki o masie wodoru. W 1920 chrzci je jako *protony*



Rys. 1.2: Najważniejsze odkrycia cząstek elementarnych (na podstawie *Historia cząstek*, *http://www.ifj.edu.pl*)

- 1921 James Chadwick i E. S. Bieler wysuwają koncepcję sił jądrowych
- 1926 Erwin Schroedinger pisze swoje równanie
- 1928 Paul A. M. Dirac znajduje swoje równanie opisujące relatywistyczne cząstki elementarne o spinie 1/2
- 1930 Wolfgang Pauli postuluje istnienie neutrina
- 1932 James Chadwick odkrywa neutron bombardując beryl cząstkami α

- 1933 Enrico Fermi odkrywa oddziaływania słabe
- 1933-35 Hideki Yukawa tworzy teorię sił jądrowych opartych o wymianę *mezonów*
- 1936 Odkrycie mionu (μ) w promieniowaniu kosmicznym (poczatkowo sądzono, że odkryto mezon Yukawy!)
- 1947 Odkrycie naładowanego pionu $\pi^{\pm}$ w promieniowaniu kosmicznym
- 1947 Richard Feynman wymyśla swoje diagramy, co ułatwia rachunki perturbacyjnej teorii pola
- 1949 Odkrycie kaonu K^+ poprzez jego rozpad
- 1950 Odkrycie π^0 w promieniowaniu kosmicznym, oraz w synchrocyklotronie w Berkeley
- 1951 Odkrycie Λ^0 i K^0 w promieniowaniu kosmicznym
- 1952 Odkrycie izobaru Δ w czterech stanach ładunkowych: Δ^{++}, Δ^+, Δ^0 i Δ^-
- 1953– Lawina odkryć nowych cząstek
- 1953 Marian Danysz i Jerzy Pniewski odkrywają i badają hiperjądra
- 1953-57 Rozpraszanie elektronów ukazuje strukturę jąder
- 1954 Chen Ning Yang i Robert Mills tworzą teorię cechowania
- 1961 Murray Gell-Mann i Yuval Ne'eman niezależnie proponują prosty schemat klasyfikacji cząstek oparty o grupę $SU(3)$ (tzw. *poósmna scieżka*). Przewiduje on m.in. barion o potrójnej dziwności, Ω^-, odkryty w 1964
- 1964 Murray Gell-Mann i George Zweig wprowadzają kwarki (asy) o trzech zapachach: dolnym (down, d), górnym (up, u) i dziwnym (strange, s). Mezony składają sie z pary kwark-antykwark, a bariony z trzech kwarków
- 1964 Sugestie istnienia czwartego kwarku o nowym "zapachu". Sheldon Glashow i James Bjorken nazywaja go "powabnym" (charmed, c)
- 1965 Oscar W. Greenberg, M. Y. Han i Yoichiro Nambu wprowadzają nową liczbę kwantową, nazwaną *kolorem*, dla kwarków. Umożliwia to zgodność z twierdzeniem o spinie i statystyce. Wszystkie obserwowane hadrony nie niosą koloru (są neutralne, "białe")
- 1967 Steven Weinberg i Abdus Salam proponują teorię unifikującą oddziaływania słabe elektromagnetyczne. Postulat istnienia bozonu Z_0 i cząstki Higgsa (do dziś nie zaobserwowanej!)

- 1968-69 Odkrycie partonów w eksperymentach na akceleratorze w Stanford. James D. Bjorken i Richard Feynman wytłumaczyli wyniki głeboko nieelastycznego rozpraszania elektronów na protonach wykazując, że wewnątrz protonów znajdują sie małe, słabo oddziałujace rdzenie – partony
- 1973 Harald Fritzsch i Murray Gell-Mann postulują *chromodynamikę kwantową (QCD)*. Jest to teoria pola z cechowaniem oddziaływujących kwarków i *gluonów*
- 1973 David Politzer, David Gross i Frank Wilczek wykazują, że QCD posiada *asymptotyczną swobodę*, dzięki czemu partony mogą być zidentyfikowane z kwarkami
- 1974 Powstaje Model Standardowy oddziaływań elektrosłabych
- 1974 Grupy Samuela Tinga i Burtona Richtera niezalenie odkrywają czastke J/ψ, będącą stanem związanym kwarków c i $\bar{c}$
- 1976 Gerson Goldhaber i Francois Pierre odkrywają mezon D^0, będący stanem związanym $\bar{u}$ i c
- 1976 Martin Perl odkrywa lepton τ, należący do trzeciej rodziny cząstek
- 1977 Leon Lederman odkrywa w Fermilab kwark denny (bottom, b)
- 1979 Strumienie (jety) w eksperymentach na akceleratorze PETRA w DESY pośrednio potwierdzają istnienie gluonów
- 1983 Zespoły, którymi kierują Carlo Rubbia i Simon Van der Meer, odkrywają w CERN-ie bozony pośredniczące oddziaływań słabych: $W^{\pm}$ i Z_0
- 1992 Odkrycie oscylacji neutrin w Kamiokande
- 1995 Eksperymenty CDF i D0 w Fermilab odkrywają kwark szczytowy (top, t)
- 2003 Odkrycie pentakwarku (SPRING, ITEP, TJLAB, ELSA, CERN/FNAL)

2

Dlaczego kwarki?

2.1 Teoriogrupowy model kwarków

> *Był sobie raz spór w fizyce cząstek. Niektórzy fizycy*[1] *zaprzeczali istnieniu cząstek bardziej elementarnych niż hadrony i szukali samouzgodnionej interpretacji, w której wszystkie stany hadronowe, zarówno stabilne jak i rezonanse, byłyby równie elementarne. Inni*[2]*, onieśmieleni wszechogarniającą demokracją hadronow, upierali się, że istnieje mała liczba fundamentalnych składników i proste podstawowe oddziaływanie. Przy użyciu tych bardziej fundamentalnych obiektów spektroskopia hadronów powinna dać się jakościowo opisać i w zasadzie zrozumieć dokładnie tak, jak fizyka atomowa czy jądrowa...*
> [A. De Rujula, H. Georgi, S. L. Glashow, *Hadron masses in a gauge theory*, Phys. Rev. D12 (1975) 147]

W miarę odkrywania coraz to nowych rezonasów, oczywistą stała się konieczność ich klasyfikacji, umożliwiającej proste poruszanie się w dżungli stanów hadronowych. Największe zasługi położyli tu Gell-Mann, Ne'eman i Zweig. Wprowadzenie przez Gell-Manna i Zweiga *kwarków* jako "elementarnych cegiełek" pozwoliło na bardzo proste zrozumienie liczb kwantowych hadronów.

Tabela 2.1 przedstawia kwarki. Lczby kwantowe I_3, B, s, c, b, t sa addytywne. Ładunek elektryczny dany jest wzorem Gell-Manna–Nishijimy,

	B	Q/e	I	I_3	s	c	b	t	m (MeV)	flavor (zapach)
d	$\frac{1}{3}$	-$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	-$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	5 $(0 \div 5)$	down (dolny)
u	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	7 $(3 \div 9)$	up (górny)
s	$\frac{1}{3}$	-$\frac{1}{3}$	0	0	-1	0	0	0	150 $(60 \div 170)$	strange (dziwny)
c	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	0	1	0	0	$1100 \div 1400$	charmed (powabny)
b	$\frac{1}{3}$	-$\frac{1}{3}$	0	0	0	0	-1	0	$4100 \div 4400$	bottom (denny)
t	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	0	0	0	1	~ 170000	top (szczytowy)

Tabela 2.1: Kwarki

$$Q = e\left(I_3 + \frac{1}{2}(B + s + c + b + t)\right), \tag{2.1}$$

który jest słuszny dla kwarków, oraz (poprzez addytywność) dla wszystkich hadronów. Antykwarki posiadają I_3, B, s, c, b, t przeciwne do kwarków. Kwarki oraz leptony można połączyć w trzy rodziny (fakt potwierdzony doświadczalnie):

$$\begin{aligned} &d, u, e, \nu_e, \\ &s, c, \mu, \nu_\mu, \\ &b, t, \tau, \nu_\tau, \end{aligned} \tag{2.2}$$

i analogicznie dla antykwarków i antyleptonów. Kwarki u, d i s określane są mianem lekkich, pozostałe to kwarki ciężkie.

Mezony tworzone są przez parę kwark-antykwark, $q\bar{q}'$, gdzie q i q' oznaczają jeden z czterech zapachów. *Bariony* są stanami o trzech kwarkach, $qq'q''$, a *antybariony* o trzech antykwarkach, $\bar{q}\bar{q}'\bar{q}''$. Na przyklad, π^+ to $u\bar{d}$, proton uud, neutron udd. Mezony klasyfikowane są jako lekkie (u, d, s), ciężko-lekkie (kwark (antykwark) ciężki – antykwark (kwark) lekki), oraz ciężkie kwarkonia (kwark ciężki – antykwark ciężki).

W tableli 2.1 uderzający jest fakt nagłego wzrostu masy kwarków, od kilku MeV to 170 GeV. Ten problem hierarchii pozostaje, oczywiście, nierozwiązany.

2.2 Symetria zapachowa

Jeszcze przed wprowadzeniem kwarków, Gell-Mann i Nishijima zauważyli, że hadrony można połączyć w multiplety (zob. Rys.B-B w dodatku B). Na przykład masy pionu neuralnego i naładowanego różnią się tylko o 5MeV, a masy protonu i neutronu o 1MeV. Rozszczepienia te, wynikające z efektów elektromagnetycznych oraz małych różnic mas kwarków u i d, są znikome w porównaniu z masą hadronów. Tak więc, z punktu widzenia oddziaływań silnych, trzy stany ładunkowe pionu, proton i neutron, a także inne cząstki, tworzą *multiplety grupy symetrii zapachowej.* Symetria ta polega na zamianie kwarków. Na przykład neutron, udd, możemy utworzyć z protonu, uud, poprzez zamianę u na d. Z Tabeli 2.1 widzimy, że zarówno kwark u jak i d są praktycznie bezmasowe (w skali kilkuset MeV), a więc, z wyjątkim zapachu, takie same. Zatem zamiana u na d "nic nie kosztuje", i masy protonu i neutronu są zdegenerowane. Konstrukcję można uogólnić dla trzech zapachów. Masa kwarku dziwnego, m_s, różni się od mas kwarków u i d, ale różnica ta jest niewielka w skali mas hadronów i możemy dalej mówić o (nieco *złamanej*) symetrii zapachowej. Tak więc, zamiany $u \longleftrightarrow d \longleftrightarrow s$ pozostawiają nas w obrębie danego multipletu grupującego stany o bardzo bliskich masach.

Te przestawienia kwarków opisywane są przez grupę tzw. specjalnych transformacji unitarnych w przetrzeni zapachu, którą oznaczamy jako $SU(N_f)_F$, gdzie N_f oznacza wymiar przestrzeni (ilość zapachów). Dla $N = 3$ mamy $SU(3)_F$, gdzie indeks F przypomina, że chodzi o zapach. W przypadku mezonów, kwarki i antykwarki o trzech zapachach można połaczyć na 9 sposobów. Okazuje się, że tworzą one dwa multiplety grupy $SU(3)_F$: singlet i oktet. Teoriogrupowo, składanie kwarku a antykwarkiem i rozkład na reprezentacje nieredukowalne zapisuje się jako

$$3 \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8.$$

Analogicznie, składając trzy kwarki w barionie otrzymujemy

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10,$$

czyli singlet, dwa oktety i dekuplet. Częste pojawianie się oktetu zainspirowało Gell-Manna i Ne'emana do nazwania schamatu "Poósmną ścieżką" (The Eightfold Way), w nawiązaniu do ośmiu buddyjskich ścieżek osiągnięcia doskonałości.

Do przykładowego problemu konstrukcji funcji falowych barionów powrócimy w rozdziale 2.8.

2.3 Kolor

Model kwarków musiał uporać się z dwoma bardzo poważnymi problemami. Piewszym z nich było rzekome łamanie bardzo podstawowego twierdzenia o związku spinu ze statystyką. Aby opisać spektroskopię hadronów, kwarki muszą mieć przypisany spin 1/2, czyli są *fermionami*. A zatem i ich funkcja falowa musi być *antysymetryczna* względem zamiany dwóch dowolnych kwarków. W szczególności, dwa kwarki jako Fermiony nie mogą zajmować tego samego stanu, zgodnie z zasadą wykluczania Pauliego. Tu pojawił się istotny kłopot, ponieważ wiele barionów wymaga, aby umieścić dwa lub trzy identyczne kwarki w tym samym stanie (np. barion $\Delta^{++} = uuu$). Problem został rozwiazany poprzez wprowadzenie przez Greenberga, Hana i Nambu *"koloru"* — dodatkowego ładunku. Kwark posiada jeden z trzech kolorów: czerwony (r), niebieski (b), lub zielony (g) Następnie czyni się nadrzędne założenie: *wszystkie stany fizyczne są neutralne względem koloru* (singlety koloru, "białe"). Jest to *hipoteza*, poparta doświadczalnym faktem braku obserwacji stanów kolorowych.

Grupę transformacji w przestrzeni koloru oznacza się jako $SU(3)_c$. Na mocy hipotezy neutralności kolorowej stanów fizycznych, część funkcji falowej związana z kolorem ma postać

$$\frac{1}{\sqrt{3}} q_a \bar{q}^a = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(r\bar{r} + b\bar{b} + g\bar{g} \right) \tag{2.3}$$

dla mezonów, oraz

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \epsilon^{abc} q_a q_b q_c = \frac{1}{\sqrt{6}} \left(rbg + bgr + grb - brg - rgb - gbr \right) \tag{2.4}$$

dla barionów, gdzie a, b, c są indeksami koloru, a ϵ^{abc} jet tensorem Levi-Civity. Tak więc w mezonie kwark i antykwark mają przeciwne kolory, a w barionie kolor każdego kwarku jest różny. Wracając do naszego przykładu ze stanem Δ^{++}, zauważmy, że teraz zasada Pauliego jest spełniona, ponieważ każdy kwark ma inny kolor. Problem statystyki i spinu kwarków został rozwiązany.

Hipoteza neutralności kolorowej obserwowanych stanów hadronowych wiąże się z tzw. *uwięzieniem* koloru, (color confinement) [1] która mówi, że obiekty kolorowe (kwarki, gluony, di-kwarki, ...) nie mogą być zrealizowane jako tzw. stany asymptotyczne (czyli oddzielone od innych układów hadronów). Tak więc kwarki nie dają się na trwałe uwolnić z hadronów. Do dziś nie mamy teoretycznego wyjaśnienia, dlaczego tak jest – problem uwięzienia koloru pozostaje jedną z największych zagadek oddziaływań silnych.

2.4 Stany związane kwarków i rezonanse hadronowe

2.5 Zachowanie zapachu w oddziaływaniach silnych

2.6 R w rozpraszaniu e^+e^-

Jednym z koronnych dowodów na realność kwarków jako obiektów dynamicznych jest zależność energetyczna przekroju czynnego na produkcję hadronów w rozpraszaniu e^+e^-.

Wielkość R zefiniowana jest jako

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \to \text{hadrony})}{\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)}. \tag{2.5}$$

Rys. 2.2 przedstawia diagramy dla procesów $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ oraz $e^+e^- \to q\bar{q}$. Różnica między tymi diagramami tkwi w wielkości ładunków elektrycznych w jednym z wierzchołków, oraz w tym, że diagram kwarkowy występuje trzykroć, ponieważ kwarki występują w trzech kolorach. Przekrój czynny proporcjonalny jest do kwadratu amplitudy, a zatem procesy z Rys. 2.2 prowadzą do wyniku

$$R \simeq \frac{3\sum_{f=u,d,s,c,...} Q_f^2}{e^2} = 3\left(\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + ...\right), \tag{2.6}$$

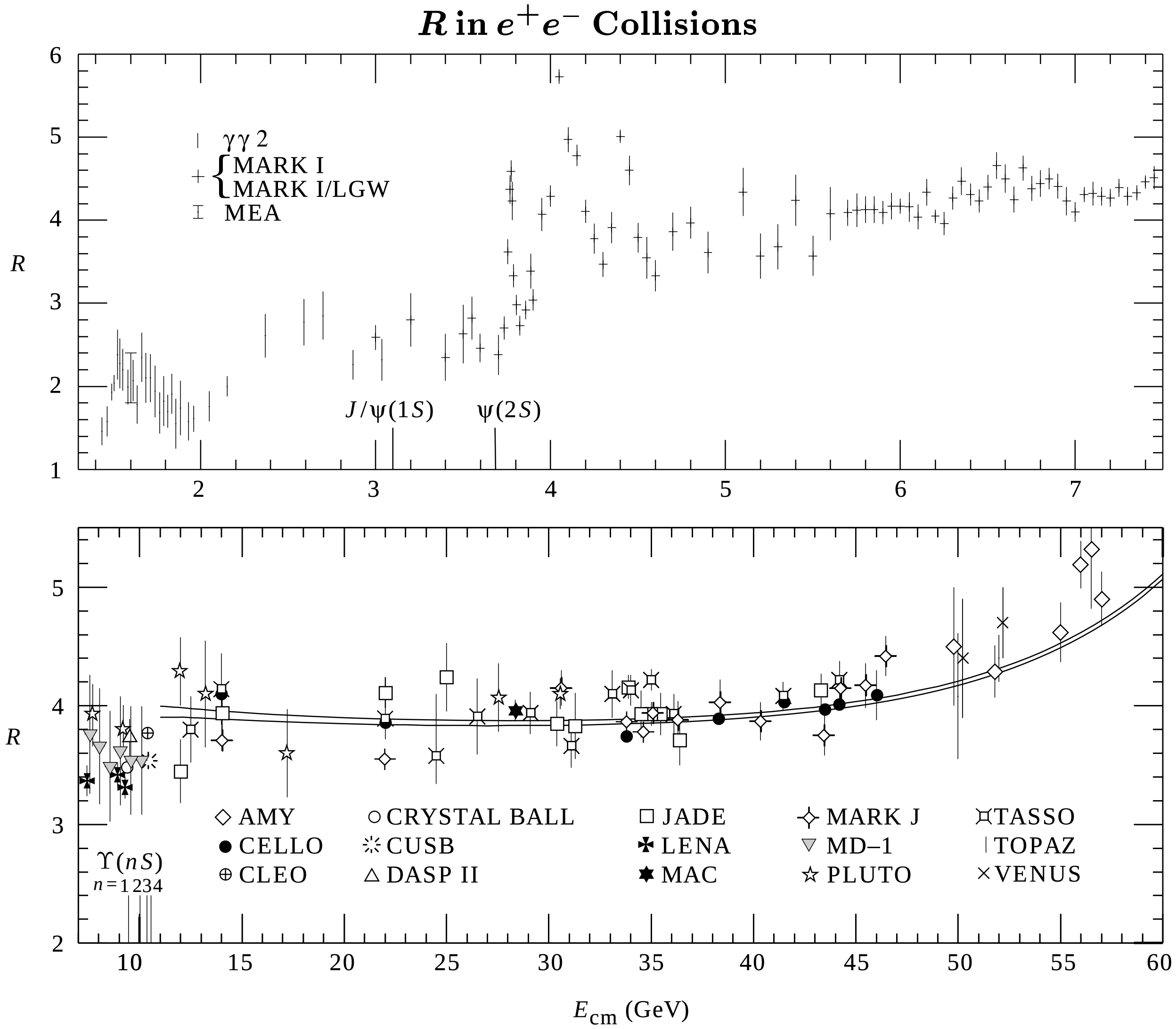
gdzie Q_f oznacza ładunek elektryczny kwarku o zapachu f. Do energii $\sim 2m_c$ jedynie kwarki u, d i s daja przyczynki, zatem $R \sim 2$. Dla energii miedzy $2m_c$ i $2m_b$ otrzymujemy $R \sim 3\frac{1}{3}$, powyzej $2m_b$ mamy $R \sim 3\frac{2}{3}$. Te przewidywania z grubsza zgadzają się z wynikami doświadczalnymi (zob. Rys. 2.1). Dokładniejszy rachunek uwzględnia obecność rezonansów, tzw. poprawki radiacyjne, oraz wyższe efekty oddziaływań silnych i elektrosłabych. Gdyby nie było koloru, R byłoby 3 razy mniejsze i niemożliwe byłoby uzyskanie zgodności teorii i danych doświadczalnych.

2.7 Rozpad $\pi^0 \to \gamma\gamma$

Innego dowodu na obecność trzech kolorów dostarcza rozpad $\pi^0 \to \gamma\gamma$, którego amplitudę przedstawia diagram 2.3. Amplituda jest proporcjonalna do czynnika

$$3\sum_f I_3^f Q_f^2 = 3 \times 1/2 \times (4/9 - 1/9), \tag{2.7}$$

[1] Zjawisko to dawniej ch©tnie okre?lano mianem *niewoli podczerwonej* (infrared slavory)

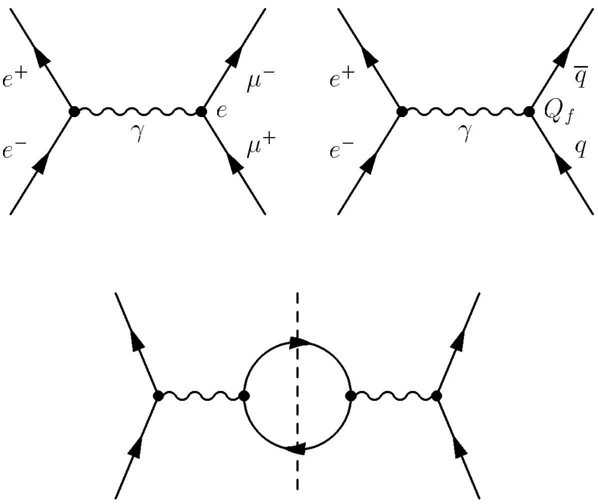


Rys. 2.1: Doświadczalna zależność R w rozpraszaniu e^+e^- od energii w układzie środka masy. Linie ciągłe na dolnym rysunku są przewidywaniami teoretycznymi wyprowadzonymi z QCD z trzema kolorami (przedruk z [**?**]).

