Jeśli zadanie nie było rozwiązane samodzielnie, proszę o podanie źródła lub osoby, z która zadanie było rozwiązywane.

Zestaw 7: Tw. Taylora, reguła de L'Hospitala

($\log x$ oznacza logarytm naturalny, $\ln x$)

1. Z pomocą reguły de L'Hospitala obliczyć granice funkcji

   a)$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x-1}{x^2}$

   b)$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1-2x}{\sin^2 x}$

   c)$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$

   d)$\lim_{x\to\infty} x \sin\left(\frac{a}{x}\right)$

   e)$\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{\log x}$

   f)$\lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\log x}\right)$

   g) $\lim_{x\to 0} x^{\sin x}$

   h) $\lim_{x\to 0} (e^x + x^7)^{1/x}$

2. Wypisać pierwsze trzy niezerowe wyrazy szeregu Taylora dla funkcji

   a) $f(x) = 1/\cos^2 x$ wokół $x = 0$

   b) $f(x) = 1/x$ wokół $x = 2$

   c) $f(x) = x\sqrt{x}$ wokół $x = 1$

   d) $f(x) = \cos x$ wokół $x = \pi$

   e) $f(x) = \mathrm{tg} x$ wokół $x = 0$

3. Dla wybranego podpunktu zad. 2 z pomoca kalkulatora lub komputera zrób wykres funkcji w pobliżu punktu rozwinięcia oraz wykres otrzymanego przybliżenia Taylora o trzech wyrazach.

4. Wyprowadzić wzory na szereg Taylora dla $\sin x$ i $\cos x$ wokół $x = 0$.

5. Korzystając z Tw. Taylora z resztą w postaci Lagrange'a podaj górne ograniczenie na błąd, jaki popełniamy przy przybliżaniu funkcji $\sin x$ na przedziale $[0, \pi/2]$ z pomocą wielomianu stopnia n w zmiennej x.

6. Z pomocą wzoru Taylora podaj przybliżenie na $\log \frac{5}{4}$.

7. Przedyskutuj, dlaczego Tw. Taylora nie może być użyte do przybliżania funkcji

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$