Zestaw 4: Szeregi liczbowe

1. Podać warunek konieczny zbieżności szeregu, a nastepnie uzasadnić, że poniższe szeregi są rozbieżne

   a)$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1}$

   b)$\sum_{n=1}^{\infty} (1+\frac{1}{n})^n$

   c)$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}(n^{\frac{1}{n}})$

2. Z pomocą indukcji matematycznej wykazać, że

   a) $\sum_{k=1}^{n}(a+(k-1)r) = na + r\frac{n(n-1)}{2}$ (skończona suma n-wyrazowego ciągu arytmetycznego). Dlaczego nie mówimy o "szeregu arytmetycznym"?

   c) $\sum_{k=1}^{n} as^{k-1} = a\frac{1-s^n}{1-s}$ (skończona suma n-wyrazowego ciągu geometrycznego).

   d) Z pomocą c) dla $s<1$ oblicz $\sum_{k=0}^{\infty} s^k$ (szereg geometryczny).

3. Przekonać się (najprościej z pomocą wykresów), że zachodzą następujące nierówności, przydatne m.in. w kryterium porównawczym zbieżności szeregów:

   a) $\forall n \in N:\ \frac{1}{2} < \cos\frac{1}{n} < 1$

   b) $\forall n \in N:\ 0 < \sin\frac{1}{n} < \frac{1}{n}$

   c) $\forall n \in N:\ 0 < \operatorname{tg}\frac{1}{n} < \frac{2}{n}$

   d) $\forall n \in N:\ \sin\frac{1}{n} > \frac{2}{n\pi}$

4. Z pomocą indukcji matematycznej wykazać, że

   $\forall n \in N:\ e^n > n$

5. W oparciu o poprzednie zadanie wykazać, że

   $\forall n \in N:\ n > \ln n$

6. Pokazać, że

   a) (powtórzyć z wykładu) $\forall n \in N:\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > e > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

   b) $\forall n \in N:\ \frac{1}{n+1} < \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$

7. Dla danego ciągu liczbowego (a_n) definiujemy iloczyn skończony poprzez symbol Π jako $I_n = \Pi_{k=1}^{n} a_k = a_1 a_2 \ldots a_n$. Iloczynem nieskończonym ciagu (a_n) nazywamy granicę $\lim_{n\to\infty} I_n$, co oznaczamy symbolem $\Pi_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 a_2 a_3 \ldots$. Pokazać, że

   a) $\Pi_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k}) = n+1$ (rozpisać jawnie dla kilku początkowych n i zauważyć prawidłowość)

   b)$\Pi_{k=2}^{n}(1+\frac{1}{k}) = \frac{n+1}{2}$

   c) $\Pi_{k=2}^{n}(1-\frac{1}{k}) = \frac{1}{n}$

   d) $\Pi_{k=2}^{\infty}(1-\frac{1}{k^2}) = \frac{1}{2}$ (skorzystaj z b) i c))

8. Pokaż, że z pomocą funkcji log badanie iloczynów nieskończonych można zamienić na badanie szeregów. Następnie napisz warunek konieczny zbieżności iloczynu nieskończonego.

9. Obliczyć sumy częściowe podanych szeregów i następnie zbadać ich zbieżność

   a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$

   b)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ (zrobione na wykładzie)

   c)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ (podobnie do b))

   d)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$

   e)$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+3^n+4^n}{5^n}$

   f)$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{1}{n})$ (wzór na sumę logarytmów i zad. (7))

   g)$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1-\frac{1}{(n+1)^2})$

   h)$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}(2n-1)$

10. Wyjaśnij, dlaczego Achilles dogoni żółwia.

11. Korzystając z kryterium porównawczego zbadać zbieżność szeregów

    a)$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$

    b)$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+2}$

    c)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}$

    d)$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$

    e)$\sum_{n=1}^{\infty} n^4 \sin\frac{1}{n^5}$ (skorzystać z zad. (3))

    f)$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin\frac{1}{n^4}$

    g)$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\sin^2\frac{1}{n}$

    h)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n n}$

    i)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$ (skorzystać z zad. (5))

    j)$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{tg}^2\frac{1}{\sqrt{n}}$

    k)$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n}$

    l)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3n^4+1}\cos\frac{1}{n}$

    m)$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\cos^2\frac{1}{n}$

    n)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2+3+...+n}{n^3}$

12. Korzystając z kryterium d'Alemberta zbadać zbieżność szeregów

    a)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

    b)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n n!^2}{n^{2n}}$

    c)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

d)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n n!}$

e)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

f)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n-2^n}{5^n-4^n}$

g)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)5^n}{2^n 3^{n+2}}$

13. Korzystając z kryterium Cauchy'ego zbadać zbieżność szeregów

a)$\sum_{n=1}^{\infty} n(\frac{5}{3})^n$,

b)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

c)$\sum_{n=1}^{\infty} [\operatorname{arctg}(\cos\frac{1}{n})]^{2n}$

d)$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{2n+1}{3n+1})^n$

e)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}$

f)$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n+1}{n})^{n^2} \frac{1}{3^n}$

g)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}$

h)$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{\operatorname{arctg}(n)}{\pi})^n$

14. Zbadać zbieżność i bezwzgledną zbieżność szeregów

a)$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^\alpha}, \alpha > 0$

b)$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin(\frac{1}{n})$,

c)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{5^{n-1}}$,

d)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$,

e)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{n^2+1}$,

f)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{n^2}$,

g)$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln(n+1)}$,

h)$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{-2n}{3n+5})^n$,

i)$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{tg}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$,

j)$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n+3}}{n+1}$,

k)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}\cos\sqrt{n}}{n^4}$

l)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}\sin\sqrt{n}}{n^3}$

15. W niektórych przypadkach wygodne jest *kryterium zagęszczające*, mówiące, że jeśli $a_n \geq a_{n+1} \geq 0$, to zbieżność szeregu $\sum_n a_n$ jest równoważna zbieżności szeregu $\sum_k 2^k a_{2^k}$. W oparciu o to kryterium zbadaj zbieżność

a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^\beta$, $\beta \in R$

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$, $\alpha \in R$

c) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)(\ln\ln n)}$

d) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)(\ln\ln n)^2}$

16. Pokaż, że jeśli $a_n \geq 0$ i $\sum a_n$ jest zbieżny, to również $\sum a_n^2$ jest zbieżny.

17. Dla jakich $x \in R$ poniższe szeregi są zbieżne

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2x)^n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n^3}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (x^2 - 3x + 1)^n$

18. W oparciu o wzóe Cauchy'ego-Hadamarda podać promień zbieżności szeregów potęgowych

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^3+1}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{nn^n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n!}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$