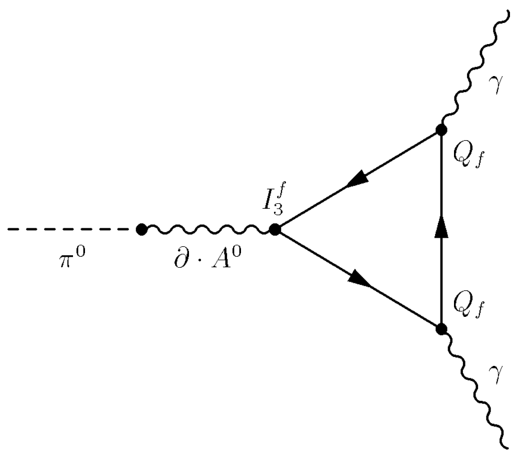
gdzie czynnik 3 jest ilością kolorow, I_3^f izospinem kwarku o zapachu f, a Q_f jego ładunkiem elektrycznym. Szerokosc π^0 obliczona wg. Rys. 2.3 wynosi

$$\Gamma_{\pi^0 \to \gamma\gamma} = \frac{\alpha_{QED}^2 m_\pi^3}{64\pi^3 F_\pi^2}, \tag{2.8}$$

gdzie $\alpha_{QED} = 1/137.04$ jest elektromagnetyczną stałą struktury subtelnej, a $F_\pi = 93$MeV jest stałą rozpadu pionu. Wzór 2.8 daje $\Gamma_{\pi^0 \to \gamma\gamma} = 7.6$eV, podczas gdy doświadczalnie $\Gamma_{\pi^0 \to \gamma\gamma} = (7.4 \pm 1.5)$eV. Bez czynnika liczby kolorów wynik teoretyczny byłby aż 9 razy mniejszy!



Rys. 2.2: Procesy $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ i $e^+e^- \to q\overline{q}$ (góra) oraz kwardat amplitudy tych procesów (dół).



Rys. 2.3: Amplituda procesu $\pi^0 \to \gamma\gamma$.

1

2.8 Konstrukcja funkcji falowych nukleonu i izobaru Δ

Bariony są stanami zwiazanymi trzech kwarków. Oznaczmy stan pojedynczego kwarku jako $|q\rangle$. Funcja falowa stanu zwiazanego trzech kwarków o spinie j, rzucie spinu m, izospinie I i rzucie izospinu I_3 ma postać

$$\Psi_{j,m;I,I_3}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3) = \phi_c \Phi_{sf} \chi(\vec{x}_1 - \vec{x}_2, \vec{x}_2 - \vec{x}_3), \tag{2.9}$$

gdzie ϕ_c oznacza część kolorową, Φ_{sf} cześć spinowo-zapachową, a χ część przestrzenną. Położenie i-tego kwarku oznaczyliśmy jako x_i. Niezmienniczość względem translacji powoduje, że χ zależy tylko od względnych położeń kwarków. Funkcja falowa $\Psi_{j,m;I,I_3}$ spełnia następujace warunki:

1. jest antysymetryczna przy zamianie dwóch dowolnych kwarków miejscami (statystyka Fermiego-Diraca),
2. jest singletem koloru (hipoteza, że stany fizyczne są "białe").

Zajmijmy sie najpierw czescia $\phi_c \Phi_{sf}$. Funkcja ta zawiera iloczyny trzech funkcji pojedynczego kwarku, $|q(1)\rangle|q'(2)\rangle|q''(3)\rangle$, gdzie $1, 2, 3$ numeruja kwark, a primy onaczaja, ze stany q, q' i q'' sa w ogólności różne. Wygodnie jest przyjąć konwencję wypisywania funkcji jednocząstkowych w kolejności $1, 2, 3$. Pozwala to na prostszą notację:

$$|q(1)\rangle|q'(2)\rangle|q''(3)\rangle \equiv |qq'q''\rangle. \tag{2.10}$$

Zdefiniujmy teraz dla wygody operator symetryzujacy $\{.\}$ i antysymetryzujacy $[.]$ trzech obiektów:

$$\begin{aligned}
\{a, b, c\} &= \frac{1}{\sqrt{6}} \left(abc + cab + bca + bac + acb + cba \right), && (2.11) \\
\{a, a, b\} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(aab + aba + baa \right), && (2.12) \\
[a, b, c] &= \frac{1}{\sqrt{6}} \left(abc + cab + bca - bac - acb - cba \right). && (2.13)
\end{aligned}$$

Warunek (2) oznacza, że część kolorowa funkcji falowej ma postać singletu:

$$\phi_c = \frac{1}{\sqrt{6}} \left(|rbg\rangle + |bgr\rangle + |grb\rangle - |brg\rangle - |rgb\rangle - |gbr\rangle \right) = |[r, b, g]\rangle, \tag{2.14}$$

czyli jest *antysymetryczna* ze względu na zamianę miejscami dwóch dowolnych kwarków. W związku z tym warunek (1) oznacza, że pozostała część funkcji falowej barionu, czyli $\Phi_{sf}\chi$ musi być *symetryczna*. Okazuje się, że dla najniżej leżących barionów, takich jak N i $\Delta(1232)$, funkcja χ jest symetryczna (do tego problemu wrócimy w rozdziale 4.1). Tak wiec Φ_{sf} musi być symetryczna. Pozwala to na prostą konstrukcję spinowo-zapachowych funkcji falowych Φ_{sf}, którą przedstawiamy poniżej.

Zacznijmy od stanu Δ^{++}, dla którego $I = \frac{3}{2}$, $I_3 = \frac{3}{2}$, $j = \frac{3}{2}$, oraz $m = \frac{3}{2}$:

$$|\Delta^{++}, m = \frac{3}{2}\rangle_{sf} = |u \uparrow u \uparrow u \uparrow\rangle \tag{2.15}$$

Zastosujmyjmy teraz operator obnizania rzutu spinu $J^- = J_1 - iJ_2$, który działając na stan $|j, m\rangle$ daje

$$J^-|j, m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m-1)}|j, m-1\rangle. \tag{2.16}$$

W szczególności

$$J^-|j,j\rangle = \sqrt{2j}|j,j-1\rangle. \tag{2.17}$$

Analogicznie wprowadzamy operator obniżania izospinu:

$$I^-|I,I_3\rangle = \sqrt{I(I+1)-I_3(I_3-1)}|I,I_3-1\rangle. \tag{2.18}$$

Działając operatorem J^- na stan (2.15) otrzymujemy, zgodnie z (2.16),

$$J^-|\Delta^{++},m=\frac{3}{2}\rangle = \sqrt{3}|\Delta^{++},m=\frac{1}{2}\rangle. \tag{2.19}$$

Operatory J^- i I^- moga być wyrażone jako suma operatorow J_i^- i I_i^- działających na i-ty kwark:

$$J^- = \sum_{i=1}^{3} J_i^-, \qquad I^- = \sum_{i=1}^{3} I_i. \tag{2.20}$$

Stosując (2.16) po prawej stronie (2.15) otrzymujemy równość

$$\begin{aligned} J^-|\Delta^{++},m &= \frac{3}{2}\rangle_{sf} = \sum_{i=1}^{3} J_i^-|u\uparrow u\uparrow u\uparrow\rangle = \\ &= |u\downarrow u\uparrow u\uparrow\rangle + |u\uparrow u\downarrow u\uparrow\rangle + |u\uparrow u\uparrow u\downarrow\rangle \\ &= \sqrt{3}|\{u\downarrow,u\uparrow,u\uparrow\}\rangle, \end{aligned} \tag{2.21}$$

co w połączeniu z (2.19) daje spinowo-zapachową funkcję falową stanu Δ^{++} o rzucie spinu $m=\frac{1}{2}$:

$$|\Delta^{++},m=\frac{1}{2}\rangle_{sf} = |\{u\downarrow,u\uparrow,u\uparrow\}\rangle. \tag{2.22}$$

Podziałajmy teraz na równanie (2.22) operatorem I^-. Otrzymujemy stan o rzucie izospinu $I_3=\frac{1}{2}$, czyli Δ^+:

$$I^-|\Delta^{++},m=\frac{1}{2}\rangle_{sf} = \sqrt{3}|\Delta^{+},m=\frac{1}{2}\rangle_{sf}. \tag{2.23}$$

Z drugiej strony uzycie (2.22) daje, pokrótkim rachunku,

$$\begin{aligned} I^-|\Delta^{++},m &= \frac{1}{2}\rangle_{sf} = \sum_{i=1}^{3} I_i^-|\{u\downarrow,u\uparrow,u\uparrow\}\rangle \\ &= |\{d\downarrow,u\uparrow,u\uparrow\}\rangle + \sqrt{2}|\{d\uparrow,u\downarrow,u\uparrow\}\rangle. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Przyrównanie (2.23) i (2.24) daje spinowo-zapachowa funkcję falową czastki Δ^+ o rzucie spinu $m=\frac{1}{2}$:

$$|\Delta^{+},m=\frac{1}{2}\rangle_{sf} = \frac{1}{\sqrt{3}}|\{d\downarrow,u\uparrow,u\uparrow\}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|\{d\uparrow,u\downarrow,u\uparrow\}\rangle. \tag{2.25}$$

Zauważmy teraz, ze funkcja jest ta kombinacja liniową dwóch *różnych* symetrycznych funkcji: $|\{d\downarrow,u\uparrow,u\uparrow\}\rangle$ i $|\{d\uparrow,u\downarrow,u\uparrow\}\rangle$. Ponadto funkcje te są ortogonalne, tzn. $\langle\{d\downarrow, u\uparrow, u\uparrow\}|\{d\uparrow, u\downarrow, u\uparrow\}\rangle = 0$. Możemy zatem utworzyć inną kombinację liniową postaci

$$|p, m = \frac{1}{2}\rangle_{sf} = \sqrt{\frac{2}{3}}|\{d\downarrow, u\uparrow, u\uparrow\}\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}|\{d\uparrow, u\downarrow, u\uparrow\}\rangle, \tag{2.26}$$

spełniającą warunki ${}_{sf}\langle\Delta^+, m = \frac{1}{2}|p, m = \frac{1}{2}\rangle_{sf} = 0$, oraz ${}_{sf}\langle p, m = \frac{1}{2}|p, m = \frac{1}{2}\rangle_{sf} = 1$. Stan $|p, m = \frac{1}{2}\rangle_{sf}$ jest rzecz jasna stanem o rzucie izospinu 1/2. Poniewaz jest ortogonalny do stanu $|\Delta^+, m = \frac{1}{2}\rangle_{sf}$, może to być tylko stan o izospinie $I = 1/2$, czyli *proton*. Stan neutronu otrzymujemy poprzez zamianę kwarków u i d:

$$|n, m = \frac{1}{2}\rangle_{sf} = \sqrt{\frac{2}{3}}|\{u\downarrow, d\uparrow, d\uparrow\}\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}|\{u\uparrow, d\downarrow, d\uparrow\}\rangle, \tag{2.27}$$

W analogiczny sposób można otrzymać spinowo-zapachowe funkcje falowe dla łącznie 20-tu stanów nukleonu i izobaru Δ.

Możemy łatwo sprawdzić, że ładunki elektryczne stanów Δ^{++}, Δ^+, p i n wynoszą, odpowiednio, 2, 1, 1 i 0. W tym celu przypomnijmy, że $\langle u|Q|u\rangle = \frac{2}{3}$, $\langle d|Q|d\rangle = -\frac{1}{3}$, $\langle d|Q|u\rangle = 0$, gdzie Q jest opertorem ładunku elektrycznego kwarku. Operator ładunku elektrycznego dla barionu ma postac $\hat{Q} = \sum_{i=1}^{3} Q(i)$. Na przykład dla protonu otrzymujemy ze wzoru (2.26)

$$Q_p = \langle p, m = \frac{1}{2}|\hat{Q}|p, m = \frac{1}{2}\rangle = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right) = 1. \tag{2.28}$$

2.9 Momenty magnetyczne protonu i neutronu

Operator momentu magnetycznego dla kwarku i ma postać $\mu Q(i)\sigma_z(i)$, gdzie μ jest pewną (nieznaną) stałą, $Q(i)$ ładunkiem elektrycznym kwarku i, a $\sigma_z(i)$ macierzą Pauliego działającą w przestrzeni spinu kwarku i. Operator momentu magnetycznego dla stanów barionowych jest sumą operatorów dla poszczególnych kwarków:

$$\hat{\mu} = \mu \sum_{i=1}^{3} Q(i)\sigma_z(i). \tag{2.29}$$

Używając wyprowadzonych funkcji falowych, oraz elemntów macierzowych $\langle\uparrow|\sigma_z|\uparrow\rangle = 1$, $\langle\downarrow|\sigma_z|\downarrow\rangle = -1$, $\langle\uparrow|\sigma_z|\downarrow\rangle = 0$, możemy łatwo policzyć momenty magnetyczne protonu i neutronu:

$$\begin{aligned}
\mu_p &\equiv \langle p, m = \frac{1}{2}|\hat{\mu}|p, m = \frac{1}{2}\rangle = \left[\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3} - \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right)\right]\mu = \mu, \\
\mu_n &\equiv \langle n, m = \frac{1}{2}|\hat{\mu}|n, m = \frac{1}{2}\rangle = \left[\frac{2}{3}\left(-\frac{2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right)\right]\mu = -\frac{2}{3}\mu.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Wynika stąd jeden z bardzo głośnych sukcesów modelu kwarków, mianowicie stosunek momentów magnetycznych neutronu i protonu wynosi

$$\frac{\mu_n}{\mu_p} = -\frac{2}{3}, \tag{2.31}$$

podczas gdy doświadczalnie $\mu_n/\mu_p = -1.913/2.793 = -0.68$.

2.10 Funkje falowe mezonów

A oto przyklady spinowo-izospinowych funkcji falowych dla mezonów o $L = 0$:

$$\begin{aligned} |\pi^+>_{\rm sf} &= \frac{1}{2}(|u\overline{d}> + |\overline{d}u>)(|\uparrow\downarrow> - |\downarrow\uparrow>), \\ |\rho^+>_{\rm sf} &= \frac{1}{2}(|u\overline{d}> - |\overline{d}u>)(|\uparrow\downarrow> + |\downarrow\uparrow>). \end{aligned} \tag{2.32}$$

Symetria C (sprzężenie ładunkowe) i G (parzystość G) działają na kwarki u i d w następujący sposób:

$$\begin{aligned} &G = Ce^{i\pi I_2} = Ci\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ &C|q>=|\overline{q}>,\ C|\overline{q}>=|q>, \\ &G|u>=|\overline{d}>,\ G|\overline{d}>=-|u>,\ G|d>=-|\overline{u}>,\ G|\overline{u}>=|d>, \end{aligned} \tag{2.33}$$

skąd łatwo sprawdzić, że

$$G|\pi^+>=-|\pi^+>, \quad G|\rho^+>=|\rho^+> \tag{2.34}$$

Stwierdźmy jeszcze oczywisty fakt, że, w odróżnieniu od przypadku barionów, dla funkcji falowych mezonów nie mamy ograniczeń wynikających z symetrii. Kwark i antykwark są rozróżnialnymi cząstkami i nie podlegają zasadzie Pauliego.

3

Chromodynami kwantowa

3.1 Dynamika kolorowa i gluony

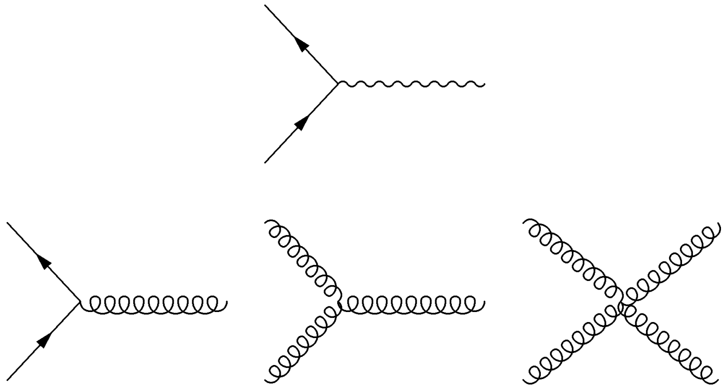
Chromodynamika kwantowa (Quantum Chromodynamics, QCD) jest teorią pola kwarków i gluonów. Lagranżjan QCD ma postać

$$\begin{aligned} L &= \sum_f \bar{\psi}_{\bar{c}} \left(D^\mu \gamma_\mu - m_f\right) \delta^{\bar{c}c} \psi_c - \frac{1}{4} G^a_{\mu\nu} G^{\mu\nu}_a, \quad c, \bar{c} = 1,2,3, \\ D^\mu &= \partial^\mu - \frac{ig}{2} A^\mu_a \lambda^a, \quad G^{\mu\nu}_a = \partial^\mu A^\nu_a - \partial^v A^\mu_a + \frac{ig}{4} f_a^{.bd} A^\mu_b A^\nu_d, \quad a,b,d = 1,...,8 \end{aligned}$$

gdzie ψ_c oznacza pole kwarkowe o kolorze c, a A^μ_a oznacza pole gluonu o wskaźniku Lorentza μ i wskażniku koloru a. Gluonów jest $N_c(N_c - 1) = 8$. Liczby $f_a^{.bd}$ są stałymi struktury grupy $SU(3)$ (zob. roz. C.1). Lagranżjan L jest niezmienniczy względem lokalnej symetrii cechowania $SU(3)_c$, gdzie indeks c przypomina, że symetrią jest kolor.

Tabela 3.1 porównuje podstawowe cechy elektrodynamiki i chromodynamiki.

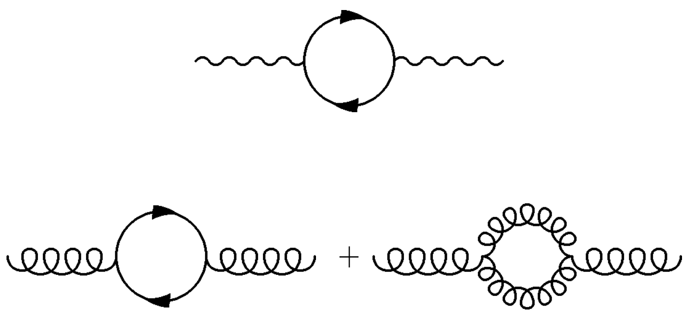
Pośrednie obserwacje gluonu zostały dokonane na akcelertorze Petra w 1979 r. Zaobserwowano tam tzw. przypadki trójdżetowe, pochodzące z hadronizacji



Rys. 3.1: Wierzchołki oddziaływań w QED (góra) i QCD (dół)

QED	QCD
abelowe cechowanie jeden rodzaj ładunku fotony neutralne	nieabelowe cechowanie 3 rodzaje ładunku gluony niosą ładunek
stała sprzężenia rośnie z przekazem pędu	stala sprzężenia maleje z przekazem pędu
ekranowanie	antyekranowanie
	asymptotyczna swoboda uwięzienie kwarków
próżnia perturbacyjna	próżnia bardzo skomplikowana, kondensaty
dokładne przewidywania dynamiczne	przybliżone przewidywania dynamiczne

Tabela 3.1: Porównanie podstawowych własności QED i QCD



Rys. 3.2: Renormalizcja α_{QED} i α_{QCD} w wiodącym rzędzie rachunku zaburzeń.

początkowego stanu zawierającego kwark, antykwark i gluon.

3.2 Asymptotyczna swoboda

Perturbacyjna ewolucja stałych sprzężenia:

$$\alpha_{\rm QED}(Q^2) = \frac{\alpha_{\rm QED}(\mu^2)}{1 - \alpha_{\rm QED}(\mu^2)\frac{1}{3\pi}\log\frac{Q^2}{\mu^2}}, \tag{3.1}$$

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{1 + \alpha_s(\mu^2)\frac{33-2n_f}{12\pi}\log\frac{Q^2}{\mu^2}}. \tag{3.2}$$

Zatem $\alpha_s(Q^2)$ malej z Q^2, czyli rośnie z odległością. Rys. ekranowania i antyekranowania.

3.3 Wymiana gluonu

W elektrodynamice oddziaływanie poprzez wymianę fotonu między dwiema cząstkami o ładunkach Q_1 i Q_2 prowadz do oddziaływania proporcjonalnego do iloczynu $Q_1 Q_2$. Na przykład potencjał kulombowski dany jest wzorem $V_{\text{coul}}(r) = Q_1 Q_2 / r$. Kwarki oddziaływują między sobą poprzez wymianę gluonu. Ładunek kolorowy kwarku nie jest liczbą, ale macierzą $\lambda^a/2$. Nieabelowość chromodynamiki powoduje więc ciekawy efekt: wielkość oraz znak oddziaływania kulombowskiego zależy od stanu kolorowego w jakim znajdują sie kwarki. Kwarki i oraz j mogą wymienić 8 gluonów. Oddziaływanie kwark-kwark jest proporcjonalne do elementu macierzowego

$$\langle \phi_c | \sum_{a=1}^{8} \frac{\lambda_i^a}{2} \frac{\lambda_j^a}{2} | \phi_c \rangle, \tag{3.3}$$

a oddziaływanie kwark-antykwark do elementu

$$\langle \phi_c | \sum_{a=1}^{8} \frac{\lambda_i^a}{2} \frac{-(\lambda_j^a)^*}{2} | \phi_c \rangle, \tag{3.4}$$

gdzie $|\phi_c\rangle$ jest kolorową funkcją falową układu. I tak dla singletów koloru otrzymujemy (zob. np. [?])

$$\begin{aligned} \langle \text{singlet } qqq | \sum_{a=1}^{8} \frac{\lambda_i^a}{2} \frac{\lambda_j^a}{2} | \text{singlet } qqq \rangle &= -\frac{2}{3}, \\ \langle \text{singlet } \bar{q}q | \sum_{a=1}^{8} \frac{\lambda_i^a}{2} \frac{-(\lambda_j^a)^*}{2} | \text{singlet } \bar{q}q \rangle &= -\frac{4}{3}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

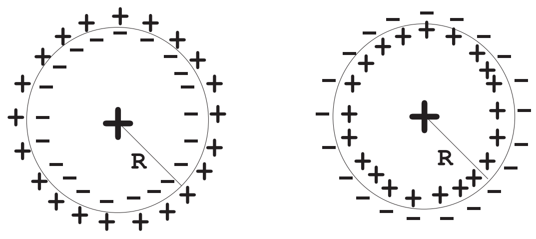
co oznacza, że elektryczne oddziaływania między każdą parą kwarków w barionie, oraz między kwarkiem i antykwarkiem w mezonie, są *przyciągające*. Analogiczny rachunek dla innych kolorowych funkcji falowych prowadzi do następujących wzorów:

$$\begin{aligned} \langle \text{sekstet } qq | \sum_{a=1}^{8} \frac{\lambda_i^a}{2} \frac{\lambda_j^a}{2} | \text{sekstet } qq \rangle &= \frac{1}{3}, \\ \langle \text{oktet } \bar{q}q | \sum_{a=1}^{8} \frac{\lambda_i^a}{2} \frac{-(\lambda_j^a)^*}{2} | \text{oktet } \bar{q}q \rangle &= \frac{1}{6}, \end{aligned} \tag{3.6}$$

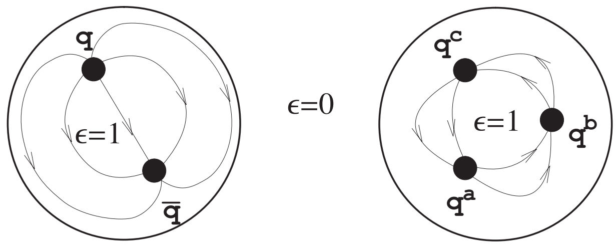
co oznacza odpychanie. A zatem perturbacyjna wymiana jednogluonowa powoduje przyciąganie w stanach singletu kolorowego qqq i $\bar{q}q$, oraz odpychanie w stanach kolorowych.

