

## Lista tematów na część teoretyczną egzaminu po pierwszym semestrze dla osób na wpisie warunkowym

UWAGA: W odpowiedzi należy podać stosowne **definicje i przykłady**, tam, gdzie podano, również dowody.

### Logika, teoria mnogości, zbiory liczbowe

1. Rachunek zdań: zdania logiczne, funktory zdaniotwórcze, matryca logiczne, tautologia, prawa rachunku zdań, warunek konieczny i dostateczny, zdanie odwrotne i przeciwstawne.
2. Udowodnić prawa de Morgana z pomocą matrycy logicznej.
3. Funkcje zdaniowe, kwantyfikatory, prawa de Morgana dla rachunku kwantyfikatorów.
4. Metody dowodzenia twierdzeń: wprost, dowód tw. przeciwstawnego, dowód przez sprzeczność. Dowodzenie równoważności.
5. Udowodnić, że  $\sqrt{3}$  jest liczbą niewymierną.
6. Zawieranie, suma, iloczyn, różnica zbiorów. Dopełnienie zbioru, podzbiór, zbiór pusty i pełny. Diagramy Eulera (lub Venna) dla zbiorów. Moc zbioru.
7. Zbiór potęgowy. Moc zbioru potęgowego.
8. Zasada indukcji matematycznej.
9. Nierówność Bernoulliego.
10. Symbol Newtona, dwumian Newtona, trójkąt Pascala.
11. Para uporządkowana, iloczyn kartezjański zbiorów.
12. Zbiory ograniczone, kres górny i dolny zbioru. Aksjomat ciągłości.
13. Równoliczność zbiorów, przeliczalność zbioru,  $\aleph_0$ , przeliczalność zbioru liczb wymiernych.
14. Dowód graficzny równoliczności przedziału  $(0, 1)$  i zbioru liczb rzeczywistych.
15. Argument przekątniowy Cantora nieprzeliczalności zbioru liczb rzeczywistych.

### Funkcje, przestrzenie metryczne

1. Relacja, własności relacji (zwrotność, przeciwzwrotność, symetryczność, antysymetryczność, przechodniość).
2. Relacja równoważności, klasy abstrakcji.

3. Relacja porządku, relacja porządku ścisłego.
4. Funkcja, dziedzina, przeciwdziedzina, surjekcja, injekcja, bijekcja, parzystość, nieparzystość.
5. Obraz i przeciwobraz zbioru. Tw. o obrazach i przeciwobrazach sumy i iloczynu zbiorów.
6. Funkcja odwrotna. Funkcje cyklometryczne. Gałąź funkcji odwrotnej.
7. Metryka, metryka euklidesowa, miejska, dyskretna. Przestrzeń metryczna. Kula otwarta i domknięta.
8. Nierówność Schwarzera, wyprowadzenie.

### **Ciągi i szeregi**

1. Ciąg liczbowy, zbieżność, granica ciągu.
2. Tw. o granicach ciągu (sumy itd.). Tw. o zachowaniu relacji  $\leq$  w granicy.
3. Ciąg monotoniczny. Tw. o ciągu monotonicznym i ograniczonym.
4. Tw. o trzech ciągach.
5. Definicja ciągowa liczby  $e$ .
6. Suma częściowa ciągu, szereg. Warunek konieczny zbieżności szeregu, zbieżność bezwzględna i warunkowa.
7. Szeregi: geometryczny, harmoniczny, anharmoniczny.
8. Kryterium porównawcze zbieżności szeregu.
9. Kryteria zbieżności d'Alamberta, Cauchy'ego, Leibniza.
10. Szereg potęgowy, tw. Abela, promień zbieżności, tw. Cauchy'ego-Hadamarda.

### **Granica funkcji, ciągłość funkcji**

1. Otoczenie, sąsiedztwo, punkt skupienia, punkt wewnętrzny, punkt izolowany, punkt brzegowy, zbiór otwarty, domknięty, ograniczony. Wnętrze i domknięcie zbioru.
2. Tw. o sumie i iloczynie zbiorów otwartych i domkniętych.
3. Def. Heinego granicy funkcji. Ciągłość funkcji w punkcie, funkcja ciągła.
4. Granice jednostronne i niewłaściwe funkcji.
5. Def. Cauchy'ego granicy funkcji.
6. Tw. o przeciwobrazie zbioru otwartego (domkniętego) względem funkcji ciągłej.

7. Tw. o trzech funkcjach.
8. Asymptoty: pionowa, pozioma, ukośna.
9. Ekstrema lokalne i globalne.

### **Różniczkowalność funkcji**

1. Pochodna funkcji w punkcie, funkcja pochodna. Interpretacja geometryczna pochodnej. Monotoniczność funkcji różniczkowalnej a znak pochodnej.
2. Wzór na pochodną iloczynu funkcji.
3. Wzór na pochodną funkcji złożonej.
4. Wzór na pochodną funkcji odwrotnej.
5. Wzór na pochodne podstawowych funkcji.
6. Warunek konieczny ekstremum lokalnego funkcji różniczkowalnej.
7. Warunek dostateczny ekstremum lokalnego funkcji różniczkowalnej.
8. Druga pochodna, wypukłość, wklęsłość, punkt przegięcia.