

Jeśli zadanie nie było rozwiązane samodzielnie, proszę o podanie źródła lub osoby, z która zadanie było rozwiązywane.

Zestaw 6 - informatyka: Reguła de L'Hospitala, Tw. Taylora, badanie funkcji

($\log x$ oznacza logarytm naturalny, $\ln x$)

1. Z pomocą reguły de L'Hospitala obliczyć granice funkcji

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1 - 2x}{\sin^2 x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin\left(\frac{a}{x}\right)$

e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\log x}$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\log x}\right)$

g) $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x}$

h) $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x^7)^{1/x}$

2. Wypisać pierwsze dwa niezerowe wyrazy szeregu Taylora dla funkcji

a) $f(x) = 1/\cos^2 x$ wokół $x = 0$

b) $f(x) = 1/x$ wokół $x = 2$

c) $f(x) = x\sqrt{x}$ wokół $x = 1$

d) $f(x) = \cos x$ wokół $x = \pi$

e) $f(x) = \operatorname{tg} x$ wokół $x = 0$

3. Dla wybranego podpunktu zad. 2 z pomocą kalkulatora lub komputera zrób wykres funkcji w pobliżu punktu rozwinięcia oraz wykres otrzymanego przybliżenia Taylora o dwóch wyrazach.

4. Wyprowadzić wzory na szereg Taylora dla $\sin x$ i $\cos x$ wokół $x = 0$.

5. Korzystając z Tw. Taylora z resztą w postaci Lagrange'a podaj górne ograniczenie na błąd, jaki popełniamy przy przybliżaniu funkcji $\sin x$ na przedziale $[0, \pi/2]$ z pomocą wielomianu stopnia n w zmiennej x .

6. Z pomocą wzoru Taylora podaj przybliżenie na $\log \frac{3}{2}$.

7. Przedyskutuj, dlaczego Tw. Taylora nie może być użyte do przybliżania funkcji

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

8. Zbadać funkcję i naszkicować jej wykres

a) $y = \frac{1}{(x+3)^2}$

b) $y = \frac{x}{x-1}$

c) $y = \frac{x^2+2x+3}{x}$

d) $y = \frac{x^2+x+1}{x^2+3x+2}$

e) $y = \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}$

f) $y = \sin^2 x + \cos x$

g) $y = x + \sin x$

h) $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

i) $y = \sqrt{1 - \cos x}$

j) $y = x + \sqrt{x^2}$

k) $y = x - \operatorname{arctg} x$

l) $y = x^{3/2} - 1$

m) $y = x + 2\operatorname{arcsin} x$

n) $y = \log(1 + x^2)$

o) $y = \log \frac{x-1}{x+1}$

p) $y = x^x$

o) $y = x^{x-1}$

q) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$

r) $1/\operatorname{arctg} x$

s) $x^{-3}e^{-1/x}$

t) $\frac{\log x}{x}$