3.4 Uwięzienie koloru

Uwięzienie koloru, jak już wspomnieliśmy, nie zostało jak dotąd wyjaśnione na gruncie pierwszych zasad. Isnieje natomiast szereg hipotez i modeli, usiłujących



Rys. 3.3: Ekranowanie ładunku w ośrodku o stałej dielektrycznej $\varepsilon > 1$ i antyekranowanie ładunku w hipotetycznym ośrodku o $\varepsilon < 1$.



Rys. 3.4: Konfiguracja kolorowego pola elektrycznego w mezonie i barionie. Linie pola nie są wpuszczane do obszaru próżni, gdzie $\varepsilon = 0$, i pozostają uwięzione wewnątrz worka.

opisa to zagadnienie. T. D. Lee wysuął hipotezę zgodnie z którą próżnia chromodynamiki stanowi doskonały dia-elektryka, tzn. ośrodek o znikającej stałej dielektrycznej ε. Prześledźmy jego argumentację. Załóżmy, że mamy kolorowy, zlokalizowany, ładunek Q. Zgodnie z prawem Gaussa, z dala od ładunku pole indukcji elektrycznej dane jest wzorem

$$D = \frac{Q}{r^2}. \tag{3.7}$$

Między polami indukcji elekrycznej i polem elektrycznym zachodzi związek

$$D = \varepsilon E, \tag{3.8}$$

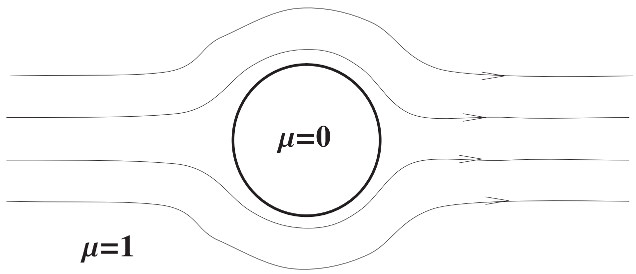
gdzie ε jest stałą dielektryczną ośrodka (próżni QCD). Gęstość energii dana jest wzorem

$$\rho = ED = \frac{Q^2}{\varepsilon r^4}. \tag{3.9}$$

Oczywistym jest, że jeśli $\varepsilon = 0$, wówczas $\rho = \infty$. Wynika stąd, że niemożliwe jest istnienie izolowanego ładunku kolorowego. Rys. (T. D. Lee, 17.5,6). Jedynie stany singletowe mogą mieć skończoną energię. Kwarki, czy gluony, sprzężone do singletu koloru, deformują lokalnie próżnie, tak, że tworzy się obszar wewnątrz którego $\varepsilon > 0$. To swoiste kopanie dołka, czy worka, w próżni przedstawione jest na Rys. (T. D. Lee, 17.8). Na zewnątrz worka $\varepsilon = 0$, wewnątrz $\varepsilon = 1$. Rysunek przedtawia również linie elektrycznego pola kolorowego, E, łączące kwarki. Pole D znika na zewnątrz worka. Wynika stąd,

QED		QCD
nadprzewodnictwo	$\leftrightarrow$	uwięzienie
H	$\leftrightarrow$	E
$\mu_{\mathrm{wewn}} = 0$	$\leftrightarrow$	$\varepsilon_{\mathrm{vac}} = 0$
$\mu_{\mathrm{vac}} = 1$	$\leftrightarrow$	$\varepsilon_{\mathrm{wewn}} = 1$
wewnątrz	$\leftrightarrow$	zewnątrz
zewnątrz	$\leftrightarrow$	wewnątrz

Tabela 3.2: Analogia uwięzienia koloru w QCD z nadprzewodnictwem w QED



Rys. 3.5: Efekt Meissnera w nadprzewodnictwie. Pole magnetyczne wypychane jest z obszaru naprzewodnika, gdzie $\mu = 0$.

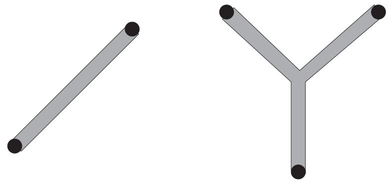
że linie pola są *całkowicie zawarte wewnątrz worka*, a w pobliżu ściany przebiegają stycznie, tak, aby poprzeczna składowa pola D była ciągła przy przejściu przez ścianę, zgodnie z zasadami elektrostatyki. Rzecz jasna, na powierzchni ściany indukowany jest odpowiedni rozkład ładunku kolorowego, który zapewnia wyżej opisaną konfigurację pola elektrycznego.

Tabela 3.4 przedstawia analogię hipotezy doskonałego dia-elektryka do efektu Meissnera w nadprzewodnictwie. Tak, jak pole H jest nie wpuszczane do wnętrza nadprzewodnika, gdzie podatność magnetyczna $\mu = 0$, tak pole E jest nie wypuszczane na zewnątrz worka, gdzie $\varepsilon = 0$.

Z wytworzeniem worka musi wiązać się pewna praca. Zakładamy bowiem, że (z definicji) próżnia jest stanem o najniższej energii. Tak więc obszar worka jest możliwie mały. W rozdziale 4 przedtawimy szczegółowo dymanikę modeli worków, a tutaj skupimy się tylko na jakościowych implikacjach uwięzienia koloru. Jeśli zaczniemy oddalać od siebie dwa ładunki kolorowe, to łączące je linie elektrycznego pola kolorowego pozostają w wąskim obszarze tuby kolorowej (color flux tube). Dla dużych odległości d między ładunkami energia potencjalna układu wyraża się wzorem $V = a + \sigma d$, gdzie a i σ są stałymi. Siła działająca na kwark skierowana jest wzdłuż tuby i ma stałą wartość σ, nazywaną *napięciem struny*. Stałą tę można wyznaczyć z modeli stanów związanych ciężkich kwarków, oraz z modeli strun, otrzymując

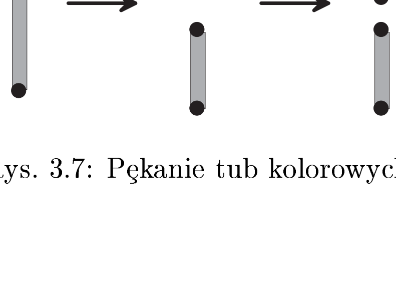
$$\sigma \simeq 1 \frac{\mathrm{GeV}}{\mathrm{fm}}. \tag{3.10}$$

Na małych odległościach oddziaływanie między ładunkami jest kulombowskie,



Rys. 3.6: Tuby kolorowe w mezonie i barionie.

zgodnie z wzorami (3.5). Ładunków kolorowych nie można oddzielić od siebie na zbyt dużą odległość. Liniowy wzrost V z d prowadzi do szybkiego wzrostu energii układu, i przy pewnym krytycznym d układ rozpada się na dwie mniejsze struny. Jest to energetycznie korzystne. W wyniku pęknięcia struny na powstałych końcach tworzą się nowe ładunki kolorowe. Powyższy mechanizm może opisywać np. rozpad mezonu na dwa mezony (Rys.). Teoriopolowym mechanizmem odpowiedzialnym za pękanie strun jest tunelowanie Schwingera.



Rys. 3.7: Pękanie tub kolorowych.

4

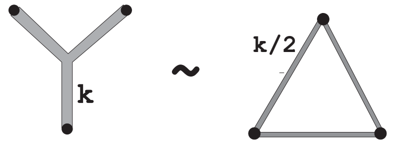
Modele oparte o uwięzienie

Przedstawimy teraz dwa bardzo popularne podejścia do opisu struktury hadronów, opierające się na zjawisku uwięzienia kwarków.

4.1 Nierelatywistyczny model kwarków

Uzasadnienie nierelatywistycznego (zwanego również naiwnym) modelu kwarków zaczyna się zwyczajowo od obrazu z tubami kolorowymi. Mezon to kwark i antykwark połączone tubą, a barion to trzy kwarki połączone tubami w konfiguracji "Y". Konfiguracja Y nie jest wygodna do "dalszej obróbki", ponieważ zawiera oddziaływania trzyciałowe. Zamienia się ją wobec tego na konfigurację Δ (Rys.), w której napięcia strun są dwa razy mniejsze. Reguła $\Delta = Y$ jest przybliżeniem i wprowadza pewien bład, który dla uzyskiwanych wyników szacuje się na poziomie "kilku procent". Zauważmy nieco zabawną zbieżność, mianowicie dwa razy mniejsza wielkość napięcia strun w konfiguracji Δ dla barionu w porównaniu z napięciem struny w mezonie zgadza się ze stosunkiem czynników w wymianie jednogluonowej we wzorach (3.5).

Następnym elementem nierelatywistycznego modelu kwarków jest przydzielenie kwarkom dużej masy, rzędu 300MeV dla u i d oraz 450MeV dla s. Masę tę nazywa się *konstytuentną* (constituent) w odróżnieniu od masy prądowej (current) z Tabeli 2.1. Masy konstytuentne są parametrami modelu. Mechanizm ich powstawania możemy sobie tylko wyobrazić: poprzez nieperturbacyjne oddziaływania kwark prądowy ubiera się w gluony i pary kwark-antykwark wtaki sposób, że powstaje kwazicząstka o dużej masie. W rozdziale 5.5.2 przedyskutujemy mechanizm powstawania mas konstutuentnych kwarków poprzez spontaniczne łamanie symetrii chiralnej.



Rys. 4.1: Przybliżona reguła "$\Delta = Y$". Oddziaływania w konfiguracji Δ są dwa razy słabsze niż w konfiguracji Y.

Jeteśmy teraz gotowi do wypisania Hamiltonianu nierelatywistycznego modelu kwarków:

$$
\begin{aligned}
H &= H_0 + H_{\rm conf} + \sum_{i<j}\left(H^{ij}_{\rm coul} + H^{ij}_{\rm hyp} + H^{ij}_{\rm so}\right), \qquad (4.1)\\
H_0 &= \sum_i \left(M_i + \frac{p_i^2}{2M_i}\right), \quad H_{\rm conf} = \sum_{i<j}\left(br_{ij}+c\right), \quad H^{ij}_{\rm coul} = \frac{\alpha_s}{r_{ij}}\sum_{a=1}^{8} F_i^a F_j^a,\\
H^{ij}_{\rm hyp} &= -\frac{\alpha_s}{M_i M_j}\left(\frac{8\pi}{3}\vec{S}_i\cdot\vec{S}_j\delta^3(r_{ij}) + \frac{1}{r_{ij}^3}\left[\frac{3\vec{S}_i\cdot\vec{r}_{ij}\,\vec{S}_j\cdot\vec{r}_{ij}}{r_{ij}^2} - \vec{S}_i\cdot\vec{S}_j\right]\right)\sum_{a=1}^{8} F_i^a F_j^a,\\
H^{ij}_{\rm so} &= -\frac{\alpha_s}{r_{ij}^3}\left(\frac{1}{M_i}+\frac{1}{M_j}\right)\left(\frac{\vec{S}_i}{M_i}+\frac{\vec{S}_j}{M_j}\right)\cdot\vec{L}_{ij}\sum_{a=1}^{8} F_i^a F_j^a\\
&- \frac{1}{2r_{ij}}\frac{dH^{ij}_{coul}}{dr_{ij}}\left(\frac{\vec{S}_i}{M_i^2}+\frac{\vec{S}_j}{M_j^2}\right)\cdot\vec{L}_{ij},
\end{aligned}
$$

gdzie kolorowe ładunki i-tego kwarku lub antykwarku oznaczyliśmy jako $F_i^a = \frac{1}{2}\lambda_i^a$, lub, opowiednio, $F_i^a = \frac{1}{2}(-\lambda_i^a)^*$. Hamiltonian (4.1) zawiera następujące człony: nierelatywistyczny człon swobodny, H_0, z masami konstytuentnymi M_i, człon opisujący uwięzienie, $H_{\rm conf}$, oraz człony wynikające z nierelatywistycznej redukcji oddziaływania wymiany gluonu: człon kulombowski, $H^{ij}_{\rm coul}$, człon magnetycznego rozszczepienia struktury subtelnej, $H^{ij}_{\rm hyp}$, oraz człon spin-orbita, $H^{ij}_{\rm so}$. Człony $H^{ij}_{\rm coul}$, $H^{ij}_{\rm hyp}$ i $H^{ij}_{\rm so}$ pochodzą z wymiany jednogluonowej w granicy dużych mas M. Tak więc formalnie wyrażenie (4.1) jest rozwinięciem nieralatywistycznym, czyli rozwinięciem w odwrotnych potęgach masy M. Analogiczne wzory pojawiają się w fizyce atomowej w opisie oddziaływania dwóch elektronów w atomie.

Część spin-orbita nie wnosi przyczynku dla barionów w fali S, dla których $L = 0$, w związku z czym spektrum stanów podstawowych jest nieczułe na to oddziaływanie. Dla opisu stanów wzbudzonych o $L \neq 0$ oddziaływanie spin-orbita stwarza problemy. Z reguły opuszcza się piewszy człon w tym odziaływaniu, pozostawiając tylko drugi (tzw. człon precesji Thomasa). Procedura taka nie jest, rzecz jasna, konsystentna, co uwidacznia problemy z jakimi borykają się tego typu modele.

Nierelatywistyczny model kwarków rozwiązuje się technicznie w następujący sposób: wprowadza się Hamiltonian oscylatora harmonicznego,

$$H_0 = \sum_{i=1}^{3}\left(M_i + \frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2M_i}\right) + \sum_{i<j}\frac{1}{2}k\left(\vec{r}_i - \vec{r}_j\right)^2. \qquad (4.2)$$

który generuje niezaburzone stany. Następnie traktuje się jako zaburzenie pozostałą część pełnego Hamiltonianu (4.1):

$$H_1 = H_{\rm conf} - \sum_{i<j}\frac{1}{2}k\left(\vec{r}_i - \vec{r}_j\right)^2 + H^{ij}_{\rm coul} + H^{ij}_{\rm hyp} + H^{ij}_{\rm so}. \qquad (4.3)$$

Dla mezonów wprowadzamy współrzędne środka masy kwarku i antykwarku, $R = (M_1\vec{r}_1 + M_2\vec{r}_2)/(M_1 + M_2)$, oraz współrzędne względne, $\vec{d} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$.

Hamiltonian (4.2) separuje się na trywialną część ruchu środka masy, $\frac{1}{2}\left(\vec{p}_1+\vec{p}_2\right)^2/(M_1+M_2)$, oraz na trójwymiarowy oscylator harmoniczny we współrzędnej $\vec{d}$. Problem ten jest szczegółowo dyskutowany w niemal każdym podręczniku mechaniki kwantowej. Tabela (Tab. z PDG) przedtawia identyfikację znanych mezonów ze stanami modelu kwarków. Przyjęta tu notacja spektroskopowa ma postać $N^{2S+1}L_J$, gdzie N oznacza radialną liczbę kwantową wzbudzenia oscylatora harmonicznego.

Przypadek barionów jest bardziej pracochłonny. Wprowadzamy współrzędne Jacobiego:

$$\begin{aligned} R &= \frac{M_1\vec{r}_1+M_2\vec{r}_2+M_3\vec{r}_3}{M_1+M_2+M_3}, \\ \vec{\rho} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{r}_1-\vec{r}_2\right), \quad \vec{\lambda}=\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\vec{r}_1+\vec{r}_2-2\vec{r}_3\right), \end{aligned} \tag{4.4}$$

związane z nimi pędy oznaczamy odpowiednio: $\vec{P}$, $\vec{p}_\rho$ i $\vec{p}_\lambda$, a masę całkowitą jako $3M$. Dla przypadku $M_1=M_2=M_3=M$ Hamiltonian oscylatora harmonicznego daje się w powyższych współrzędnych zapisać jako

$$H=M+\frac{\vec{P}^2}{2(3M)}+\frac{\vec{p}_\rho^2}{2M}+\frac{3}{2}k\rho^2+\frac{\vec{p}_\lambda^2}{2M}+\frac{3}{2}k\lambda^2. \tag{4.5}$$

Część związana z ruchem środka masy jest odseparowana i trywialna. Pozostała część to sześciowymiarowy oscylator harmoniczny. Wprowadźmy notację

$$\beta=(3kM)^{1/4}, \qquad \omega=(3k/M)^{1/2}. \tag{4.6}$$

Rozwiązania równania Schroedingera mają postać

$$\Psi_{LL_3}^{N,\sigma}=\psi_{LL_3}^{N,\sigma}\frac{\beta^3}{\pi^{3/2}}e^{-\frac{1}{2}\beta^2\left(\rho^2+\lambda^2\right)}, \tag{4.7}$$

gdzie funkcje $\psi_{LL_3}^{N,\sigma}$ wyrażają sie wzorami

$$\begin{aligned} \psi_{00}^{0,S} &= 1, \\ \psi_{11}^{1,\rho} &= \beta\rho_+, \quad \psi_{10}^{1,\rho}=\beta\rho_0, \quad \psi_{1-1}^{1,\rho}=\beta\rho_-, \\ \psi_{11}^{1,\lambda} &= \beta\lambda_+, \quad \psi_{10}^{1,\lambda}=\beta\lambda_0, \quad \psi_{1-1}^{1,\lambda}=\beta\lambda_-, \\ \psi_{00}^{2,S} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\beta^2(\rho^2+\lambda^2-\frac{3}{\beta^2}), \\ \psi_{00}^{2,\rho} &= \frac{2}{\sqrt{3}}\beta^2(\vec{\rho}\cdot\vec{\lambda}),\ \psi_{00}^{2,\lambda}=\frac{1}{\sqrt{3}}\beta^2(\rho^2-\lambda^2), \\ \psi_{22}^{2,S} &= \frac{1}{2}\beta^2(\rho_+^2+\lambda_+^2),\ \psi_{22}^{2,\rho}=\beta^2\rho_+\lambda_+,\ \ldots \\ \psi_{22}^{2,\lambda} &= \frac{1}{2}\beta^2(\rho_+^2-\lambda_+^2),\ \psi_{11}^{2,A}=\beta^2(\rho_+\lambda_0-\rho_0\lambda_+),\ \ldots \\ & \ldots \end{aligned} \tag{4.8}$$

Indeksy funkcji ψ mają następujące znaczenie: N jest ilością wzbudzonych kwantów oscylatora harmonicznego (Uwaga! Inaczej niż dla mezonów!), L i

L_3 są momentem pędu i jego trzecią składową, a σ oznacza symetrię funkcji falowej: S – symetryczna, A – antysymetryczna, ρ lub λ – mieszana. Rzecz jasna, symetria spinowo-izospinowej funcji falowej jest dobierana w taki sposób, aby jej iloczyn z funkcją (4.7) był funkcją symetryczną.

Energia stanów (4.7) wynosi $(N+3)\omega$. Stany są zdegenerowane, grupując się w multiplety grupy $SU(6)$, gdzie $6 = 3$ zapachy $\times 2$ spiny. Przyjętą notacją do oznaczania tych multipletów jest $[\dim, L_N^P]$, gdzie dim oznacza degenerację multipletu, L – moment orbitalny niesiony przez kwarki, oraz P – parzystość, a N ilość wzbudzonych kwantów. Kolejno, dla stanu podstawowego mamy multiplet $[56, 0_0^+]$ zbudowany na funcji $\psi_{00}^{0,S}$. Multiplet ten zawiera 16 spinowo zapachowych stanów należących do oktetu $SU(3)_F$ i 40 należących do decymetu. Następnie, dla stanów wzbudzonych mamy multiplet $[70, 1_1^-]$ zbudowany na funkcjach $\psi_{1M}^{1,\rho}$ i $\psi_{1M}^{1,\rho}$, multiplet $[56, 0_2^+]$ zbudowany na funcji $\psi_{00}^{2,S}$, multiplet $[70, 0_2^+]$ zbudowany na funkcjach $\psi_{00}^{2,\rho}$ i $\psi_{00}^{2,\rho}$, multiplet $[56, 2_2^+]$ zbudowany na funcji $\psi_{2M}^{2,S}$, multiplet $[70, 2_2^+]$ zbudowany na funkcjach $\psi_{2M}^{2,\rho}$ i $\psi_{2M}^{2,\rho}$, i wreszcie multiplet $[20, 1_2^+]$ zbudowany na funcji $\psi_{2M}^{2,A}$. W zerowym rzędzie multiplety o $N = 2$, czyli $[56, 0_2^+]$, $[70, 0_2^+]$, $[56, 2_2^+]$, $[70, 2_2^+]$, oraz $[20, 1_2^+]$ są zdegenerowane, ponadto ich energia jest o ω większa od energii $[70, 1_1^-]$, która z kolei jest o ω większa od energii $[56, 0_0^+]$.

