

## Lista tematów na egzamin ustny

UWAGA: W odpowiedzi należy podać w wyczerpujący sposób stosowne **definicje i przykłady**, oraz wykazać się zrozumieniem tematu.

### 1. Elementy teorii mnogości, relacje, funkcje, przestrzenie metryczne

1. Zawieranie, suma, iloczyn, różnica zbiorów. Dopełnienie zbioru, podzbiór, zbiór pusty i pełny. Diagramy Eulera (lub Venna) dla zbiorów. Moc zbioru.
2. Zbiór potęgowy. Moc zbioru potęgowego.
3. Zasada indukcji matematycznej.
4. Zbiory ograniczone, kres górny i dolny zbioru.
5. Relacja, własności różnych relacji (zwrotność, przeciwzwrotność, symetryczność, antysymetryczność, przechodniość).
6. Relacja równoważności. Klasy abstrakcji.
7. Relacja porządku, relacja porządku ścisłego.
8. Funkcja, dziedzina, przeciwdziedzina, surjekcja, injekcja, bijekcja, parzystość, nieparzystość, okresowość.
9. Funkcja odwrotna. Funkcje cyklometryczne. Gałąź funkcji odwrotnej.
10. Metryka, metryka euklidesowa, miejska, dyskretna. Przestrzeń metryczna. Kule.
11. Nierówność Schwarz.

### 2. Ciągi i szeregi

1. Ciąg liczbowy, zbieżność, granica ciągu.
2. Tw. o granicach ciągu (sumy, iloczynu, itd.). Tw. o zachowaniu relacji  $\leq$  w granicy.
3. Ciąg monotoniczny. Tw. o ciągu monotonicznym i ograniczonym.
4. Granice szczególnych ciągów.
5. Tw. o trzech ciągach.
6. Definicja ciągowa liczby  $e$ .
7. Funkcja wykładnicza i logarytm.

8. Suma częściowa ciągu, szereg. Warunek konieczny zbieżności szeregu, zbieżność bezwzględna i warunkowa.
9. Szeregi: geometryczny, harmoniczny, anharmoniczny.
10. Kryterium porównawcze zbieżności szeregu.
11. Kryteria d’Alamberta, Cauchy’ego zbieżności szeregów.
12. Szereg znakozmienny i kryterium Leibniza.
13. Szereg potęgowy, tw. Abela, promień zbieżności, tw. Cauchy’ego-Hadamarda.
14. Tw. Riemanna o zmianie kolejności sumowania szeregu zbieżnego warunkowo.
15. Iloczyn Cauchy’ego szeregów.

### 3. Ciągłość funkcji

1. Otoczenie, sąsiedztwo, punkt skupienia, punkt wewnętrzny, punkt izolowany, punkt brzegowy, zbiór otwarty, domknięty, ograniczony. Wnętrze i domknięcie zbioru.
2. Def. Heinego (ciągowa) granicy funkcji. Ciągłość funkcji w punkcie, funkcja ciągła.
3. Granice jednostronne i niewłaściwe funkcji.
4. Def. Cauchy’ego (otoczeniowa) granicy funkcji.
5. Tw. o przeciwobrazie zbioru otwartego (domkniętego) względem funkcji ciągłej.
6. Tw. o trzech funkcjach.
7. Asymptoty: pozioma, pionowa, ukośna.
8. Tw. Darboux.
9. Ekstrema lokalne i globalne.

### 4. Różniczkowalność

1. Pochodna funkcji w punkcie, funkcja pochodna. Interpretacja geometryczna. Monotoniczność a znak pochodnej.
2. Pochodna iloczynu i ilorazu funkcji.
3. Pochodna funkcji złożonej.
4. Pochodną funkcji odwrotnej.
5. Pochodne wyższych rzędów, wzór Leibniza na pochodne iloczynu funkcji.
6. Warunek konieczny ekstremum lokalnego funkcji różniczkowalnej.

7. Tw. Taylora z resztą postaci Lagrange'a. Zastosowania.
8. Szeregi Taylora funkcji wykładniczej i trygonometrycznych.
9. Funkcje hiperboliczne i ich własności.
10. Warunki dostateczne istnienia ekstremum lokalnego funkcji różniczkowalnej.
11. Wypukłość i wklęsłość funkcji dwukrotnie różniczkowalnej, punkty przegięcia.
12. Reguła de L'Hospitala.

## **5. Całka jednej zmiennej**

1. Całka nieoznaczona i jej własności.
2. Całkowanie przez części.
3. Całkowanie przez podstawienie.
4. Całkowanie funkcji wymiernych.
5. Całkowanie funkcji niewymiernych.
6. Konstrukcja całki Riemanna
7. Podstawowe tw. rachunku całkowego.
8. Zastosowania całki Riemanna.
9. Pole i objętość bryły obrotowej.
10. Całki niewłaściwe.

## **6. Analiza funkcji wielu zmiennych**

1. Przestrzeń wektorowa.
2. Norma. Przestrzeń wektorowa unormowana. Iloczyn skalarny.
3. Odwzorowanie liniowe.
4. Pochodna cząstkowa.
5. Pochodna Fréchet'a.
6. Pochodna kierunkowa. Gradient.
7. Pochodna Fréchet'a funkcji złożonej.
8. Wzór Taylora dla wielu zmiennych.
9. Warunek konieczny ekstremum lokalnego funkcji wielu zmiennych.

10. Warunek dostateczny ekstremum lokalnego funkcji wielu zmiennych.

11. Punkt siodłowy.

## **7. Analiza wielowymiarowa c.d.**

1. Homeomorfizm,  $k$ -wymiarowa powierzchnia. Powierzchnia gładka.

2. Krzywe stożkowe: elipsa, parabola, hiperbola.

3. Krzywizna krzywej płaskiej.

4. Całka Riemanna wielowymiarowa.

5. Całka iterowana. Tw. Fubinięgo.

6. Całka po dowolnym obszarze.

7. Zmiana zmiennych całkowania. Jakobian.

8. Zastosowania całek wielokrotnych.

9. Podstawowe układy współrzędnych: biegunowy, cylindryczny, sferyczny.

10. Płaszczyzna styczna.

11. Orientacja bazy, powierzchnie orientowalne, wektor normalny.

12. Całka krzywoliniowa zorientowana i niezorientowana, tw. Greena.

13. Całka powierzchniowa niezorientowana, tw. Gaussa.

14. Całka powierzchniowa zorientowana, tw. Stokesa.

## **8. Równania różniczkowe zwyczajne**

1. Równanie o zmiennych rozdzielonych.

2. Sprowadzanie pewnych równań do postaci o zmiennych rozdzielonych przez podstawienie.

3. Równanie liniowe jednorodne i niejednorodne. Metoda uzmienniania stałej.

4. Oscylator harmoniczny.

5. Równanie populacji.

## **9. Elementy analizy fourierowskiej**

1. Szereg Fouriera.

2. Transformata Fouriera.