

## Lista tematów na egzamin ustny po pierwszym semestrze

UWAGA: W odpowiedzi należy podać stosowne **definicje i przykłady**, oraz wykazać się zrozumieniem tematu. W punktach oznaczonych (D) należy też podać **dowód**. Egzamin ustny zdają osoby, które zdały egzamin pisemny. Na egzaminie losowane są trzy pytania, z czego jedno zawiera dowód (D).

### Logika, teoria mnogości, zbiory liczbowe

1. Rachunek zdań: zdania logiczne, funktory zdaniotwórcze, matryca logiczne, tautologia, prawa rachunku zdań, warunek konieczny i dostateczny, zdanie odwrotne i przeciwstawne.
2. (D) Udowodnić prawa de Morgana z pomocą matrycy logicznej.
3. Funkcje zdaniowe, kwantyfikatory, prawa de Morgana dla rachunku kwantyfikatorów.
4. Metody dowodzenia twierdzeń: wprost, dowód tw. przeciwstawnego, dowód przez sprzeczność. Dowodzenie równoważności.
5. (D) Udowodnić, że  $\sqrt{3}$  jest liczbą niewymierną.
6. Zawieranie, suma, iloczyn, różnica zbiorów. Dopełnienie zbioru, podzbiór, zbiór pusty i pełny. Diagramy Eulera (lub Venna) dla zbiorów. Moc zbioru.
7. Zbiór potęgowy. Moc zbioru potęgowego.
8. Zasada indukcji matematycznej.
9. (D) Nierówność Bernoulliego.
10. Symbol Newtona, dwumian Newtona, trójkąt Pascala.
11. Para uporządkowana, iloczyn kartezyjski zbiorów, iloczyn kartezyjski  $n$  zbiorów.
12. Działanie dwuargumentowe, ciało, ciało uporządkowane.
13. Zbiory ograniczone, kres górny i dolny zbioru. Aksjomat ciągłości.
14. Bijekcja, równoliczność zbiorów, przeliczalność zbioru,  $\aleph_0$ , przeliczalność zbioru liczb wymiernych.
15. (D) Równoliczność przedziału  $(0, 1)$  i zbioru liczb rzeczywistych.
16. (D) Dowód przekątniowy Cantora nieprzeliczalności zbioru liczb rzeczywistych.

### Relacje, funkcje, przetrzenie metryczne

1. Relacja, własności relacji (zwrotność, przeciwzwrotność, symetryczność, antysymetryczność, przechodniość).

2. Relacja równoważności, klasy abstrakcji.
3. Relacja porządku, relacja porządku ścisłego.
4. Funkcja, dziedzina, przeciwdziedzina, surjekcja, injekcja, bijekcja
5. Parzystość, nieparzystość, okresowość.
6. Obraz i przeciwobraz zbioru. Tw. o obrazach i przeciwobrazach sumy i iloczynu zbiorów.
7. Funkcja odwrotna. Funkcje cyklotometryczne. Gałąź funkcji odwrotnej.
8. Metryka, metryka euklidesowa, miejska, dyskretna. Metryka silniejsza, słabsza, równoważna. Przestrzeń metryczna. Kule.
9. (D) Nierówność Schwarza.

### **Ciągi i szeregi**

1. Ciąg liczbowy, zbieżność, granica ciągu.
2. Tw. o granicach ciągu (sumy itd.). Tw. o zachowaniu relacji  $\leq$  w granicy.
3. Ciąg monotoniczny. Tw. o zbieżności ciągu monotonicznego i ograniczonego.
4. (D) Tw. o trzech ciągach.
5. (D) Definicja ciągowa liczby  $e$ , dowód zbieżności.
6. Podciąg, tw. Bolzano-Weierstrassa, granica górna i dolna.
7. Suma częściowa ciągu, szereg. Warunek konieczny zbieżności szeregu, zbieżność bezwzględna i warunkowa.
8. Szeregi: geometryczny, harmoniczny, anharmoniczny.
9. Kryterium porównawcze zbieżności szeregu.
10. Kryteria d'Alamberta, Cauchy'ego, Leibniza.
11. Szereg potęgowy, tw. Abela, promień zbieżności, tw. Cauchy'ego-Hadamarda.
12. Tw. Riemanna o zmianie kolejności sumowania szeregu zbieżnego warunkowo.
13. Iloczyn Cauchy'ego szeregów.
14. Ciągi i szeregi funkcyjne. Zbieżność punktowa i jednostajna ciągu funkcyjnego. Kryterium Weierstrassa zbieżności szeregu funkcyjnego.

### **Ciągłość funkcji**

1. Otoczenie, sąsiedztwo, punkt skupienia, punkt wewnętrzny, punkt izolowany, punkt brzegowy, zbiór otwarty, domknięty, ograniczony. Wnętrze i domknięcie zbioru.

2. Tw. o sumie i iloczynie zbiorów otwartych i domkniętych.
3. Ciąg Cauchy'ego, przestrzeń zupełna.
4. Def. Heinego (ciągowa) granicy funkcji. Ciągłość funkcji w punkcie, funkcja ciągła.
5. Granice jednostronne i niewłaściwe funkcji.
6. Def. Cauchy'ego (otoczeniowa) granicy funkcji.
7. Tw. o przeciwobrazie zbioru otwartego (domkniętego) względem funkcji ciągłej.
8. Tw. o trzech funkcjach.
9. Asymptoty: pozioma, pionowa, ukośna.
10. Tw. Darboux.
11. Ekstrema lokalne i globalne. Tw. Weierstrassa o ekstremach globalnych.

### **Różniczkowalność**

1. Pochodna funkcji w punkcie, funkcja pochodna. Interpretacja geometryczna. Monotoniczność a znak pochodnej.
2. (D) Wyprowadzenie wzoru na pochodną iloczynu funkcji.
3. (D) Wyprowadzenie wzoru na pochodną funkcji złożonej.
4. (D) Wyprowadzenie wzoru na pochodną funkcji odwrotnej.
5. (D) Wyprowadzenie wzoru na pochodną funkcji sinus.
6. Pochodne wyższych rzędów, wzór Leibniza.
7. Warunek konieczny ekstremum lokalnego funkcji różniczkowalnej.
8. (D) Tw. Rolla. Interpretacja geometryczna.
9. (D) Tw. Cauchy'ego.
10. (D) Tw. Lagrange'a. Interpretacja geometryczna.
11. Tw. Taylora z resztą postaci Lagrange'a. Zastosowania.
12. Szereg Taylora, warunek dostateczny istnienia szeregu Taylora.
13. Szeregi Taylora funkcji wykładniczej i trygonometrycznych.
14. Funkcje hiperboliczne i ich własności.
15. Warunki dostateczne istnienia ekstremum lokalnego funkcji różniczkowalnej.
16. Wypukłość i wklęsłość funkcji dwukrotnie różniczkowalnej, punkty przegięcia.
17. Reguła de L'Hospitala.