Przy pomocy rachunku zaburzeń można pokazać, że anharmoniczne poprawki do oddziaływania generują następujący wzorzec rozszczepień:

$$\begin{aligned}
E[56, 0_0^+] &= E_0, \\
E[70, 1_1^-] &= E_0 + \Omega, \\
E[56', 0_2^+] &= E_0 + 2\Omega - \Delta, \\
E[70, 0_2^+] &= E_0 + 2\Omega - \frac{1}{2}\Delta, \\
E[56, 2_2^+] &= E_0 + 2\Omega - \frac{2}{5}\Delta, \\
E[70, 2_2^+] &= E_0 + 2\Omega - \frac{1}{5}\Delta, \\
E[20, 1_2^+] &= E_0 + 2\Omega,
\end{aligned} \tag{4.9}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
E_0 &= 3M + 3\omega + a_0, \\
\Omega &= \omega - \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{3}a_1, \\
\Delta &= -\frac{5}{4}a_0 + \frac{5}{3}a_1 - \frac{1}{3}a_2,
\end{aligned} \tag{4.10}$$

a współczynniki a_n zdefiniowane są jako momenty anharmonicznej części potencjału oddziaływania $U = H_{\mathrm{conf}} - \sum_{i<j} \frac{1}{2}k\,(\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2 + H_{\mathrm{coul}}^{ij}$:

$$a_n = \frac{3\beta^{3+2n}}{2^n (2\pi)^{3/2}} \int d^3r\; r^{2n} e^{-\beta^2 r^2/2} U(r). \tag{4.11}$$

Następnym efektem jaki musimy uwzględnić jest łamanie symetrii $SU(3)_F$ prze masę kwarku dziwnego. Dla przypadku, gdy masa jednego kwarku jest inna różna od pozostałych wprowadzamy

$$\begin{aligned} m_\rho &= M_1 = M_2, \quad m_\lambda = \frac{3m_\rho M_3}{2m_\rho + M_3}, \\ \omega_\rho &= \sqrt{\frac{3k}{m_\rho}}, \quad \omega_\lambda = \sqrt{\frac{3k}{m_\lambda}}, \qquad (4.12) \\ \beta_\rho &= (3km_\rho)^{1/4}, \quad \beta_\lambda = (3km_\lambda)^{1/4}. \qquad (4.13) \end{aligned}$$

Funkcje falowe mają teraz postać

$$\Psi_{LL_3}^{N_\rho N_\lambda,\sigma} = \psi_{LL_3}^{N_\rho N_\lambda,\sigma} \left(\frac{\beta_\rho\beta_\lambda}{\pi}\right)^{3/2} e^{-\frac{1}{2}\left(\beta_\rho^2\rho^2+\beta_\lambda^2\lambda^2\right)}, \qquad (4.14)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \psi_{00}^{00,S} &= 1, \\ \psi_{11}^{10,\rho} &= \beta_\rho\rho_+, \quad \psi_{11}^{01,\lambda} = \beta_\lambda\lambda_+, \\ &\ldots \qquad (4.15) \end{aligned}$$

a energia stanów wynosi

$$E = (N_\rho + \frac{3}{2})\omega_\rho + (N_\lambda + \frac{3}{2})\omega_\lambda. \qquad (4.16)$$

Kardynalne znaczenie dla opisu spektroskopii hadronów w nierelatywistycznym modelu kwarków ma rozszczepienie wynikające z zależnego od spinu członu $H_{\text{hyp.}}$ Otrzymuje się następujące wyrażenia na przesunięcia poziomów:

$$\begin{aligned} \delta M_N &= -\frac{1}{2}\delta, \quad \delta M_\Delta = \frac{1}{2}\delta, \quad \delta M_\Lambda = -\frac{1}{2}\delta, \\ \delta M_\Sigma &= \left(\frac{1}{6} - \frac{2x}{3}\right)\delta, \quad \delta M_{\Sigma^*} = \left(\frac{x}{3} + \frac{1}{6}\right)\delta, \\ \delta M_\Xi &= \left(\frac{x^2}{6} - \frac{2x}{3}\right)\delta, \quad \delta M_{\Xi^*} = \left(\frac{x}{3} + \frac{x^2}{6}\right)\delta, \\ \delta M_\Omega &= \frac{x^2}{2}\delta, \qquad (4.17) \end{aligned}$$

z następujacymi oznaczeniami: $\delta = 4\alpha_s\beta^3/(3\sqrt{2\pi}M_d^2)\ r_{\text{hyp}}$, gdzie r_{hyp} jest poprawką relatywistyczną rzędu 1, oraz $x = M_d/M_s \approx \frac{2}{3}$. Dla prostoty, pominięto tu małe efekty związane z różnicą β_ρ i β_λ.

Problemy nierelatywistycznego modelu kwarku: niemożność opisu pionu z powodu braku symerii chiralnej, niepoprawna kolejność niektórych stanów (np. rezonans Ropera), usunięcie ad hoc członu spin-orbita potencjału liniowego.

Największe sukcesy modelu: ciężkie kwarkonia, spektra lekkich mezonów i barionów, prostota.

Zakończmy ten rozdział cytatem z wykładu jednego z ojców nierelatywistycznego modelu kwarków:

Zadziwiające jest, że dla lekkich kwarków model walencyjny w ogóle działa. Zrozumienie dlaczego to przybliżenie QCD jest tak odporne, oraz zbadanie gdzie i z jakich powodów się załamuje, to dwa główne powody dla studiowania spektroskopii hadronów. Użyteczność modelu kwarków jest tak dobrze ugruntowana, że możemy nieraz zapomnieć, jak dziwny jest fakt, że nukleony, ich wzbudzenia, oraz ich krewni zawierający ciężkie kwarki mogą być opisane przy użyciu orbitalnych i spinowych stanów trzech kwarków konstytuentnych o spinie $\frac{1}{2}$! [Nathan Isgur]

4.2 Stany egzotyczne

Model $q\overline{q}'$ daje następujące przewidywania dla liczb kwantowych mezonów:

$$\text{stany} \quad q\bar{q}': \qquad J^{PC} = \begin{cases} 0^{-+}, 1^{+-}, 2^{-+}, 3^{+-}, 4^{-+}, 5^{+-}, ... & (S=0) \\ 0^{++}, 1^{--}, 1^{++}, 2^{--}, 2^{++}, 3^{--}, 3^{++}, ... & (S=1) \end{cases} \tag{4.18}$$

Z (??) widzimy, że $P = (-1)^{L+1}$, $CP = (-1)^{S+1}$, a ponadto zachodzi związek $G = C(-1)^I$. Z punktu widzenia modelu kwarków, stany o innych kombinacjach liczb kwantowych to *stany egzotyczne.*

$$\text{stany egzotyczne:} \qquad J^{PC} = 0^{--}, 1^{-+}, 2^{+-}, 3^{-+}, ... \tag{4.19}$$

Takie liczby kwantowe mogą być udziałem *glueballi, hybrydów*, np. $q\overline{q}g$, molekuł mezonowe (stany $\overline{qq}qq$). Jak dotąd, nie ma przekonywujących obserwacji stanów egzotycznych (zob. dyskusja w [?]). Nadmieńmy tu, że glueballe, hybrydy, itp. mogą również mieć nieegzotyczne liczby kwantowe, takie jak stany $q\overline{q}'$. Wynika stąd możliwość mieszania stanów $q\bar{q}'$ z innymi stanami, np. z glueballami.Utrudnia to identyfikację niektórych obserwowanych cząstek w ramach modelu kwarków. Szczególnie zagmatwana jest sytuacja w sektorze mezonów skalarnych, mogących mieszać się z glueballem 0^{++}.

4.3 Worki

Modele worków są w pewnym sensie ortogonalne do modeli strun czy modeli nierelatywistycznych: kwarki siedzą jeden na drugim. Modele są relatywistyczne.

4.3.1 Worek Bogolubowa

Cząstka Diraca w sferycznej studni potencjału

$$S(r) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad r < R \\ M & \text{dla} \quad r \geq R \end{cases} . \tag{4.20}$$

Odpowiada to cząstce bezmasowej wewnątrz sfery o promieniu R, i cząstce o masie M na zewnątrz. Zgodnie z wynikiem ćwiczenia (4.22), stany o najniższej energii mają $j^P = \frac{1}{2}^+$ i są opisane spinorem

$$q(\vec{r}, s) = \begin{pmatrix} G(r) \\ i\sigma \cdot \hat{r} F(r) \end{pmatrix} \chi(s), \quad s = \pm\frac{1}{2}. \tag{4.21}$$

Funkcje G i F spełniają równania różniczkowe

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dr} &= -\left(\varepsilon + S(r)\right) F, \\ \frac{dF}{dr} &= -\frac{2}{r}F + \left(\varepsilon - S(r)\right) G. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Z równań tych wynika natychmiast, że funkcja $H(r) = rG(r)$ spełnia równanie

$$\begin{aligned} \left[\frac{d^2}{dr^2} + \varepsilon^2\right] H(r) &= 0 \quad \text{dla} \quad r < R, \\ \left[\frac{d^2}{dr^2} - \left(M^2 - \varepsilon^2\right)\right] H(r) &= 0 \quad \text{dla} \quad r \geq R. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Ponieważ poniżej zrobimy przejście $M \to \infty$, można przyjąć $M > \varepsilon$.

Funkcje G i F muszą być regularne w $r = 0$ i w $r \to \infty$. Wynika stąd, że H musi znikać w $r = 0$ i w $r \to \infty$. Spełniające te warunki ogólne rozwiazanie równania (4.23) ma postać

$$H(r) = \begin{cases} A \sin \varepsilon r & \text{dla} \quad r < R \\ B e^{-\sqrt{M^2 - \varepsilon^2} r} & \text{dla} \quad r \geq R \end{cases}. \tag{4.24}$$

Dla funkcji G i F dostajemy

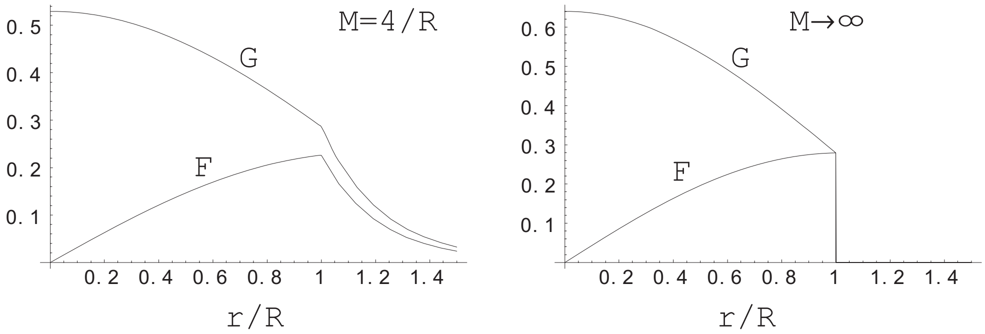
$$\begin{aligned} G(r) &= \begin{cases} \frac{A}{r} \sin \varepsilon r & \text{dla} \quad r < R \\ \frac{B}{r} e^{-\sqrt{M^2 - \varepsilon^2} r} & \text{dla} \quad r \geq R \end{cases}, \\ F(r) &= \begin{cases} \frac{A}{\varepsilon r}\left(-\frac{\sin \varepsilon r}{r} + \varepsilon \cos \varepsilon r\right) & \text{dla} \quad r < R \\ \frac{B}{(M+\varepsilon) r}\left(-\frac{1}{r} - \sqrt{M^2 - \varepsilon^2}\right) e^{-\sqrt{M^2 - \varepsilon^2} r} & \text{dla} \quad r \geq R \end{cases}. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Równania (4.22) są równaniami różniczkowymi pierwszego rzędu. Ich regularne rozwiązania muszą więc być funkcjami ciągłymi. Wynikają stąd następujące warunki zszycia:

$$\begin{aligned} \lim_{r \to R^-} G(r) &= \lim_{r \to R^+} G(r), \\ \lim_{r \to R^-} F(r) &= \lim_{r \to R^+} F(r), \end{aligned} \tag{4.26}$$

co przy użyciu jawnej postaci (4.26) daje

$$\begin{aligned} \frac{A \sin \varepsilon R}{R} &= \frac{B}{R} e^{-\sqrt{M^2 - \varepsilon^2} R} \\ \frac{A}{\varepsilon}\left(-\frac{\sin \varepsilon R}{R^2} + \frac{\varepsilon}{R} \cos \varepsilon R\right) &= \frac{B}{\varepsilon + M}\left(\frac{-1}{R^2} - \frac{\sqrt{M^2 - \varepsilon^2}}{R}\right) e^{-\sqrt{M^2 - \varepsilon^2} R}. \end{aligned} \tag{4.27}$$



Rys. 4.2: Rozwiązania dla górnych i dolnych składowych spinora w worku Bogolubowa dla $M = 4/R$ i dla $M \to \infty$.

Ten jednorodny układ równań liniowych na zmienne A i B ma rozwiązanie, gdy

$$\cos \varepsilon R + \frac{\sqrt{M^2 - \varepsilon^2}}{M + \varepsilon} \sin \varepsilon R = \frac{M}{(M + \varepsilon)\, \varepsilon R} \sin \varepsilon R. \tag{4.28}$$

Zauważmy, że jest to warunek *kwantyzacji* energii stanu, ε.

Nastepnie wykonujemy przejście graniczne $M \to \infty$, aby "uwięzić" kwarki. Wówczas G i F znikają na zewnatrz worka, a wewnątrz worka mają postać

$$G = N \frac{\sin \varepsilon r}{\varepsilon r} \equiv N j_0(\varepsilon r), \qquad F = N \frac{\sin \varepsilon r - \varepsilon r \cos \varepsilon r}{(\varepsilon r)^2} \equiv N j_1(\varepsilon r), \tag{4.29}$$

gdzie N jest stałą normalizacji. Warunek (4.28) daje

$$j_0(\varepsilon R) = j_1(\varepsilon R), \tag{4.30}$$

co jest równoważne $G(R) = F(R)$. To przestępne równanie na ε można rozwiązać numerycznie. Dostajemy $\varepsilon = \omega/R$

$$\omega_1 \simeq 2.04 \quad , \omega_2 \simeq 5.40, \quad \dots \tag{4.31}$$

Stałą normalizacyjną N możemy wyznaczyć z warunku $\int d^3 r (q^{\mu}_{-1})^{\dagger} q^{\mu}_{-1} = 1$.

Zauważmy, że warunek zszycia (4.30) można zapisać w postaci

$$i\vec{\gamma} \cdot \hat{r} q(R) = q(R), \tag{4.32}$$

która będzie użyteczna póżniej.

Rozwiązania dla funcji G i F dla worka Bogolubowa o skończonym M oraz $M \to \infty$ przedstawione są na Rys. 4.2.

Gęstość barionowa kwarków dana jest wzorem $\rho = q^{\dagger} q = N^2 [j_0(\frac{\omega}{R} r)^2 + j_1(\frac{\omega}{R} r)^2]$ i nie znika dla $r \to R^-$. Prąd prawdopodobieństwa kwarków wynosi $\vec{j} = \bar{q} \vec{\gamma} q$. Jego składowa normalna do powierzchni worka, $\hat{r} \cdot \vec{j} = \bar{q} \hat{r} \cdot \vec{\gamma} q$, znika identycznościowo dla rozwiązania (4.21). Oznacza to, że kwarki (liczba barionowa) "nie wyciekają" z worka.

4.3.2 Worek MIT

Tensor energii-pędu dla swobodnej bezmasowej cząstki Diraca dany jest równaniem $T_q^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\bar{q}\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\nu q$, gdzie $\overleftrightarrow{\partial}_\nu = \overrightarrow{\partial^\nu} - \overleftarrow{\partial^\nu}$, i zgodnie z zasadą zachowania energii i pędu musi być zachowany, tzn. $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Widać to natychmiast, jeśli użyjemy równania Diraca dla bezmasowej cząstki swobodnej, $\partial_\mu \gamma^\mu q = 0$. W worku Bogolubowa pojawiają się komplikacje związane z nieciągłością w $r = R$. Mamy bowiem

$$T_{\text{Bog}}^{\mu\nu} = \left(\frac{i}{2}\bar{q}\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\nu) q\right) \Theta(R-r), \tag{4.33}$$

gdzie $\Theta(R-r) = 1$ dla $r < R$, oraz 0 dla $r > R$. Używając $\nabla_i \Theta(R-r) = -\hat{r}_i \delta(R-r)$ oraz równania (4.32) otrzymujemy, że

$$\partial_\mu T_{\text{Bog}}^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\delta(R-r)\partial^\nu(\bar{q}q) \neq 0 \qquad \text{dla} \quad \nu \neq 0. \tag{4.34}$$

Oznacza to, że prawo zachowania tensora energii-pędu jest łamane na powierzchni worka, co jest nie do zaakceptowania. Rozwiązaniem problemu jest dodanie do Lagranżjanu modelu worka następującego członu: $-B\theta(R-r)$. Wówczas

$$\partial_\mu T_{\text{MIT}}^{\mu\nu} = \delta(R-r)\left(-\frac{1}{2}\hat{r}\cdot\partial(\bar{q}q) - B\right)\hat{r}^\nu, \tag{4.35}$$

co znika, jeśli dobierzemy $B = -\frac{1}{2}n\cdot\partial(\bar{q}q)$. Dla barionu w stanie podstawowym nieskomplikowany rachunek daje

$$B = \frac{3}{4\pi R^3}\frac{\omega_1}{R}. \tag{4.36}$$

Ten sam rezultat wynika z warunku *stabilności energetycznej* względem zmiany promienia R. Energia nukleonu jako funkcja R jest równa

$$E_N(R) = \frac{3\omega_1}{R} + \frac{4\pi}{3}R^3 B. \tag{4.37}$$

Warunek stabilności energetycznej, $\frac{dE(R)}{dR} = 0$, daje natychmiast równanie (4.36). Używając (4.36) w wyrażeniu (4.37) możemy napisać

$$E_N(B) = \frac{4}{3}(3\omega_1)^{3/4}(4\pi B)^{1/4}. \tag{4.38}$$

Dopasowanie parametrów do średniej masy nukleonu i $\Delta(1232)$ daje

$$B^{1/4} = 111\text{MeV}, \tag{4.39}$$
$$R_N = 1.48\text{fm}. \tag{4.40}$$

Stała B jest stała fundamentalną modelu worka MIT.

Równanie (4.37) ma prostą interpretację: pierwszy człon, to energia kinetyczna trzech kwarków wstanie podstawowym $\kappa = -1$, drugi człon to energia potrzebna na wytworzenie worka (kopanie dołka w próżni). Analogicznie, dla mezonów w stanie podstawowym zachodzi równość

$$E_{mes}(R) = \frac{2\omega_1}{R} + \frac{4\pi}{3}R^3 B. \tag{4.41}$$

Używając stałej worka (4.39) otrzymujemy $E_{mes} = 801\text{MeV}$, w pobliżu masy mezonów ρ i ω, oraz $R_{mes} = 1.34\text{fm}$.

Do przedstawionego wyżej modelu worka MIT wprowadzowano następujące poprawki: wymianę gluonu, masę kwakrku dziwnego, oraz poprawkę ruchu środka masy [?]. Wymiana gluonu prowadzi, podobnie jak w nierelatywistycznym modelu kwarków, do rozszczepienia stanów o różnym spinie, w szczególności nukleonu i $\Delta(1232)$. Ma ona postać

$$\Delta E_g = \frac{\alpha_s}{R} \sum_{i<j} f(m_i, m_j, R) \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j \times \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{for baryons} \\ 2 & \text{for mesons} \end{array} \right. , \tag{4.42}$$

gdzie $f(m_i, m_j, R)$ jest znaną [?] funkcją mas kwarków i promienia.

Wprowadzenie masy kwarku dziwnego nie wymaga komentarza, z wyjątkiem faktu, że najlepsze dopasowania wsazują na $m_s \sim 300\text{MeV}$, czyli więcej niż masa prądowa. Analiza równań worka jest tylko nieznacznie bardziej skomplikowana dla $m \neq 0$. Efektem skończonej masy prądowej kwarku jest wzrost wartości własnej kwarku, ω. Można pokazać, że ω_1 rośnie od wartości 2.04 dla $m = 0$ do wartości π dla $m \to \infty$.

Poprawki ruchu środka masy wynikają z braku separacji środka masy w modelu worków. W ogólności, są one plagą wszystkich modeli, których rozwiązania łamia symetrię translacyjną. Poprawki te szacuje się w przybliżony sposób jako $\Delta E_{CM} = -Z/R \sim -3/8\ \omega/R$. Uwzględniając wszystkie poprawki, dostajemy następujący wzór na masę hadronu:

$$M(R) = \frac{\sum_i \omega(i)}{R} + \frac{4\pi}{3} R^3 B + \Delta E_g - \frac{Z}{R}. \tag{4.43}$$

Model ma cztery parametry: B, m_s, α_s, oraz Z.

Spektroskopia modeli worków jest dobra, z wyjątkim pionu (brak symetrii chiralnej).

