

Jeśli zadanie nie było rozwiązane samodzielnie, proszę o podanie źródła lub osoby, z którą zadanie było rozwiązywane.

Zestaw 4: Szeregi liczbowe

1. Podać warunek konieczny zbieżności szeregu, a następnie uzasadnić, że poniższe szeregi są rozbieżne

 - a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1}$
 - b) $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$
 - c) $\sum_{n=1}^{\infty} \arctg(n^{\frac{1}{n}})$
2. Z pomocą indukcji matematycznej wykazać, że

 - a) $\sum_{k=1}^n (a + (k-1)r) = na + r \frac{n(n-1)}{2}$ (skończona suma n -wyrazowego ciągu arytmetycznego). Dlaczego nie mówimy o “szeregu arytmetycznym”?
 - c) $\sum_{k=1}^n as^{k-1} = a \frac{1-s^n}{1-s}$ (skończona suma n -wyrazowego ciągu geometrycznego).
 - d) Z pomocą c) dla $s < 1$ oblicz $\sum_{k=0}^{\infty} s^k$ (szereg geometryczny).
3. Przekonać się (najprościej z pomocą wykresów), że zachodzą następujące nierówności, przydatne m.in. w kryterium porównawczym zbieżności szeregów:

 - a) $\forall n \in N : \frac{1}{2} < \cos \frac{1}{n} < 1$
 - b) $\forall n \in N : 0 < \sin \frac{1}{n} < \frac{1}{n}$
 - c) $\forall n \in N : 0 < \tg \frac{1}{n} < \frac{2}{n}$
 - d) $\forall n \in N : \sin \frac{1}{n} > \frac{2}{n\pi}$
4. Z pomocą indukcji matematycznej wykazać, że

$$\forall n \in N : e^n > n$$
5. W oparciu o poprzednie zadanie wykazać, że

$$\forall n \in N : n > \ln n$$
6. Pokazać, że

 - a) (powtórzyć z wykładu) $\forall n \in N : (1 + \frac{1}{n})^{n+1} > e > (1 + \frac{1}{n})^n$
 - b) $\forall n \in N : \frac{1}{n+1} < \ln(1 + \frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$
7. Dla danego ciągu liczbowego (a_n) definiujemy iloczyn skończony poprzez symbol Π jako $I_n = \Pi_{k=1}^n a_k = a_1 a_2 \dots a_n$. Iloczynem nieskończonym ciągu (a_n) nazywamy granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$, co oznaczamy symbolem $\Pi_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 a_2 a_3 \dots$. Pokazać, że

 - a) $\Pi_{k=1}^n (1 + \frac{1}{k}) = n+1$ (rozpisać jawnie dla kilku początkowych n i zauważyć prawidłowość)
 - b) $\Pi_{k=2}^n (1 + \frac{1}{k}) = \frac{n+1}{2}$
 - c) $\Pi_{k=2}^n (1 - \frac{1}{k}) = \frac{1}{n}$
 - d) $\Pi_{k=2}^{\infty} (1 - \frac{1}{k^2}) = \frac{1}{2}$ (skorzystaj z b) i c))

8. Pokaż, że z pomocą funkcji log badanie iloczynów nieskończonych można zamienić na badanie szeregów. Następnie napisz warunek konieczny zbieżności iloczynu nieskończonego.
9. Obliczyć sumy częściowe podanych szeregów i następnie zbadać ich zbieżność
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$
 - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ (zrobione na wykładzie)
 - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ (podobnie do b))
 - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$
 - $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3^n + 4^n}{5^n}$
 - $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ (wzór na sumę logarytmów i zad. (7))
 - $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$
 - $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (2n - 1)$
10. Wyjaśnij, dlaczego Achilles dogoni żółwia.
11. Korzystając z kryterium porównawczego zbadać zbieżność szeregów
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$
 - $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+2}$
 - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}$
 - $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$
 - $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 \sin \frac{1}{n^5}$ (skorzystać z zad. (3))
 - $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin \frac{1}{n^4}$
 - $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \sin^2 \frac{1}{n}$
 - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n n}$
 - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$ (skorzystać z zad. (5))
 - $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}^2 \frac{1}{\sqrt{n}}$
 - $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n}$
 - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3n^4+1} \cos \frac{1}{n}$
 - $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cos^2 \frac{1}{n}$
 - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{n^3}$
12. Korzystając z kryterium d'Alemberta zbadać zbieżność szeregów
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$
 - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n n!^2}{n^{2n}}$
 - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

$$\begin{aligned} \text{d)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n n!} \\ \text{e)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \\ \text{f)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{5^n - 4^n} \\ \text{g)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)5^n}{2^n 3^{n+2}} \end{aligned}$$

13. Korzystając z kryterium Cauchy'ego zbadać zbieżność szeregów

$$\begin{aligned} \text{a)} & \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{5}{3}\right)^n, \\ \text{b)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \\ \text{c)} & \sum_{n=1}^{\infty} \left[\arctg\left(\cos \frac{1}{n}\right)\right]^{2n} \\ \text{d)} & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n \\ \text{e)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n^2}{(n+1)^2} \\ \text{f)} & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{1}{3^n} \\ \text{g)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}} \\ \text{h)} & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\arctg(n)}{\pi}\right)^n \end{aligned}$$

14. Zbadać zbieżność i bezwzględną zbieżność szeregów

$$\begin{aligned} \text{a)} & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^\alpha}, \alpha > 0 \\ \text{b)} & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{1}{n}\right), \\ \text{c)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{5^{n-1}}, \\ \text{d)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}, \\ \text{e)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{n^2+1}, \\ \text{f)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{n^2}, \\ \text{g)} & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln(n+1)}, \\ \text{h)} & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-2n}{3n+5}\right)^n, \\ \text{i)} & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{tg} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}, \\ \text{j)} & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n+3}}{n+1}, \\ \text{k)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} \cos \sqrt{n}}{n^4} \\ \text{l)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} \sin \sqrt{n}}{n^3} \end{aligned}$$

15. W niektórych przypadkach wygodne jest *kryterium zagęszczające*, mówiące, że jeśli $a_n \geq a_{n+1} \geq 0$, to zbieżność szeregu $\sum_n a_n$ jest równoważna zbieżności szeregu $\sum_k 2^k a_{2^k}$. W oparciu o to kryterium zbadaj zbieżność

$$\begin{aligned} \text{a)} & \sum_{n=1}^{\infty} n^\beta, \beta \in R \\ \text{b)} & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}, \alpha \in R \end{aligned}$$

c) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)(\ln \ln n)}$

d) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)(\ln \ln n)^2}$

16. Pokaż, że jeśli $a_n \geq 0$ i $\sum a_n$ jest zbieżny, to również $\sum a_n^2$ jest zbieżny.

17. Dla jakich $x \in R$ poniższe szeregi są zbieżne

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2x)^n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n^3}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (x^2 - 3x + 1)^n$

18. W oparciu o wzóe Cauchy'ego-Hadamarda podać promień zbieżności szeregów potęgowych

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^3+1}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{nn^n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n!}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$