Gęstość ładundu elektrycznego w modelu worka MIT dana jest wzorem

$$\rho(r) = \sum_i q_i^\dagger Q_i q_i. \tag{4.44}$$

Nieskomlikowany rachunek daje następujące wyrażenia na średni promień kwadratowy, $\langle r^2 \rangle = \int d^3r\, r^2 \rho(r)$, dla protonu i neutronu:

$$\begin{aligned} \langle r^2 \rangle_p &= \frac{\omega_1^3 R^2}{2(\omega_1 - 1)\sin^2\omega_1} \int_0^1 d\xi\, \xi^4 \left(j_0^2(\xi\omega_1) + j_1^2(\xi\omega_1) \right), \\ \langle r^2 \rangle_n &= 0. \end{aligned} \tag{4.45}$$

Znikanie $\langle r^2 \rangle_n$ wynika ze znikania ładunku neutronu. Widzimy więc, że model worka nie jest w stanie oddtworzyć doświadczlnej wartości $\langle r^2 \rangle_n^{\exp} = -0.116\text{fm}$. Dla protonu, przy $\omega_1 = 2.04$ i $R = 1\text{fm}$, otrzymujemy $\langle r^2 \rangle_p = (0.73\text{fm})^2$, podczas gdy doświadczalnie $\langle r^2 \rangle_p^{\exp} = (0.82\text{fm})^2$

Operator momentu magnetycznego jest zdefiniowany jako

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2} \int d^3r\ (\vec{r} \times \vec{j}_{em}) = \frac{1}{2} \int d^3r\ \sum_i q_i^\dagger (\vec{r} \times \vec{\alpha}) Q_i q_i.$$

	MIT	$SU(3)_F$	dośw.
μ_n/μ_p	-2/3	-2/3	-0.68
μ_Λ/μ_p	-0.26	-1/3	-0.22
μ_{Σ^-}/μ_p	-0.36	-1/3	-0.51
μ_{Σ^+}/μ_p	0.97	1	0.84
μ_{Σ^0}/μ_p	-0.56	-2/3	-0.45
μ_{Ξ^-}/μ_p	-0.23	-1/3	-0.27

Tabela 4.1: Porównanie momentów magnetycznych oktetu barionów w modelu worka MIT, teoriogrupowym modelu kwarkòw, oraz danych doświadczalnych

Moment magnetyczny protonu, $\mu_p = \langle p\uparrow|\vec{\mu}|p\uparrow\rangle$, dany jest wzorem

$$\mu_p = e\frac{(4\omega_1 - 3)R}{12\omega_1(\omega_1 - 1)}, \tag{4.46}$$

co dla $\omega_1 = 2.04$ i $R = 1$fm daje $1.93\mu_N$, zamiast doświadczalnej wartości $2.73\mu_N$, gdzie magneton jądrowy zdefiniowany jest jako $\mu_N = e/(2M_N)$. Dla neutronu dostajemy przewidywanie zgodne z teoriogrupowym modelem kwarków, (2.31): $\mu_n = -\frac{2}{3}\mu_p$.

Tabela 4.3.2 przedtawia stosunki momentów magnetycznych oktetu barionów do μ_p w modelu worka MIT, teoriogrupowym modelu kwarków, oraz wartości doświadczalne (za [?]).

Ladunek aksjalny nukleonu jest zdefiniowany jako element macierzowy prądu osiowego$j^\mu_{5,a}$, i wyraża się wzorem

$$g_A = 2\langle p\uparrow|\int d^3r\ j^3_{5,3}|p\uparrow\rangle = \langle p\uparrow|\int d^3r\ \sum_i q_i^\dagger\sigma_3\tau_3 q_i|p\uparrow\rangle, \tag{4.47}$$

co daje

$$g_A = \frac{5}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\frac{2\omega_1 - 3}{\omega_1 - 1}\right) \approx 1.1. \tag{4.48}$$

Jest to znacznie mniej niż 5/3 teoriogrupowego modelu kwarków.

worek MIT:	$g_a \approx 1.1$
$SU(3)_F$	$g_a = \frac{5}{3}$
dośw.:	$g_a = 1.27$

Rezonans Ropera (N(1440)) jest stanem wzbudzenia radialnego nukleonu. W modelu worka MIT otrzymujemy go poprzez wzbudzenie jednego kwarku do pierwszego radialnie wzbudzonego stanu o $\kappa = -1$. Masa rezonansu Ropera wynosi

$$M_{\text{Roper}} = \frac{4}{3}(2\omega_1 + \omega_2)^{3/4}(4\pi B)^{1/4}, \tag{4.49}$$

co daje $M_{\text{Roper}}/M_N = 1.39$ (dośw.: 1.53).

5

Symetria chiralna

5.1 Twierdzenie Goldstone'a

Jeśli Lagranżjan teorii posiada grupę ciągłych wewnętrznych symetrii globalnych, a stan podstawowy teorii posiada mniejszą grupę symetrii, to mamy do czynienia ze *spontanicznym łamaniem symetrii* (synonimy: ukryta symetria, faza Nambu-Goldstone'a).

Tw. Goldstone'a: Jesli grupa ciągłych symetrii wewnętrznych Lagranżjanu ma n_L generatorów, oznaczonych jako T^a, a stan podstawowy $|\mathrm{vac}\rangle$ (próżnia) ma mniejszą symetrię, tzn. istnieje n takich a oraz takie j, dla których $T^a_{ij}\langle\mathrm{vac}|\phi^j|\mathrm{vac}\rangle \neq 0$, gdzie ϕ^j są polami o spinie 0, to istnieje n bezmasowych bozonow o spinie 0. Ich liczby kwantowe sa takie same jak liczby kwantowe generatorów T^a. Bozony te nazywamy je *bozonami Goldstone'a*, a cale zjawisko *mechanizmem Goldstone'a.*

5.1.1 Przykład dla pól klasycznych

Rozważmy teorię klasyczną dwóch pól skalarnych S i P:

$$L = \frac{1}{2}(\partial_\mu S)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu P)^2 - V(S,P), \quad V(S,P) = \frac{\mu}{2}\left(S^2+P^2\right) + \frac{\lambda^2}{4}\left(S^2+P^2\right)^2. \tag{5.1}$$

Zakładamy, że $\lambda^2 > 0$, natomiast znak μ może być dodatni lub ujemny. Lagranżjan jest symetryczny ze wzgledu na obroty w przestrzeni S, P:

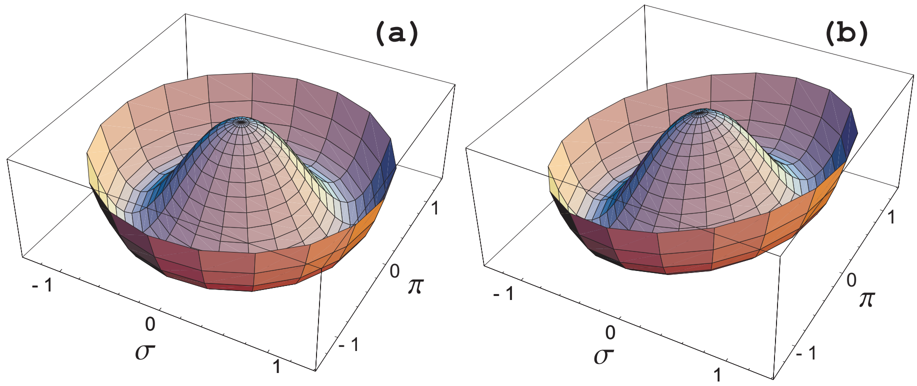
$$\begin{aligned} S &\to \cos\theta\, S - \sin\theta\, P, \\ P &\to \sin\theta\, S + \cos\theta\, P. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Stan podstawowy (próżnia) to stan o najniższej energii. W naszym przypadku próżnia ma stałe pola $S(x) = S$, $P(x) = P$, a S i P minimalizują potencjał V:

$$\left.\frac{\partial V(S,P)}{\partial S}\right|_{S=S_0,P=P_0} = 0, \quad \left.\frac{\partial V(S,P)}{\partial P}\right|_{S=S_0,P=P_0} = 0, \tag{5.3}$$

co jawnie daje

$$\mu S_0 + \lambda^2 S_0\left(S_0^2+P_0^2\right) = 0, \quad \mu P_0 + \lambda^2 P_0\left(S_0^2+P_0^2\right) = 0. \tag{5.4}$$



Rys. 5.1: Spontaniczne łamanie symetrii w przestrzeni pól σ i π. Lewa strona: przypadek dokładnej symetrii w Lagranżjanie i tworzenie bozonów Goldstone'a. Prawa strona: przypadek słabego jawnego łamania symetrii w Lagranżjanie i tworzenie pseudobozonów Goldstone'a.

Przypadek $\mu > 0$: Rozwiązaniem równań (5.4) jest

$$S_0 = 0, \qquad P_0 = 0. \tag{5.5}$$

Jest to tzw. próżnia trywialna lub *faza Wignera*. Wzbudzenia pól S i P maja mase $\sqrt{\mu}$.

Przypadek $\mu < 0$: Rozwiązaniem (5.4) jest

$$S_0 = \cos\alpha \frac{\sqrt{-\mu}}{\lambda}, \qquad P_0 = \sin\alpha \frac{\sqrt{-\mu}}{\lambda}, \tag{5.6}$$

gdzie α jest dowolnym kątem. Ze względu na symetrię obrotów w przestrzeni S, P możemy bez straty ogólności przyjąć np. $\alpha = \pi$, co daje

$$P_0 = 0, \qquad S_0 = -\frac{\sqrt{-\mu}}{\lambda}. \tag{5.7}$$

Próżnia (5.7) nie jest symetryczna ze względu na transformacje (5.2), a więc na mocy Tw. Goldstone'a musi pojawić się bezmasowe wzbudzenie. Istotnie, wstawiając do V pola $S = S_0 + \delta S$, $P = P_0 + \delta P$, otrzymujemy, do drugiego rzędu w δS i δP,

$$\begin{aligned}
V &= \frac{\mu}{2}\left(S_0^2 + 2S_0\delta S + \delta S^2 + \delta P^2\right) + \frac{\lambda^2}{4}\left(S_0^2 + 2S_0\delta S + \delta S^2 + \delta P^2\right)^2 = \\
&= \frac{\mu}{2}S_0^2 + \frac{\lambda^2}{4}S_0^4 + \left(\mu S_0 + \lambda^2 S_0^3\right)\delta S + \frac{1}{2}\left(\mu + 3\lambda^2 S_0\right)\delta S^2 + \frac{1}{2}\left(\mu + \lambda^2 S_0\right)\delta P^2 + \\
&\quad + \lambda^2 S_0 \delta S^3 + \lambda^2 S_0 \delta S \delta P^2 + \frac{\lambda^2}{4}(\delta S^4 + \delta P^4) + \frac{\lambda^2}{2}\delta S^2 \delta P^2 \\
&= \text{const} - \mu\delta S^2 + \lambda^2 S_0 \delta S^3 + \lambda^2 S_0 \delta S \delta P^2 + \frac{\lambda^2}{4}(\delta S^4 + \delta P^4 + 2\delta S^2 \delta P^2),
\end{aligned} \tag{5.8}$$

gdzie w ostatniej równości użyliśmy rozwiazągnia (5.7). Współczynnik przy δP^2 znika, a więc wzbudzenie pola P jest bezmasowe, w zgodnosci z Tw. Goldstone'a. Masa wzbudzenia S wynosi $M_S = \sqrt{-2\mu}$.

Tw. Mermina-Wagnera-Colemana: Spontaniczne łamanie ciągłej symetrii może zachodzić tylko wtedy, gdy wymiar czasoprzestrzeni jest większy niż 2 (dla symetrii dyskretnej > 1).

5.2 Symetrie odziaływań silnych

Lagranżjanu QCD

$$L = \bar{\psi}(D\!\!\!/-m)\psi - \frac{1}{4}G^a_{\mu\nu}G^{\mu\nu}_a = \bar{u}(D\!\!\!/-m_u)u + \bar{d}(D\!\!\!/-m_u)d + \bar{s}(D\!\!\!/-m_u)s + ... - \frac{1}{4}G^a_{\mu\nu}G^{\mu\nu}_a, \tag{5.9}$$

posiada wewnętrzne globalne *dokładne* symetrie. Symetrie te nie zmieniają pól gluonowych, a pola kwarkowe transformują się poprzez globalną zmianę fazy:

$$U(1)_V \quad : \quad u \to e^{i\alpha}u, \qquad j^\mu_B = \bar{u}\gamma^\mu u, \qquad \text{(zapach u)} \tag{5.10}$$
$$U(1)_V \quad : \quad d \to e^{i\alpha}d, \qquad j^\mu_B = \bar{d}\gamma^\mu d, \qquad \text{(zapach d)} \tag{5.11}$$
$$...$$

Powyższe symetrie, oznaczające zachowanie każdego zapachu, można połączyć w kombinacje liniowe

$$U(1)_V \text{ (barionowa)} \quad : \quad \psi \to e^{i\alpha}\psi, \qquad j^\mu_B = \frac{1}{3}\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = \frac{1}{3}\left(\bar{u}\gamma^\mu u + \bar{d}\gamma^\mu d + ...\right), \tag{5.12}$$
$$U(1)_V \quad (I_3) \quad : \quad \psi \to e^{i\alpha\tau_3/2}\psi, \qquad j^\mu_3 = \bar{\psi}\gamma^\mu\frac{\tau_3}{2}\psi = \frac{1}{2}\left(\bar{u}\gamma^\mu u - \bar{d}\gamma^\mu d\right), \tag{5.13}$$
$$U(1)_V \text{ (dziwność)} \quad : \quad \psi \to e^{i\alpha(\lambda_8-1)/\sqrt{3}}\psi, \qquad j^\mu_s = \bar{\psi}\gamma^\mu(\lambda_8-1)/\sqrt{3}\psi = \bar{s}\gamma^\mu s, \tag{5.14}$$
$$...$$

Bardzo dobrą symetrią, łamaną jawnie w sposób bardzo nieznaczny poprzez różnicę mas prądowych kwarków u i d, jest grupa trzech obrotów izozpinowych (obrót wokół trzeciej osi izospinu jest symetrią dokładną):

$$SU(2)_V \quad : \quad \psi \to e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{\tau}/2}\psi, \qquad j^\mu_a = \bar{\psi}\gamma^\mu\frac{\tau_a}{2}\psi,$$
$$\partial_\mu j^\mu_a = \frac{m_u - m_d}{2}\bar{\psi}\frac{[\tau_a, \tau_3]}{2i}\psi, \qquad \text{(izospin)} \tag{5.15}$$

Rozszerzenie tej symetrii do trzech zapachów jest gorszą symetrią ze względu na większą masę prądową kwarku s:

$$SU(3)_V \quad : \quad \psi \to e^{i\alpha_a\lambda^a/2}\psi, \qquad j^\mu_a = \bar{\psi}\gamma^\mu\frac{\lambda_a}{2}\psi,$$
$$\partial_\mu j^\mu_a = \frac{m_u - m_d}{2}\bar{\psi}\frac{[\lambda_a, \lambda_3]}{2i}\psi - \frac{m_s}{\sqrt{3}}\bar{\psi}\frac{[\lambda_a, \lambda_8]}{2i}\psi, \tag{5.16}$$

Bardzo dobrą symetrią jest symetria aksjalna:

$$SU(2)_A \quad : \quad \psi \to e^{i\gamma_5\vec{\alpha}\cdot\vec{\tau}/2}\psi, \qquad j^\mu_{5,a} = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\frac{\tau_a}{2}\psi,$$
$$\partial_\mu j^\mu_{5,a} = \frac{m_u + m_d}{2}\bar{\psi}\tau_a i\gamma_5\psi + \frac{m_u - m_d}{2}\delta_{a3}\bar{\psi}i\gamma_5\psi, \qquad \text{(osiowa)} \tag{5.17}$$

Ładunki izospinowy, Q^a, i osiowy, Q_5^a, zdefiniowane jako

$$\begin{aligned} Q^a(t) &= \int d^3x j_0^a(\vec{x},t) = \int d^3x \psi^\dagger \frac{\tau_a}{2}\psi, \\ Q_5^a(t) &= \int d^3x j_{0,5}^a(\vec{x},t) = \int d^3x \psi^\dagger \gamma_5 \frac{\tau_a}{2}\psi, \end{aligned} \tag{5.18}$$

spełniają reguły komutacji

$$\begin{aligned} [Q^a(t), Q^b(t)] &= i\varepsilon^{abc}Q^c(t), \\ [Q_5^a(t), Q_5^b(t)] &= i\varepsilon^{abc}Q^c(t), \\ [Q^a(t), Q_5^b(t)] &= i\varepsilon^{abc}Q_5^c(t). \end{aligned} \tag{5.19}$$

Reguły te wynikają z kanonicznych regul antykomutacji dla pol kwarkowych: $\{\psi(x), \psi^\dagger(y)\}_{ET} = \delta^3(\vec{x} - \vec{y})$. Wygodnie jest zefiniować kombinacje liniowe $Q^a_{R,L} = (Q^a \pm Q^a_5)$, które spełniają związki komutacji

$$\begin{aligned} [Q_R^a, Q_R^b] &= i\varepsilon^{abc}Q_R^c, \\ [Q_L^a, Q_L^b] &= i\varepsilon^{abc}Q_L^c, \\ [Q_R^a, Q_L^b] &= 0. \end{aligned} \tag{5.20}$$

Algebrę (5.20) nazywamy algebrą chiralną $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$. Algebrę tę można rozszerzyć do trzech zapachów.

5.3 Spontaniczne łamanie symetrii chiralnej

5.3.1 Fakty empiryczne

A oto niektóre fakty świadczące o spontanicznym łamaniu symetrii w próżni:

- Mała masa pionu: pion jest *pseudo-bozonem Goldstone'a*: $m_\pi = 140$MeV, $m_\pi^2/\Lambda_\chi^2 \simeq 0.02$, gdzie $\Lambda_\chi \sim 1$GeV jest skalą chiralną. W systematycznym rozwinięciu w potęgach masy pionu m_π^2/Λ_χ^2 jest parametrem rozwinięcia.

- Nieistnienie zdegenerowanych stanów hadronowych o przeciwnej parzystości: Załóżmy, że mielibyśmy dokładną symetrię chiralną, $[H, Q_5^a] = 0$. Rozważmy stany hadronowe $|N^+\rangle$ i $|N_a^-\rangle = Q_5^a|N^+\rangle$. Mają one przeciwne parzystości, ponieważ $\{P, Q_5^a\} = 0$. Załóżmy, ze $|N^+\rangle$ ma mase M, czyli $H|N^+\rangle = M|N^+\rangle$. Mamy wówczas $Q_5^aH|N^+\rangle = Q_5^aM|N^+\rangle$ oraz $HQ_5^a|N^+\rangle = Q_5^aM|N^+\rangle$, zatem $H|N_a^-\rangle = M|N_a^-\rangle$, czyli $|N^+\rangle$ i $|N_a^-\rangle$ są zdegenerowane. W wyniku małego jawnego łamania symetrii, stany te byłyby niemal zdegenerowane. Gdyby próżnia QCD była realizowana w stanie Wignera, wówczas spektrum hadronów musiałoby przejawiać degeneracje względem parzystości. Doświadczalne spektrum hadronów nie posiada tej cechy. W fazie Goldstone'a jest wyjście z tego paradoksu. Stan $|N_a^-\rangle$ to stan $|N^+ +$ piony$\rangle$. Ponieważ piony sa bezmasowe, masy stanów $|N^+\rangle$ i $|N^+ +$piony$\rangle$ są jednakowe.

- Związek Goldbergera–Treimana, łączący ładunek słaby nukleonu, g_A, jego masę, M_N, stałą sprzężenia pion-nukleon, $g_{\pi NN}$, oraz stałą rozpadu pionu, F_π:
$$g_A M_N = g_{\pi NN} F_\pi + \mathcal{O}(m_\pi^2/\Lambda_\chi^2), \tag{5.21}$$
Poprawka $\mathcal{O}(m_\pi^2/\Lambda_\chi^2)$ wynosi jedynie kilka procent. Zauważmy, że związek ten w nietrywialny sposób łaczy stałe oddziaływań słabych i silbych.

- Dlugości rozpraszania w fali S w niskoenergetycznym rozpraszaniu $\pi - N$ w kanałach o izospinie 1/2 i 3/2 (Weinberg):
$$\begin{aligned} a_{1/2} &= \frac{m_\pi}{4\pi F_\pi^2} \simeq 0.18/(140\text{MeV}) \qquad \text{dośw.} : (0.171 \pm 0.005)/(140\text{MeV}), \\ a_{3/2} &= -\frac{m_\pi}{8\pi F_\pi^2} \simeq -0.09/(140\text{MeV}) \qquad \text{dośw.} : -(0.088 \pm 0.004)/(140\text{MeV}) \end{aligned} \tag{5.22}$$

- Dlugości rozpraszania $\pi\pi$ wynoszą
$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{7m_\pi}{32\pi F_\pi^2} \simeq 0.16/(140\text{MeV}) \qquad \text{dośw.} : (0.26 \pm 0.05)/(140\text{MeV}),, \\ a_2 &= -\frac{2m_\pi}{32\pi F_\pi^2} \simeq -0.046/(140\text{MeV}) \qquad \text{dośw.} : -(0.028 \pm 0.012)/(140\text{MeV}), \end{aligned} \tag{5.23}$$
gdzie indeksy 0 i 2 oznaczają izospin układu dwóch pionow. Poprawki w rozwinięciu chiralnym polepszają zgodność z doświadczeniem..

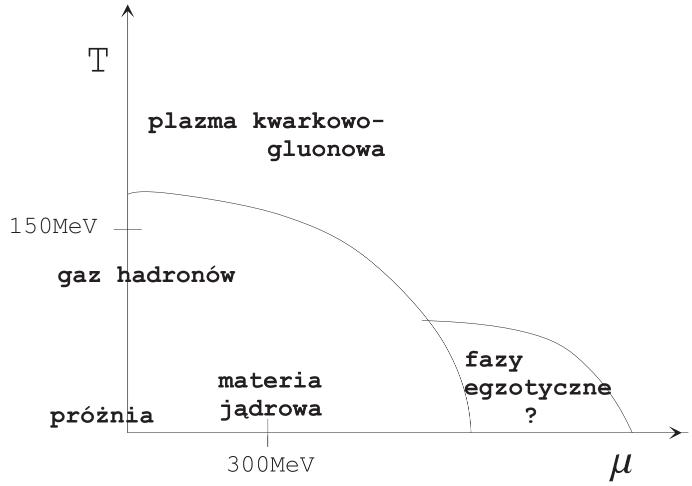
- Reguła sum Adlera-Weisbergera:
$$g_A^2 - 1 = \int \frac{d\omega}{\omega^2} \sqrt{\omega^2 - m_\pi^2} \left(\sigma_{\pi^+ p}(\omega) - \sigma_{\pi^- p}(\omega) \right). \tag{5.24}$$

- Granica miękkich pionów, twierdzenia niskoenergetyczne, związki pomiędzy amplitudami, chiralny rachunek zaburzeń

5.3.2 Diagram fazowy QCD

Istnieje powszechne przekonanie, że faza Nambu-Goldstone'a, będąca stanem podstawowym próżni, jest niszczona w wysokiej temperaturze, bądź przy wysokich gęstościch barionowych. Dla układów o zerowej gęstości barionowej i wysokiej temperaturze mamy tu bezpośrednie informacje z rachunków QCD na siatkach, które pokazują, że w granicy chiralnej ($m = 0$) wartość kondensatu chiralnego $\langle \bar{q}q \rangle$ maleje do zera przy temperaturach rzędu 150MeV. Powyżej temperaturty krytycznej tworzy się faza Wignera. Kondensat chiralny pełni rolę parametru porządku. Można pokazać, że przejście fazowe jest drugiego rodzaju. Dla $m \neq 0$ kondensat chralny nie jest już, w matematycznym sensie, parametrem porządku, i przejście fazowe zastąpione jest przez przejście gładkie (smooth crossover), tzn. wielkości termodynamiczne i ich pochodne zmieniają się w sposób ciągły.

Dla niezerowych gęstości barionowych sytuacja jest bardziej skomplikowana. Rachunki na sieciach nie są możliwe w niezerowych potencjałach chemicznych.



Rys. 5.2: Schematyczny diagram fazowy QCD w płaszczyźnie barionowy potencjał chemiczny (μ) – temperatura (T).

Tak więc nasza wiedza o gęstych układach pochodzi z rozlicznych modeli. Modele te wskazują na spadek wartości $\langle \bar{q}q \rangle$ ze wzrostem gęstości. Przewidują też istnienie bardziej egzotycznych faz, np. fazy z kolorowym kondensatem dikwarkowym. Rys. 5.2 przedtawia w schematyczny sposób nasze wyobrażenie o diagramie fazowym QCD.

5.3.3 CVC i PCAC

Jak pokazaliśmy w rozdziale 5.2, dla $m_u = m_d \equiv \bar{m}$ mamy

$$\partial_\mu j_a^\mu = 0, \tag{5.25}$$

co określa sie mianem *zachowania prądu wektorowego* (CVC, concervation of vector current), oraz

$$\partial_\mu j_{5,a}^\mu = \bar{m}\bar{\psi}\tau_a i\gamma_5\psi, \tag{5.26}$$

co nazywamy *częściowym zachowaniem prądu osiowego* (PCAC, partial conservation of axial currents). Prądy j_a^μ i $j_{5,a}^\mu$ sprzęgają się do fotonów i bozonów pośredniczących w oddziaływaniach słabych, w związku z czym ich elementy macierzowe mogą być wyznaczone z odpowiednich procesów elektromagnetycznych i słabych. W szczególności

$$\langle 0|j_{5,a}^\mu(x)|\pi_b(q)\rangle = iF_\pi q^\mu e^{-iq\cdot x}\delta_{ab}, \tag{5.27}$$

gdzie stałą rozpadu pionu, $F_\pi \approx 93$MeV, znamy z rozpadu $\pi^+ \to \mu^+\nu_\mu$. Wynika stad, że

$$\langle 0|\partial_\mu j_{5,a}^\mu(x)|\pi_b(q)\rangle = F_\pi q_\mu q^\mu e^{-iq\cdot x}\delta_{ab} = F_\pi m_\pi^2 e^{-iq\cdot x}\delta_{ab}. \tag{5.28}$$

Wprowadzając tzw. interpolujace pole pionu,

$$\phi_a(x) = \frac{\partial_\mu j_{5,a}^\mu(x)}{F_\pi m_\pi^2}, \tag{5.29}$$

otrzymujemy z (5.28)

$$\langle 0|\phi_a(x)|\pi_b(q)\rangle = e^{-iq\cdot x}\delta_{ab}, \tag{5.30}$$

czyli element macierzowy $\langle 0|\phi_a(x)|\pi_b(q)\rangle$ jest znormalizowany tak samo, jak dla kanonicznego pola pionu. Pole $\phi_a(x)$ nazywamy też *pionem PCAC.*

Znaczenie PCAC: *Wlasności procesów z pionami i innymi hadronami dają się w granicy miękkich pionów wyrazić przez własności transformacyjne hadronów przy przekształceniach chiralnych.*

5.3.4 Zwiazki GMOR i kondensat chiralny

A oto przykład rachunku opartego o PCAC. Rozważmy następujący propagator:

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\sum_a \int d^4x e^{-iq\cdot x}\langle 0|T\left(\partial_\mu j^\mu_{5,a}(x), \partial_\nu j^\nu_{5,a}(0)\right)|0\rangle &= \\ \frac{1}{3}F_\pi^2 m_\pi^4 \sum_a \int d^4x e^{-iq\cdot x}\langle 0|T\left(\phi_a(x), \phi_a(0)\right)|0\rangle &= \frac{iF_\pi^2 m_\pi^4}{q^2-m_\pi^2}f(q^2). \end{aligned} \tag{5.31}$$

Podstawowe założenie PCAC to gładkość funkcji $f(q^2)$ w okolicy $q^2=0$. Oznacza to w praktyce, że możemy przyjąć $f(0)\approx f(m_\pi^2)\equiv 1$. Następnie stosujemy *granice miekkich pionow*: bierzemy $\vec{q}\to 0$, a następnie $q_0\to 0$. Wówczas lewa strona (5.31), po scałkowaniu przez części, daje się zapisać jako

$$i\frac{1}{3}\sum_a \langle 0|[Q_5^a,[Q_5^a,\mathcal{H}(0)]]|0\rangle, \tag{5.32}$$

gdzie komutator pojawia się z pochodnej czasowej iloczynu chronologicznego. Wielkość $\mathcal{H}(0)$ jest gęstością Hamiltonianu QCD w punkcie $x=0$. Można bez trudu wyliczyć, że

$$\frac{1}{3}\sum_a [Q_5^a,[Q_5^a,\mathcal{H}(0)]] = \bar{m}\bar{\psi}(0)\psi(0).$$

Biorąc granicę miękkich pionów po prawej stronie (5.31) dostajemy związek

$$\bar{m}\langle 0|\bar{\psi}\psi|0\rangle = -F_\pi^2 m_\pi^2 f(0). \tag{5.33}$$

Na mocy założenia PCAC, $f(0)\approx f(m_\pi^2)=1$, dostajemy związek

$$\bar{m}\langle\bar{\psi}\psi\rangle = -F_\pi^2 m_\pi^2. \tag{5.34}$$

Jest to słynny zwiazek Gell-Manna-Oaksa-Rennera. Możemy też bardziej ogólnie napisać

$$2\bar{m}\langle\bar{q}q\rangle = -F_\pi^2 m_\pi^2 + \mathcal{O}(m_\pi^4/\Lambda_\chi^4), \tag{5.35}$$

gdzie $\langle\bar{q}q\rangle$ jest wartością kondensatu chiralnego dla pojedynczego zapachu w granicy chiralnej $\bar{m}\to 0$. Oszacowania dają

$$\langle\bar{q}q\rangle = \frac{1}{2}\left(\langle\bar{u}u\rangle + \langle\bar{d}d\rangle\right) \simeq -(210 \div 260\text{MeV})^3. \tag{5.36}$$

faza Wignera	faza Nambu-Goldsone'a
$\langle\bar{\psi}\psi\rangle = 0$	$\langle\bar{\psi}\psi\rangle \neq 0$
$m_\pi > 0$	$m_\pi = 0$
$F_\pi = 0$	$F_\pi > 0$
zdegenerowane multiplety z cząstkami o przeciwnej parzystości: $m_\pi = m_\sigma$, $m_\rho = m_{A_1}$, ...	brak zdegenerowanych multipletów z cząstkami o przeciwnej parzystości: $m_\pi < m_\sigma$, $m_\rho < m_{A_1}$, ...

Tabela 5.1: Porównanie własności faz Wignera i Nambu-Goldstone'a

Zauważmy, że mamy $m_\pi \sim \sqrt{\bar{m}}$.

Dla trzech zapachów powyższe związki można w prosty sposób uogólnić. Dostajemy

$$(m_s + \bar{m})\langle\bar{q}q\rangle = -F_\pi^2 m_K^2 + \mathcal{O}(m_s^2), \tag{5.37}$$

co po wydzieleniu stronami ze związkiem (5.33) daje

$$\frac{2\bar{m}}{\bar{m} + m_s} = \frac{m_\pi^2}{m_K^2} + \mathcal{O}(m_s^2/\Lambda_\chi^2) \simeq \frac{140^2}{494^2} \sim 0.08. \tag{5.38}$$

Dla $\bar{m} = 6$MeV dostajemy stąd $m_s \simeq 150$MeV.

Dokładniej, dostajemy

$$\begin{aligned}
-(m_s + m_u)\langle\bar{q}q\rangle + \Delta &= F_\pi^2 m_{K^\pm}^2, \\
(m_s + m_d)\langle\bar{q}q\rangle &= F_\pi^2 m_{K^0}^2 = F_\pi^2 m_{\bar{K}^0}^2, \\
-(m_d + m_u)\langle\bar{q}q\rangle + \Delta &= F_\pi^2 m_{\pi^\pm}^2, \\
-(m_d + m_u)\langle\bar{q}q\rangle &= F_\pi^2 m_{\pi^0}^2, \\
-(m_d + m_u + 4m_s)\langle\bar{q}q\rangle &= F_\pi^2 m_\eta^2,
\end{aligned} \tag{5.39}$$

skąd wynika związek Gell-Manna-Okubo

$$3m_\eta^2 + 2m_{\pi^\pm}^2 - m_{\pi^0}^2 = 2m_{K^\pm}^2 + 2m_{K^0}^2, \tag{5.40}$$

oraz stosunki

$$\begin{aligned}
\frac{m_d}{m_s} &= \frac{m_{K^0}^2 + m_{\pi^\pm}^2 - m_{K^\pm}^2}{m_{K^0}^2 + m_{K^\pm}^2 - m_{\pi^\pm}^2} \simeq 0.050, \\
\frac{m_u}{m_s} &= \frac{2m_{\pi^0}^2 - m_{K^0}^2 - m_{\pi^\pm}^2 + m_{K^\pm}^2}{m_{K^0}^2 + m_{K^\pm}^2 - m_{\pi^\pm}^2} \simeq 0.027.
\end{aligned} \tag{5.41}$$

5.4 Modele kwarkowe zgodne z symetrią chiralną

5.4.1 Worki chiralne

Problemem dyskutowanych w rozdziale 4 modeli jest łamanie symetrii chiralnej. W modelu Bogolubowa człon $\bar{\psi}(x)S(x)\psi(x)$ w Langranżjanie łamie symetrię chiralną. W worku MIT, którego gęstość Lagranżjanu można zapisać w postaci

$$L_{MIT}(x) = \left[\frac{i}{2}\bar{\psi}(x) \overleftrightarrow{\partial}_\mu \gamma^\mu \psi(x) - B\right] \Theta(R-r) - \frac{1}{2}\bar{\psi}(x)\psi(x)\delta(R-r), \quad (5.42)$$

można bez trudu pokazać, że $\partial_\mu j^\mu_{5,a}(x) = -\frac{1}{2}\bar{\psi}(x)\tau_a i\gamma_5\psi(x)\delta(r-R)$, a zatem prąd osiowy jest łamany na powierzchni worka. Aby temu zapobiec, Chodos i Thorn zaproponowali model worka zgodny z symetrią chiralną:

$$\begin{aligned} L_{CT}(x) &= \left[\frac{i}{2}\bar{\psi} \overleftrightarrow{\partial}_\mu \gamma^\mu \psi - B\right] \Theta(R-r) \quad (5.43)\\ &-\frac{1}{2\sqrt{\sigma^2+\pi^2}}\bar{\psi}\left(\sigma + i\gamma_5\tau_a\pi^a\right)\psi\delta(R-r) + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\sigma\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\pi\right)^2 \end{aligned}$$

Nieco różniącym się modelem jest model zaproponowany przez G. E. Browna i współpracowników, w którym człon kinetyczny modelu Chodosa i Thorna jest "wypchnięty" poza worek: $\left[\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\sigma\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\pi\right)^2\right]\Theta(r-R)$, a także tzw. Cloudy Bag Model, w którym pole pionu jest realizowane nieliniowo:

$$\begin{aligned} L_{CBM}(x) &= \left[\frac{i}{2}\bar{\psi} \overleftrightarrow{\partial}_\mu \gamma^\mu \psi - B\right] \Theta(R-r) \quad (5.44)\\ &-\frac{1}{2}\bar{\psi}e^{i\tau_a\phi^a\gamma_5/F_\pi}\psi\delta(R-r) + \frac{1}{2}\left(D_\mu\phi_a\right)^2\Theta(r-R), \end{aligned}$$

gdzie pochodna kowariantna zdefiniowana jest jako $D_\mu\phi_a = \hat{\phi}_a\partial_\mu\phi + F_\pi\sin(\phi/F_\pi)\partial_\mu\hat{\phi}_a$, oraz $\phi = \sqrt{\phi_a\phi^a}$ i $\hat{\phi}_a = \phi_a/\phi$.

5.5 Chiralne modele solitonowe (niedokończone)

We wszystkich pisanych wyżej modelach worków mechanizm tworzenia stanów związanych jest de facto wymuszany przez nieskończoną wartość masy kwarku na zewnątrz worka. Wewnątrz worka masa kwarku ma wartość prądową. Chiralne modele solitonowe oparte są na innych przesłankach. 1) podstawowym czynnikiem dynamicznym jest spontanicznie złamana symetria chiralna 2) efekty związane z uwięzieniem kwarków są, przynajmniej dla stanów podstawowych, zaniedbywalne.

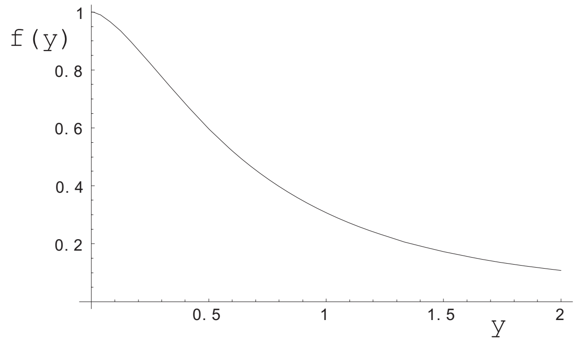
5.5.1 Model σ z kwarkami

Najprostrzym sposobem realizacji dynamiki chiralnej prowadzącej do wiązania kwarków jest model σ Gell-Manna–Lévy'ego

Lagranżjan:

$$\begin{aligned} L_\sigma(x) &= \bar{\psi}[i\partial^\mu\gamma_\mu + m + g\left(\sigma + i\gamma_5\tau^a\pi_a\right)]\psi \\ &+\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\sigma\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\pi_a\right)^2 - U(\sigma^2+\pi_a^2) + m_\pi^2F_\pi\sigma \quad (5.45) \end{aligned}$$

Masa konstytuentna: $M = m - g\langle\sigma\rangle = m + gF_\pi$



Rys. 5.3: Funkcja wchodząca w równanie szczeliny energetycznej w modelu Nambu–Jona-Lasinio.

5.5.2 Dynamiczne łamanie symetrii chiralnej i model NJL

Dynamiczne łamanie symetrii,

Równania ruchu, *bozonizacja*

$$(i\partial^\mu\gamma_\mu - m)\psi = -G[(\bar\psi\psi)\psi + (\bar\psi i\gamma_5\tau^a\psi)i\gamma_5\tau^a\psi] = 0$$

Lagranżjan równoważny:

$$L_{NJL}(x) = \bar\psi(i\partial^\mu\gamma_\mu - m)\psi + [(\bar\psi\psi)S + (\bar\psi i\gamma_5\tau^a\psi)P_a] - \frac{1}{2G}\left(S^2 + P^2\right), \quad (5.46)$$

dający równania

$$\begin{aligned}
(i\partial^\mu\gamma_\mu - m + S + i\gamma_5\tau^a P_a)\psi &= 0, && (5.47)\\
S &= G\bar\psi\psi, && (5.48)\\
P_a &= G\bar\psi i\gamma_5\tau^a\psi, && (5.49)
\end{aligned}$$

Równanie na szczelinę energetyczną (dla prostoty w granicy $m = 0$):

$$M = GN_cN_f\int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{4M}{k^2+M^2}, \quad (5.50)$$

gdzie $N_c = 3$ jest liczbą kolorów, $N_f = 2$ liczbą zapachów, a Λ oznacza obcięcie dużych k^2. Przykładowe zrealizowanie obcięcia jest następujące:

$$M = \frac{GN_cN_f}{4\pi^2}M\int_0^\Lambda d(k^2)\frac{k^2}{k^2+M^2} = \frac{GN_cN_f}{4\pi^2}M\left(\Lambda^2 - M^2\ln\left(\Lambda^2/M^2+1\right)\right). \quad (5.51)$$

Jedno rozwiązanie: $M = 0$. Drugie rozwiązanie pojawia się dla dostatecznie dużych wartości stałej sprzężenia G i obcięcia Λ, spełniając równanie

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{GN_cN_f\Lambda^2}{4\pi^2}f(y), && (5.52)\\
f(y) &= 1 + y^2\ln(y/(1+y)), && (5.53)
\end{aligned}$$

gdzie $y = M/\Lambda$. Funkcja $f(y)$ przedstawiona jest na Rys. .... Oczywistym jest, że dla

$$\frac{GN_cN_f\Lambda^2}{4\pi^2} > 1 \tag{5.54}$$

równanie (5.52) posiada rozwiązanie dla $y > 0$. Tym samym, tworzona jest niezerowa masa M kwarku. To nietrywialne rozwiązanie odpowiada stanowi o najniższej energii (prózni).

Część II

Dotatki

Dodatek A

Własności wybranych cząstek

Lista cząstek elementarnych oraz rezonansów hadronowych publikowana jest okresowo przez Particle Data Group (*http://pdg.lbl.gov*) [?]. Obecnie tablice, stanowiące swoistą biblię "cząstkowców", zawierają setki rezonansów, podając ich własności. Rezonans posiada symbol (np. π, ρ, K, K^*, N, Δ, ...) oznaczający dla wtajemniczonych jego liczby kwantowe, masę m, szerokość rozpadu Γ, oraz inne charakterystyki. Masy zaobserwowanych rezonansów utworzonych z lekkich kwarków/antykwarków (u, d, s) sięgają 3GeV. Rezonanse z kwarkami ciężkimi (c, b) są cięższe ze względu na dużą masę tych kwarków. Obecny "rekordzista" to rezonans $b\bar{b}$ oznaczany symbolem $\Upsilon(11020)$, o masie około 11GeV. Czas życia rezonansu to $\tau = \hbar/\Gamma$. Szerokość większości obserwowanych rezonansów to 100−200MeV, co daje czasy życia rzędu $3{-}6{\times}10^{-24}s$.[1]

Rezonanse posiadają "etykietę" złożoną z liczb kwantowych: $I^G(J^{PC})$. *Liczby te są zachowane w oddziaływaniach silnych.*

- I – izospin. $I = 0$ – izoskalar, $I = 1$ – izowektor, $I = \frac{1}{2}$ – dublet, $I = \frac{3}{2}$ – tryplet, itd., w ogólności dla cząstki o izospinie I występuje $2I+1$ stanów ładunkowych. Przykładem izowektora jest pion, występujący w trzech stanach ładunkowych: π^+, π^0, π^-.

- G – parzystość G (definiowana tylko dla mezonow o całkowitym izospinie). Formalna definicja to $G = Ce^{i\pi I_2}$, gdzie C jest sprzężeniem ładunkowym, a I_2 generatorem obrotu izospinowego wokół osi 2. W praktyce, parzystość G określa, czy dany rezonans rozpada się na parzystą czy nieparzystą liczbę pionów. Ponieważ parzystość G pionu jest ujemna, $G\pi^a = -\pi^a$, czastka o ujemnym (dotatnim) G rozpada się na nieparzystą (parzystą) liczbę pionów, np. dozwolone są rozpady $\rho \to \pi\pi$, $\omega \to \pi\pi\pi$, $\omega \to \rho\pi$, a wzbronione $\omega \to \pi\pi$, $\rho \to \pi\pi\pi$.[2]

- J – spin. Dla mezonów $J = 0, 1, 2, ...$, dla barionów, $J = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2} ...$.

- P – parzystość wewnętrzna, odpowiadająca odbiciu przestrzennemu $\mathcal{P}$ zdefinionanemu jako operacja $\vec{x} \to -\vec{x}$. Np. dla pionu $\mathcal{P}\pi^a = -\pi^a$, czyli

[1] eV = $1.602{\times}10^{-19}$ J, $\hbar = 1.054 \times 10^{-34}$ J s.

[2] Dokładna analiza symetrii G i wynikających z niej ograniczeń dla wielu procesów hadronowych przedstawiona jest obszernie w [?]

parzystość wewnętrzna jest ujemna.

- C – sprzężenie ładunkowe, definiowane dla neutralnych mezonów. Operacja sprzężenia ładunkowego $\mathcal{C}$ zmienia cząstkę w antycząstkę, np. $\mathcal{C}\pi^0 = \pi^0$, $\mathcal{C}\pi^+ = \pi^-$, $\mathcal{C}\omega = -\omega$.

Ponadto rezonanse klasyfikowane są gwiazdkami: **** – ogólnie uznane, dobre, rezonanse, o znanych własnościach, *** – istnienie pewne lub bardzo prawdopodobne, ** – ewidencja mierna, * – bardzo słaba ewidencja.

Dla wygody czytelnika przedrukowujemy tablice własności kilku ważniejszych mezonów i barionów.

Review of Particle Physics: C. Caso *et al.* (Particle Data Group), European Physical Journal **C3**, 1 (1998)

LIGHT UNFLAVORED MESONS
($S = C = B = 0$)

For $I = 1$ (π, b, ρ, a): $u\overline{d}$, $(u\overline{u}-d\overline{d})/\sqrt{2}$, $d\overline{u}$;
for $I = 0$ (η, η', h, h', ω, ϕ, f, f'): $c_1(u\overline{u} + d\overline{d}) + c_2(s\overline{s})$

$\pi^{\pm}$

$I^G(J^P) = 1^-(0^-)$

Mass $m = 139.56995 \pm 0.00035$ MeV
Mean life $\tau = (2.6033 \pm 0.0005) \times 10^{-8}$ s (S = 1.2)
$c\tau = 7.8045$ m

$\pi^{\pm} \to \ell^{\pm}\nu\gamma$ form factors [a]

$F_V = 0.017 \pm 0.008$
$F_A = 0.0116 \pm 0.0016$ (S = 1.3)
$R = 0.059^{+0.009}_{-0.008}$

π^- modes are charge conjugates of the modes below.

π^+ DECAY MODES			Fraction (Γ_i/Γ)	Confidence level	p (MeV/c)
$\mu^+\nu_\mu$		[b]	(99.98770 ± 0.00004) %		30
$\mu^+\nu_\mu\gamma$		[c]	$(1.24 \pm 0.25) \times 10^{-4}$		30
$e^+\nu_e$		[b]	$(1.230 \pm 0.004) \times 10^{-4}$		70
$e^+\nu_e\gamma$		[c]	$(1.61 \pm 0.23) \times 10^{-7}$		70
$e^+\nu_e\pi^0$			$(1.025 \pm 0.034) \times 10^{-8}$		4
$e^+\nu_e e^+ e^-$			$(3.2 \pm 0.5) \times 10^{-9}$		70
$e^+\nu_e\nu\overline{\nu}$			$< 5 \times 10^{-6}$	90%	70
Lepton Family number (LF) or Lepton number (L) violating modes					
$\mu^+\overline{\nu}_e$	L	[d]	$< 1.5 \times 10^{-3}$	90%	30
$\mu^+\nu_e$	LF	[d]	$< 8.0 \times 10^{-3}$	90%	30
$\mu^- e^+ e^+ \nu$	LF		$< 1.6 \times 10^{-6}$	90%	30

Review of Particle Physics: C. Caso *et al.* (Particle Data Group), European Physical Journal **C3**, 1 (1998)

f_0(400–1200) [h]
or σ

$I^G(J^{PC}) = 0^+(0^{++})$

Mass m = (400–1200) MeV
Full width Γ = (600–1000) MeV

f_0(400–1200) DECAY MODES	Fraction (Γ_i/Γ)	p (MeV/c)
$\pi\pi$	dominant	–
$\gamma\gamma$	seen	–

ρ(770) [i]

$I^G(J^{PC}) = 1^+(1^{--})$

Mass $m = 770.0 \pm 0.8$ MeV (S = 1.8)
Full width $\Gamma = 150.7 \pm 1.1$ MeV
$\Gamma_{ee} = 6.77 \pm 0.32$ keV

ρ(770) DECAY MODES	Fraction (Γ_i/Γ)	Scale factor/ Confidence level	p (MeV/c)
$\pi\pi$	$\sim$ 100 %		358
$\rho(770)^{\pm}$ decays			
$\pi^{\pm}\gamma$	$(4.5 \pm 0.5) \times 10^{-4}$	S=2.2	372
$\pi^{\pm}\eta$	$< 6 \times 10^{-3}$	CL=84%	146
$\pi^{\pm}\pi^{+}\pi^{-}\pi^{0}$	$< 2.0 \times 10^{-3}$	CL=84%	249
$\rho(770)^{0}$ decays			
$\pi^{+}\pi^{-}\gamma$	$(9.9 \pm 1.6) \times 10^{-3}$		358
$\pi^{0}\gamma$	$(6.8 \pm 1.7) \times 10^{-4}$		372
$\eta\gamma$	$(2.4 {}^{+0.8}_{-0.9}) \times 10^{-4}$	S=1.6	189
$\mu^{+}\mu^{-}$	[j] $(4.60 \pm 0.28) \times 10^{-5}$		369
$e^{+}e^{-}$	[j] $(4.49 \pm 0.22) \times 10^{-5}$		384
$\pi^{+}\pi^{-}\pi^{0}$	$< 1.2 \times 10^{-4}$	CL=90%	319
$\pi^{+}\pi^{-}\pi^{+}\pi^{-}$	$< 2 \times 10^{-4}$	CL=90%	246
$\pi^{+}\pi^{-}\pi^{0}\pi^{0}$	$< 4 \times 10^{-5}$	CL=90%	252

Review of Particle Physics: C. Caso *et al.* (Particle Data Group), European Physical Journal **C3**, 1 (1998)

N BARYONS
($S = 0$, $I = 1/2$)

p, $N^+ = uud$; n, $N^0 = udd$

p

$I(J^P) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}^+)$

Mass $m = 938.27231 \pm 0.00028$ MeV [a]
$= 1.007276470 \pm 0.000000012$ u
$\left|\frac{q_{\overline{p}}}{m_{\overline{p}}}\right|/(\frac{q_p}{m_p}) = 1.0000000015 \pm 0.0000000011$
$\left|q_p + q_{\overline{p}}\right|/e < 2 \times 10^{-5}$
$\left|q_p + q_e\right|/e < 1.0 \times 10^{-21}$ [b]
Magnetic moment $\mu = 2.79284739 \pm 0.00000006\ \mu_N$
Electric dipole moment $d = (-4 \pm 6) \times 10^{-23}\ e\,$cm
Electric polarizability $\overline{\alpha} = (12.1 \pm 0.9) \times 10^{-4}$ fm^3
Magnetic polarizability $\overline{\beta} = (2.1 \pm 0.9) \times 10^{-4}$ fm^3
Mean life $\tau > 1.6 \times 10^{25}$ years (independent of mode)
$> 10^{31}$ to 5×10^{32} years [c] (mode dependent)

Below, for N decays, p and n distinguish proton and neutron partial lifetimes. See also the "Note on Nucleon Decay" in our 1994 edition (Phys. Rev. **D50**, 1673) for a short review.

The "partial mean life" limits tabulated here are the limits on τ/B_i, where τ is the total mean life and B_i is the branching fraction for the mode in question.

p DECAY MODES	Partial mean life (10^{30} years)	Confidence level	p (MeV/c)
Antilepton + meson			
$N \rightarrow e^+ \pi$	> 130 (n), > 550 (p)	90%	459
$N \rightarrow \mu^+ \pi$	> 100 (n), > 270 (p)	90%	453
$N \rightarrow \nu \pi$	> 100 (n), > 25 (p)	90%	459
$p \rightarrow e^+ \eta$	> 140	90%	309
$p \rightarrow \mu^+ \eta$	> 69	90%	296
$n \rightarrow \nu \eta$	> 54	90%	310
$N \rightarrow e^+ \rho$	> 58 (n), > 75 (p)	90%	153
$N \rightarrow \mu^+ \rho$	> 23 (n), > 110 (p)	90%	119
$N \rightarrow \nu \rho$	> 19 (n), > 27 (p)	90%	153
$p \rightarrow e^+ \omega$	> 45	90%	142

Review of Particle Physics: C. Caso *et al.* (Particle Data Group), European Physical Journal **C3**, 1 (1998)

n $I(J^P) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}^+)$

Mass $m = 939.56563 \pm 0.00028$ MeV [a]
$= 1.008664904 \pm 0.000000014$ u
$m_n - m_p = 1.293318 \pm 0.000009$ MeV
$= 0.001388434 \pm 0.000000009$ u
Mean life $\tau = 886.7 \pm 1.9$ s (S = 1.2)
$c\tau = 2.658 \times 10^8$ km
Magnetic moment $\mu = -1.9130428 \pm 0.0000005\ \mu_N$
Electric dipole moment $d < 0.97 \times 10^{-25}$ e cm, CL = 90%
Electric polarizability $\alpha = (0.98^{+0.19}_{-0.23}) \times 10^{-3}$ fm^3 (S = 1.1)
Charge $q = (-0.4 \pm 1.1) \times 10^{-21}$ e
Mean $n\overline{n}$-oscillation time $> 1.2 \times 10^8$ s, CL = 90% [d] (bound n)
$> 0.86 \times 10^8$ s, CL = 90% (free n)

Decay parameters [e]

$pe^-\overline{\nu}_e$	$g_A/g_V = -1.2670 \pm 0.0035$ (S = 1.9)
"	$A = -0.1162 \pm 0.0013$ (S = 1.8)
"	$B = 0.990 \pm 0.008$
"	$a = -0.102 \pm 0.005$
"	$\phi_{AV} = (180.07 \pm 0.18)^\circ$ [f]
"	$D = (-0.5 \pm 1.4) \times 10^{-3}$

***n* DECAY MODES**		Fraction (Γ_i/Γ)	Confidence level	p (MeV/c)
$pe^-\overline{\nu}_e$		100 %		1.19
Charge conservation (Q) violating mode				
$p\nu_e\overline{\nu}_e$	Q	$< 8 \times 10^{-27}$	68%	1.29

Review of Particle Physics: C. Caso *et al.* (Particle Data Group), European Physical Journal **C3**, 1 (1998)

Δ BARYONS ($S = 0$, $I = 3/2$)

$\Delta^{++} = uuu$, $\Delta^{+} = uud$, $\Delta^{0} = udd$, $\Delta^{-} = ddd$

$\Delta(1232)$ P_{33}

$I(J^P) = \frac{3}{2}(\frac{3}{2}^+)$

Breit-Wigner mass (mixed charges) = 1230 to 1234 ($\approx$ 1232) MeV
Breit-Wigner full width (mixed charges) = 115 to 125 ($\approx$ 120) MeV
$p_{\text{beam}} = 0.30$ GeV/c $\quad 4\pi\lambdabar^2 = 94.8$ mb
Re(pole position) = 1209 to 1211 ($\approx$ 1210) MeV
-2Im(pole position) = 98 to 102 ($\approx$ 100) MeV

$\Delta(1232)$ DECAY MODES	Fraction (Γ_i/Γ)	p (MeV/c)
$N\pi$	>99 %	227
$N\gamma$	0.52–0.60 %	259
$N\gamma$, helicity=1/2	0.11–0.13 %	259
$N\gamma$, helicity=3/2	0.41–0.47 %	259

$\Delta(1600)$ P_{33}

$I(J^P) = \frac{3}{2}(\frac{3}{2}^+)$

Breit-Wigner mass = 1550 to 1700 ($\approx$ 1600) MeV
Breit-Wigner full width = 250 to 450 ($\approx$ 350) MeV
$p_{\text{beam}} = 0.87$ GeV/c $\quad 4\pi\lambdabar^2 = 18.6$ mb
Re(pole position) = 1500 to 1700 ($\approx$ 1600) MeV
-2Im(pole position) = 200 to 400 ($\approx$ 300) MeV

$\Delta(1600)$ DECAY MODES	Fraction (Γ_i/Γ)	p (MeV/c)
$N\pi$	10–25 %	512
$N\pi\pi$	75–90 %	473
$\Delta\pi$	40–70 %	301
$N\rho$	<25 %	†
$N(1440)\pi$	10–35 %	74
$N\gamma$	0.001–0.02 %	525
$N\gamma$, helicity=1/2	0.0–0.02 %	525
$N\gamma$, helicity=3/2	0.001–0.005 %	525

Dodatek B

Multiplety $\mathbf{SU(3)}_F$

$\boxed{\text{Oktet mezonów}}$

$d\bar{s}$ $\quad$ $u\bar{s}$

$d\bar{u}$ $\quad$ $\frac{u\bar{u}-d\bar{d}}{\sqrt{2}}, \frac{u\bar{u}+d\bar{d}-2s\bar{s}}{\sqrt{6}}$ $\quad$ $u\bar{d}$

$s\bar{u}$ $\quad$ $s\bar{d}$

$\boxed{\text{Singlet mezonów}}$

$\frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s})$

$\boxed{\text{Oktet barionów}}$

udd $\quad$ uud

dds $\quad$ uds $\quad$ uus

dss $\quad$ uss

$\boxed{\text{Singlet barionów}}$

uds

$\boxed{\text{Dekuplet barionów}}$

ddd $\quad$ udd $\quad$ uud $\quad$ uuu

dds $\quad$ uds $\quad$ uus

dss $\quad$ uss

sss

$\boxed{\text{Oktet mezonów}}$

	K^0 (498)		K^+ (494)	
π^- (140)		π^0 (135), η_8		π^+
	K^-		$\bar{K}^0$	

$\boxed{\text{Singlet mezonów}}$

η_0

Stany mieszane:

$$\eta = \cos\theta_P \eta_8 - \sin\theta_P \eta_0$$
$$\eta' = \sin\theta_P \eta_8 + \sin\theta_P \eta_0$$
$$\theta_P = -10^o \div -20^o,\ m_\eta = 547\text{MeV},\ m_{\eta'} = 958\text{MeV}$$

Rys. B.1: Mezony $J^P = 0^-$ $(L = 0)$.

$\boxed{\text{Oktet mezonów}}$

	K^{*0} (892)		K^{*+}	
ρ^- (770)		ρ^0, ω_8		ρ^+
	K^{*-}		$\bar{K}^{*0}$	

$\boxed{\text{Singlet mezonów}}$

ω_0

Stany mieszane:

$$\omega = \cos\theta_V \omega_8 - \sin\theta_V \omega_0$$
$$\phi = \sin\theta_V \omega_8 + \sin\theta_V \omega_0$$
$$\theta_V \simeq 35^o \simeq 1/\sqrt{2},\ m_\omega = 782\text{MeV},\ m_\phi = 1020\text{MeV}$$

Rys. B.2: Mezony $J^P = 1^-$ $(L = 0)$.

$\boxed{\text{Oktet barionów}}$

	n (939.6)		p (938.3)	
Σ^- (1197.4)		Σ^0 (1192.5) , Λ (1115.7)		Σ^+ (1189.4)
	Ξ^- (1321.3)		Ξ^0 (1314.9)	

Rys. B.3: Bariony $J^P = \frac{1}{2}^+$ $(L = 0)$.

$\boxed{\text{Singlet barionów}}$

$\Lambda(1405)$

Rys. B.4: Barion $J^P = \frac{1}{2}^-$ $(L = 1)$.

$\boxed{\text{Dekuplet barionów}}$

Δ^- (1232)	Δ^0	Δ^+	Δ^{++}
	Σ^{*-} (1385)	Σ^{*0}	Σ^{*+}
	Ξ^{*-} (1530)	Ξ^{*0}	
	Ω^- (1672)		

Rys. B.5: Bariony $J^P = \frac{3}{2}^+$ $(L = 0)$.

Dodatek C

Bryk teorii pola

C.1 Macierze Pauliego i Gell-Manna

Macierze $SU(2)$ Pauliego:

$$\begin{aligned} \sigma^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ \sigma^k \sigma^l &= \delta^{kl} 1 + i\varepsilon^{klm}\sigma^m. \end{aligned} \tag{C.1}$$

Dla grupy izospinu macierze Pauliego konwencjonalnie oznaczamy przez τ^a.

Macierze $SU(3)$ Gell-Manna:

$$\begin{aligned} \lambda^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda^4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda^7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{C.2}$$

Zachodzi związek $[\lambda^b, \lambda^d] = i f_a^{\cdot bd} \lambda^a$, gdzie całkowicie antysymetryczne tensory $f_a^{\cdot bd}$ są *stałymi struktury* grupy $SU(3)$:

$$\begin{array}{ll} f_{123} = 1 & f_{345} = \frac{1}{2} \\ f_{147} = \frac{1}{2} & f_{367} = -\frac{1}{2} \\ f_{156} = -\frac{1}{2} & f_{458} = \sqrt{\frac{3}{2}} \\ f_{246} = \frac{1}{2} & f_{678} = \sqrt{\frac{3}{2}} \\ f_{257} = -\frac{1}{2} & \end{array} \tag{C.3}$$

C.2 Pole o spinie 0 (skalarne lub pseudoskalarne):

$$\begin{aligned} L(x) &= \frac{1}{2}\left(\partial^\mu \phi(x)\right)\left(\partial_\mu \phi(x)\right) - \frac{1}{2} m^2 \phi(x)^2 \\ &= \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2. \end{aligned} \tag{C.4}$$

Rzeczywistą (i dodatnią) stałą m nazywamy masą. Pole ϕ może nieść indeks a związany z symetrią wewnętrzną (np. izospin). Wówczas w ogólności mamy

$$L = \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi^a)^2 - \frac{1}{2}\phi^a (m^2)_{ab}\phi^b, \tag{C.5}$$

a macierz m^2 musi być hermitowska. Pole ϕ spełnia równanie Kleina-Gordona:

$$\left(\partial^\mu \partial_\mu + m^2\right)\phi = 0. \tag{C.6}$$

C.3 Pole o spinie 1/2 (Diraca):

$$L = \bar{\psi}^\alpha \left(i\partial_\mu \gamma^\mu_{\alpha\beta} - m\delta_{\alpha\beta}\right)\psi^\beta = \bar{\psi}\left(i\partial_\mu\gamma^\mu - m\right)\psi = \bar{\psi}\left(i\not{\partial} - m\right)\psi, \tag{C.7}$$

gdzie $\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$ jest wskaznikiem Diraca, $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$. Macierze γ mają postać (w tzw. reprezentacji Diraca):

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}. \tag{C.8}$$

Wprowadza się też

$$\beta = \gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \; \alpha^i = \gamma^0\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \; \gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{C.9}$$

Podstawowa własność macierzy Diraca:

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}. \tag{C.10}$$

Poszukujemy (czteroskładnikowych) spinorów Diraca, spełniających równanie

$$\left(i\partial_\mu\gamma^\mu - m\right) q(\vec{x}, t) = \left(i\gamma^0\partial_0 + i\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla} - m\right) q(\vec{x}, t) = 0. \tag{C.11}$$

Aby odseparować czas, podstawmy $q(\vec{x}, t) = w(\vec{x})e^{-i\epsilon t}$ i pomnóżmy powyższe równanie z lewej strony przez β. Otrzymujemy

$$\left(\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}}{i} + \beta m\right) w(\vec{x}) = \epsilon w(\vec{x}). \tag{C.12}$$

Operator

$$h = \frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}}{i} + \beta m \tag{C.13}$$

nazywamy Hamiltonianem Diraca. Przechodząc do reprezentacji pędowej,

$$w(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} w(\vec{p}), \tag{C.14}$$

otrzymujemy

$$(\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m)\, w(\vec{p}) = \epsilon w(\vec{p}). \tag{C.15}$$

Równanie (C.15) ma jawną postać

$$\begin{pmatrix} (m-\epsilon) & \vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p} & -(m+\epsilon) \end{pmatrix} w(\vec{p}) = 0, \tag{C.16}$$

i stanowi hermitowski problem własny. Wprowadźmy oznaczenie $E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$, oraz

$$\chi(1/2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \chi(-1/2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Bez trudu można sprawdzić, że wektory

$$u(\vec{p}, s) = N \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E_p+m} \end{pmatrix} \chi(s), \qquad s = \pm 1/2 \tag{C.17}$$

są rozwiązaniami (C.16) dla $\epsilon = E_p$, a wektory

$$v(-\vec{p}, s) = N \begin{pmatrix} -\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E_p+m} \\ 1 \end{pmatrix} \chi(s), \qquad s = \pm 1/2 \tag{C.18}$$

są rozwiązaniami (C.16) dla $\epsilon = -E_p$. Stała normalizacji wynosi $N = \sqrt{\frac{E_p+m}{2m}}$.

C.4 Tw. Noether dla symetrii wewnętrznych

Tw. Noether: *Każdej ciągłej symetrii Lagranżjanu odpowiada zachowany prąd.*

Przykłady: Translacja przestrzenna i czasowa – tensor energii-pedu, transformacja pola spinorowego o fazę – liczba barionowa.

Symetrie wewnetrzne: Rozważmy Lanranżjan klasycznej teorii pola o n polach rzeczywistych, $n > 1$,

$$L = L(\{\partial_\mu \phi_i(x)\}, \{\phi_i(x)\}), \tag{C.19}$$

implikujacy równania Eulera-Lagrange'a

$$\partial_\mu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} - \frac{\partial L}{\partial \phi_i} = 0. \tag{C.20}$$

Infinitezymalna *globalna transformacja wewnętrzna* zdefiniowana jest jako $\phi_i(x) \to \phi_i(x) + \delta\phi_i(x)$,

$$\delta\phi_i(x) = \varepsilon f_i(\{\phi_j(x)\}), \tag{C.21}$$

gdzie ε jest małym (*niezależnym* od x) parametrem transformacji, a f_i funkcjami pól $\{\phi_j(x)\}$. Transformacja (C.21) nazywana jest też *transformacją cechowania*

I rodzaju. Mówimy, że system posiada symetrię wewnetrzna (C.21), jeśli L jest niezmiennikiem tej transformacji. *Prąd Noether* odpowiadający globalnej transformacji wewnętrznej definiujemy jako

$$j^{\mu}(x) = \frac{\partial L}{\partial(\partial_{\mu}\phi_i)} f_i(\{\phi_j(x)\}). \tag{C.22}$$

Tw. Noether dla globalnej symetrii wewnętrznej: *Jeśli układ posiada symetrię zadaną przez (C.21), wówczas $\partial_{\mu}j^{\mu}(x) = 0$, tzn. prąd Noether jest zachowany.*

Dowód: Z założenia L jest niezmiennikim transformacji (C.21), $\delta L = 0$, zatem

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial(\partial_{\mu}\phi_i)}\partial_{\mu}\delta\phi_i + \frac{\partial L}{\partial \phi_i}\delta\phi_i = 0, \tag{C.23}$$

i wobec tego

$$\begin{aligned} \partial_{\mu}j^{\mu} &= \left(\partial_{\mu}\frac{\partial L}{\partial(\partial_{\mu}\phi_i)}\right) f_i + \frac{\partial L}{\partial(\partial_{\mu}\phi_i)}\partial_{\mu} f_i = \\ &= \left(\partial_{\mu}\frac{\partial L}{\partial(\partial_{\mu}\phi_i)} - \frac{\partial L}{\partial \phi_i}\right) f_i = 0, \end{aligned} \tag{C.24}$$

gdzie ostatnia równość wynika z równań Eulera-Lagrange'a (C.20).

W częstych zastosowaniach tylko część Lagranżjanu jest symetryczna. Zapiszmy $L = L_0 + L_1$, gdzie L_0 posiada symetrię, a L_1 ją łamie. Rozłożenie to jest użyteczne, jeśli L_1 jest małe w stosunku do L_0. Łamanie symetrii w Lagranżjanie nazywamy *jawnym łamaniem symetrii*, w odróżnieniu od łamania spontanicznego. W przypadku jawnego łamania symetrii rownież definiujemy prąd Noether poprzez (C.22). Prąd ten jest teraz łamany, tzn:

$$\partial_{\mu}j^{\mu} = \frac{\partial L_1}{\partial(\partial_{\mu}\phi_i)}\partial_{\mu} f_i + \frac{\partial L_1}{\partial \phi_i} f_i \neq 0. \tag{C.25}$$

Przykład:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}(\partial_{\mu}S(x))^2 + \frac{1}{2}(\partial_{\mu}P(x))^2 - \frac{m^2}{2}\left(S(x)^2 + P(x)^2\right), \\ \left(\partial^{\mu}\partial_{\mu} + m^2\right)S(x) &= 0, \qquad \left(\partial^{\mu}\partial_{\mu} + m^2\right)P(x) = 0, \\ \delta S(x) &= -\varepsilon P(x), \qquad \delta P(x) = \varepsilon S(x), \\ f_S &= -P, \qquad f_P = S, \\ \delta L &= (\partial_{\mu}\delta S)(\partial_{\mu}S) + (\partial_{\mu}\delta P)(\partial_{\mu}P) - m^2(S\delta S + P\delta P) = \\ &= -\varepsilon(\partial_{\mu}P)(\partial_{\mu}S) + \varepsilon(\partial_{\mu}S)(\partial_{\mu}P) - m^2(-\varepsilon PS + \varepsilon SP) = 0, \\ j^{\mu} &= S\partial_{\mu}P - P\partial_{\mu}S, \\ \partial_{\mu}j^{\mu} &= S\partial_{\mu}\partial^{\mu}P - P\partial_{\mu}\partial^{\mu}S = Sm^2P - Pm^2S = 0. \end{aligned}$$

Jeśli dodamy człon łamiący jawnie symetrię, np. $L_1 = -cS(x)$, wówczas

$$\begin{aligned} \left(\partial^{\mu}\partial_{\mu} + m^2\right)S &= c, \\ \partial_{\mu}j^{\mu} &= -cm^2P. \end{aligned}$$

Ładunek: definiujemy jako $Q = \int d^3x j^0(x)$. Jeśli symetria jest zachowana, to

$$\frac{d}{dt}Q = \int d^3x \frac{d}{dt}j^0(x) = -\int d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(x) = -\int_S d\vec{n} \cdot \vec{j}(x) = 0,$$

czyli ładunek jest stały w czasie.

Transformacje zdefiniowane przez (C.21) tworzą grupę. W przypadku grupy o wymiarze n ładunki Q^a, $a = 1, ..., n$ spełniają *algebrę ładunków*:

$$[Q^a, Q^b] = i f^{ab}_{..c} Q^c, \tag{C.26}$$

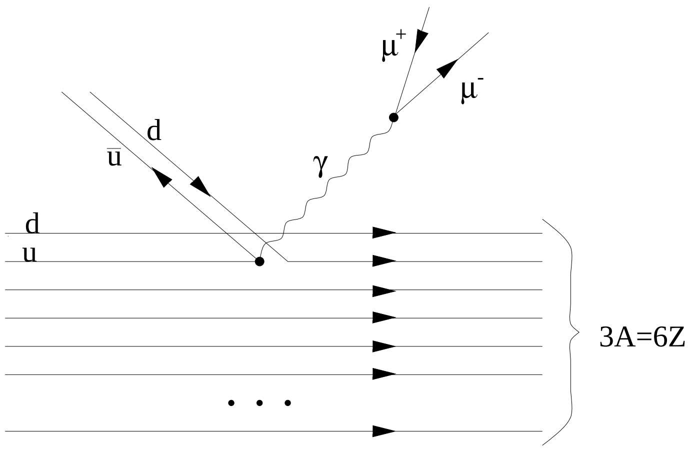
gdzie $f^{ab}_{..c}$ są stałymi struktury grupy. Na przykład, dla grupy obrotów izospinowych $n = 3$, a $f^{ab}_{..c} = \varepsilon^{ab}_{..c}$.

Część III

Ćwiczenia

C.5 Produkcja dileptonow w procesach rozpraszania pionów na symetrycznych jądrach

Rozważ wysokoenergetyczne rozpraszanie naładowanych pionów na jądrach o izospinie $I_3 = 0$, np. ^{16}O lub ^{40}Ca, to znaczy posiadających tę samą liczbęprotonów (Z) co neutronów (A-Z). Amplituda procesu $\pi^- A \to \mu^+\mu^- X$ w modelu kwarków przedstawiona jest na Rys. C.1. Narysuj analogiczny diagram dla procesu $\pi^+ A \to \mu^+\mu^- Y$, a następnie, w duchu modelu kwarków, znajdź stosunek przekrojów czynnych tych dwóch procesów (Wskazówka: postąp analogicznie, jak w analizie R w rozpraszaniu e^+e^- przedstawionej na wykładzie). Analizowany proces jest przykładem tzw. procesu Drella-Yana.



Rys. C.1:

C.6 Funkcje falowe N i Δ

1. Korzystając z metody pokazanej na wykładzie znajdź spinowo-zapachową funkcję falową stanu $|\Delta^{++}, m = \frac{1}{2}\rangle$.

2. Wylicz ładunki elektryczne i momenty magnetyczne stanów $|\Delta^{++}, m = \frac{3}{2}\rangle$, $|\Delta^{++}, m = \frac{1}{2}\rangle$,
   $|\Delta^{+}, m = \frac{3}{2}\rangle$, oraz $|\Delta^{+}, m = \frac{1}{2}\rangle$.

3. Oblicz tzw. ładunek słaby nukleonu, dany jako wartość oczekiwana operatora $\sum_{i=1}^{3} \tau^3(i)\sigma_z(i)$, gdzie τ oznacza izospinową, a σ spinową macierz Pauliego. Użyj funkcji falowych wyprowadzonych na wykładzie, oraz równości $< u|\tau^3|u >= 1$, $< d|\tau^3|d >= -1$, $< u|\tau^3|d >= 0$.

4. Co by było, gdybyśmy nie mieli koloru? Skonstruuj *antysymetryczną* spinowo-zapachową funkcję falową protonu z kwarków $|u\uparrow\rangle$, $|u\downarrow\rangle$ i $|d\downarrow\rangle$, oraz w podobny sposób funkcję falową neutronu. Następnie wylicz w tym wyimaginowanym modelu stosunek μ_p/μ_n.

C.7 Równanie Diraca w potencjale sferycznym

Bezczasowe równanie Diraca ma postać

$$hq(\vec{x}) = \varepsilon q(\vec{x}), \tag{C.27}$$

gdzie h jest Hamiltonianem Diraca, $q(\vec{x})$ spinorem Diraca, a ε wartością własną. Rozważ przypadek skalarnego potencjału sferycznego, tzn. h postaci

$$h = -i\alpha \cdot \nabla + \beta S(r). \tag{C.28}$$

1. Pokaż jawnym rachunkiem, że operator całkowitego momentu pędu

$$\vec{J} = \vec{L} + \frac{\vec{\sigma}}{2} \tag{C.29}$$

oraz operator

$$K = \beta\left(\vec{L} \cdot \vec{\sigma} + 1\right) \tag{C.30}$$

komutuja z h, oraz między sobą. Oznacza to, ze J^2, J_z i K moga byc użyte do klasyfikacji stanw.

2. Oznacz wartości własne operatora J^2 przez $j(j+1)$. Pokaż, że wartości własne operatora K^2 wynoszą $(j+\frac{1}{2})^2$, a tym samym wartości własne operatora K wynoszą $\pm(j+\frac{1}{2})$. Oznacza to, że do klasyfikacji stanów wystarczają operatory J_z i K. Operator J^2 nie jest potrzebny, bo daje się wyrazić poprzez K. (Wskazówka: pokaż, że $J^2 = L^2 + \vec{L} \cdot \vec{\sigma} + \frac{3}{4}$ oraz $K^2 = L^2 + \vec{L} \cdot \vec{\sigma} + 1$.)

3. Korzystając z blokowej postaci K

$$K = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix}, \tag{C.31}$$

gdzie $k = \vec{L} \cdot \vec{\sigma} + 1$, udowodnij, że rozwiązanie równania Diraca (C.27) będące stanem własnym operatorów J_z i K,

$$\begin{aligned} J_z q_\kappa^\mu &= \mu q_\kappa^\mu, \\ K q_\kappa^\mu &= -\kappa q_\kappa^\mu, \end{aligned} \tag{C.32}$$

może być w ogólności zapisane jako

$$q(\vec{x})_\kappa^\mu = \begin{pmatrix} G(r)\xi_\kappa^\mu(\theta,\varphi) \\ -iF(r)\xi_{-\kappa}^\mu(\theta,\varphi) \end{pmatrix}, \tag{C.33}$$

gdzie (r,θ,φ) oznaczają współrzędne sferyczne, a dwuskladnikowy spinor ξ_κ^μ jest stanem własnym operatorów J_z i k:

$$\begin{aligned} J_z \xi_\kappa^\mu &= \mu \xi_\kappa^\mu, \\ k \xi_\kappa^\mu &= -\kappa \xi_\kappa^\mu. \end{aligned} \tag{C.34}$$

Stany ξ_κ^μ są unormowane do jedności, tzn. $\int \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, |\xi_\kappa^\mu|^2 = 1$. Rozkład (C.33) nazywa się *rozkładem na górną i dolną składową.*

4. Rozważ operator k^2 i udowodnij, że

$$\begin{aligned} L^2\xi^\mu_\kappa &= \kappa(\kappa+1)\xi^\mu_\kappa, \\ L^2\xi^\mu_{-\kappa} &= \kappa(\kappa-1)\xi^\mu_{-\kappa}, \end{aligned} \tag{C.35}$$

w związku z czym wartości l dla górnych i dolnych składowych są nastepujące:

	ξ^μ_κ	$\xi^\mu_{-\kappa}$
$\kappa < 0$	$j-\frac{1}{2}$	$j+\frac{1}{2}$
$\kappa > 0$	$j+\frac{1}{2}$	$j-\frac{1}{2}$

(C.36)

Zauważmy, że składowe górna i dolna mają wartości l różne o 1. W szczególności stan $j=\frac{1}{2}$, $\kappa=-1$ ma górną składową o $l=0$ i dolną składową o $l=1$. Biegli w algebrze momentu pędu mogą pokazać bez trudu, że

$$\xi^\mu_\kappa = \sum_{s_z=\pm\frac{1}{2}} \langle l, \mu-s_z, \frac{1}{2}, s_z | j, \mu\rangle Y^l_{\mu-s_z} |\frac{1}{2}, s_z\rangle, \tag{C.37}$$

gdzie $\langle l, \mu-s_z, \frac{1}{2}, s_z | j, \mu\rangle$ jest współczynnikiem Clebsha-Gordana, $Y^l_{\mu-s_z}$ harmoniką sferyczną, a $|\frac{1}{2}, s_z\rangle$ spinorem dwuskładnikowym opisującym stan o spinie $\frac{1}{2}$ i rzucie spinu s_z. W szczególności,

$$\xi^\mu_{-1} = |\frac{1}{2}, \mu\rangle. \tag{C.38}$$

5. Oznaczmy $\hat{r} = \vec{x}/r$. Korzystając ze związku $(\sigma\cdot\hat{r})^2 = 1$ oraz z faktu, ze $\sigma\cdot\hat{r}$ jest pseudoskalarem, pokaż użyteczny związek $\sigma\cdot\hat{r}\xi^\mu_\kappa = \eta\xi^\mu_{-\kappa}$, gdzie η jest czynnikiem fazowym, tzn. $|\eta| = 1$. W konwencji Condona-Shortleya można pokazać, że $\eta = -1$. Możemy więc przepisać spinor (C.33) w równoważnej postaci

$$q^\mu_\kappa = \begin{pmatrix} G \\ i\sigma\cdot\hat{r}F \end{pmatrix} \xi^\mu_\kappa, \tag{C.39}$$

6. Pokaż, że parzystość spinora ξ^μ_κ wynosi $(-1)^l = \mathrm{sgn}(\kappa)\,(-1)^\kappa$, a parzystość spinora (C.33) jest równa

$$Pq^\mu_\kappa = \eta_P \mathrm{sgn}(\kappa)\,(-1)^\kappa\, q^\mu_\kappa, \tag{C.40}$$

gdzie η_P jest czynnikiem fazowym. Najczęstszą konwencją jest przyjęcie $\eta_P = 1$ (Wskazówka: dla spinora Diraca operator parzystości $P = \eta_P\gamma_0\times$ (zamiana $\vec{r}$ na $-\vec{r}$)).

7. Korzystając z tożsamości

$$\vec{\nabla} = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} - i\frac{\hat{r}}{r}\times\vec{L} \tag{C.41}$$

pokaż, że

$$-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} = -i\vec{\alpha}\cdot\hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + i\frac{1}{r}\vec{\alpha}\cdot\hat{r}(\beta K - 1), \tag{C.42}$$

a następnie sprawdź, że równanie Diraca (C.27) implikuje układ równań różniczkowych na radialne funkcje G i F postaci

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dr} &= \frac{\kappa-1}{r}F+(\varepsilon-S)G, \\ \frac{dG}{dr} &= -\frac{1+\kappa}{r}G-(\varepsilon+S)F. \end{aligned} \tag{C.43}$$

Zauważ też, że F daje sie zapisać jako

$$F(r)=-\frac{1}{S(r)+\varepsilon}\left(\frac{d}{dr}+\frac{1+\kappa}{r}\right)G(r). \tag{C.44}$$

Wprowadź funkcję $H(r)=rG(r)$ i pokaż, że dla $S(r)=M=$ const. spełnia ona następujące równanie:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}-\frac{\kappa(\kappa+1)}{r^2}-\left(M^2-\varepsilon^2\right)\right]H(r)=0. \tag{C.45}$$

C.8 Modele worków

1. Sprawdź równanie (4.34) z wykładu.
2. Jaka część masy barionu w modelu MIT jest niesiona przez kwarki, a jaka przez energię objętościową worka?
3. Rozważ model worka, w którym zamiast członu objętościowego dodano człon powierzchniowy:

$$E(R)=\frac{\sum_{i=1}^{3}\omega(i)}{R}+4\pi R^2 C. \tag{C.46}$$

   Znajdź promień stabilności worka oraz stosunek mas rezonansu Ropera i nukleonu w tym modelu.

4. Korzystając z definicji momentu magnetycznego:

$$\vec{\mu}=\int d^3x\,(\vec{x}\times\vec{j}_{\mathrm{EM}}), \tag{C.47}$$

   gdzie dla cząstki Diraca o ładunku Q prąd elektromagnetyczny wynosi

$$j^{\mu}_{\mathrm{EM}}=Q\overline{q}\gamma^{\mu}q, \tag{C.48}$$

   wyprowadź wzór na moment magnetyczny kwarku w stanie $\kappa=-1$ (czyli $j^P=\frac{1}{2}^+$) w modelu worka MIT.

   Użyteczne całki:

$$\begin{aligned} \int_0^R r^2 dr\, j_0(\frac{\omega r}{R})^2 &= \frac{R^3(2\omega-1)}{2\omega}j_0(\omega)^2, \\ \int_0^R r^2 dr\, j_1(\frac{\omega r}{R})^2 &= \frac{R^3(2\omega-3)}{2\omega}j_0(\omega)^2, \\ \int_0^R r^3 dr\, j_0(\frac{\omega r}{R})j_1(\frac{\omega r}{R}) &= \frac{R^4(4\omega-3)}{4\omega^2}j_0(\omega)^2. \end{aligned} \tag{C.49}$$

C.9 Tw. Goldstone'a (dla pól klasycznych)

Rozważ następujący Lagranżjan:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu S(x))(\partial^\mu S(x)) + \frac{1}{2}(\partial_\mu P(x))(\partial^\mu P(x)) - U[S(x)^2 + P(x)^2]. \quad \text{(C.50)}$$

Pola S i P są klasyczne, a potencjal U jest *dowolną* funkcją kombinacji (S^2+P^2). Zakładamy, że funcja $U(x)$ posiada minimum, wokół którego jest różniczkowalna. Zauważ, że $\mathcal{L}$ ma symetrię obrotową w przestrzeni pól S i P:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow \cos\theta\ S + \sin\theta\ P, \\ P &\rightarrow -\sin\theta\ S + \cos\theta\ P. \end{aligned} \quad \text{(C.51)}$$

1. Napisz Hamiltonian H odpowiadający L.

2. Pokaż, że minimum H, czyli stan o najniższej gęstości energii, zachodzi dla *stałych* pól, $S(x) = S_0$ i $P(x) = P_0$, spełniających warunki

$$S_0 U' = 0, \quad P_0 U' = 0, \quad \text{(C.52)}$$

gdzie

$$U' = \left.\frac{dU(x)}{dx}\right|_{x=S_0^2+P_0^2}.$$

Zauważ, że warunki (C.52) są spełnione, jeśli $S_0 = 0$ i $P_0 = 0$ (jest to tzw. *faza Wignera*), lub jesli $U' = 0$. W tym drugim przypadku S_0 i P_0 nie muszą znikać. Jeśli $U' = 0$, i $S_0^2+P_0^2 \neq 0$, mamy *fazę Nambu-Goldstone'a*. Ze względu na symetrię (C.51) warunek $U' = 0$ jest spełniony na okregu $S_0^2 + P_0^2 = F^2$. Możemy zatem przyjąć bez straty ogolności, że

$$S_0 = -F, \quad P_0 = 0. \quad \text{(C.53)}$$

Ponieważ konfiguracja (C.53) (czyli próżnia) nie jest niezmiennicza względem (C.51), mówimy o *spontanicznym łamaniu* symetrii, lub o *ukrytej* symetrii. Są to synonimy fazy Nambu-Goldstone'a.

3. Napisz wyrażenie na macierz kwadratu masy dla pól S i P, zdefiniowaną jako

$$M^2 = \begin{pmatrix} \frac{d^2U}{dS^2} & \frac{d^2U}{dSdP} \\ \frac{d^2U}{dPdS} & \frac{d^2U}{dP^2} \end{pmatrix}_{|S=S_0,P=P_0}, \quad \text{(C.54)}$$

i wyraź ją przez U' oraz $U'' = \left.\frac{d^2U(x)}{dx^2}\right|_{x=S_0^2+P_0^2}$.

4. Pokaż, że w fazie Wignera masy pól S i P są równe i wynoszą $\sqrt{2U'(0)}$ (skąd widać, że musimy przyjąć $U'(0) \geq 0$ aby wyrażenie miało sens).

5. Udowodnij, że w fazie Goldstone'a masa pola P znika. Ile wynosi masa pola S? (musimy tu założyć, że $U''(F^2) > 0$ aby wyrażenie na masę pola S miało sens). Znikanie masy pola P to przejaw mechanizmu Goldstone'a. Wzbudzenie pola P jest *bozonem Goldstone'a*.

6. Dodaj do lagranżjanu człon $-cS(x)$, gdzie c jest dodatnią stałą. Człon ten *jawnie* łamie symetrię (C.51). Przyjmij, że c jest małe i może być traktowane perturbacyjnie. Powtórz powyższe punkty ćwiczenia dla fazy Nambu-Goldstone'a i pokaż, że masa pola P wynosi teraz (w wiodącym rzędzie rachunku zaburzeń) $\sqrt{c/F}$. Masa ta jest mała w stosunku do innych skal, np. masy pola S, jesli $c \ll F^3 U''(F^2)$. Wzbudzenie pola P jest teraz *pseudo-bozonem Goldstone'a.*

7. Uogólnij powyższe rozważania i rachunki dla sytuacji, gdy pól P jest $N > 1$:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu S(x))(\partial^\mu S(x)) + \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{N}(\partial_\mu P^a(x))(\partial^\mu P^a(x)) - U[S(x)^2 + \sum_{a=1}^{N} P^a(x)^2] - cS. \tag{C.55}$$

C.10 Tw. Noether

1. Rozważ swobodny Lagranżjan Diraca

$$L = \bar{\psi}(i\partial_\mu \gamma^\mu - m)\psi \tag{C.56}$$

Wyprowadź prąd Noether odpowiadający globalnej transformacji symetrii

$$\psi \to e^{i\alpha}\psi, \tag{C.57}$$

gdzie α jest parametrem transformacji. Jest to tzw. symetria $U(1)$. Używając równań ruchu sprawdź, że prąd ten jest zachowany. Wymyśl człon, który dodany do Lagranżjanu łamałby symetrię $U(1)$.

2. Rozważ swobodny Lagranżjan pola pionu

$$L = \frac{1}{2}(\partial_\mu \pi^a)(\partial^\mu \pi_a) - \frac{1}{2}m_\pi^2 \pi^a \pi_a, \tag{C.58}$$

gdzie a jest indeksem izospinu. Wyprowadź prąd Noether odpowiadający globalnej infinitezymalnej transformacji symetrii

$$\vec{\pi} \to \vec{\pi} - \vec{\beta} \times \vec{\pi}, \tag{C.59}$$

gdzie $\vec{\beta}$ jest małym parametrem transformacji. Jest to symetria $SU(2)$ obrotów w przestrzeni izospinu. Używając równań ruchu sprawdź, że prąd izospinowy jest zachowany. Następnie zastąp człon masowy $-\frac{1}{2}m_\pi^2 \pi^a \pi_a$ członem, który rozszczepia masy neutralnego i naładowanych pionów:

$$-\frac{1}{2}m_{\pi_0}^2 (\pi^0)^2 - m_{\pi^+}^2 \pi^+ \pi^-, \tag{C.60}$$

gdzie $\pi^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pi^1 \pm i\pi^2)$. Czy prąd izospinowy jest nadal zachowany? Ile wynosi teraz czterodywergencja prądu izozpinowego?