

Jeśli zadanie nie było rozwiązane samodzielnie, proszę o podanie źródła lub osoby, z którą zadanie było rozwiązywane.

### Zestaw 4 - fizyka: Szeregi liczbowe

1. Podać warunek konieczny zbieżności szeregu, a następnie uzasadnić, że poniższe szeregi są rozbieżne

  - a)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1}$
  - b)  $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$
  - c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \arctg(n^{\frac{1}{n}})$
2. Z pomocą indukcji matematycznej wykazać, że

  - a)  $\sum_{k=1}^n (a + (k-1)r) = na + r \frac{n(n-1)}{2}$  (skończona suma  $n$ -wyrazowego ciągu arytmetycznego).
  - b) Dlaczego nie mówimy o “szeregu arytmetycznym”?
  - c)  $\sum_{k=1}^n as^{k-1} = a \frac{1-s^n}{1-s}$  (skończona suma  $n$ -wyrazowego ciągu geometrycznego).
  - d) Z pomocą c) dla  $s < 1$  oblicz  $\sum_{k=0}^{\infty} s^k$ .
3. Przekonać się (najprościej z pomocą wykresów), że zachodzą następujące przydatne nierówności

  - a)  $\forall n \in N : \frac{1}{2} < \cos \frac{1}{n} < 1$
  - b)  $\forall n \in N : 0 < \sin \frac{1}{n} < \frac{1}{n}$
  - c)  $\forall n \in N : 0 < \operatorname{tg} \frac{1}{n} < \frac{2}{n}$
  - d)  $\forall n \in N : \sin \frac{1}{n} > \frac{2}{n\pi}$
4. Z pomocą indukcji matematycznej wykazać, że

$$\forall n \in N : e^n > n$$
5. Wykazać, że

$$\forall n \in N : n > \ln n$$
6. Pokazać, że

  - a) (pokazane na wykładzie)  $\forall n \in N : (1 + \frac{1}{n})^{n+1} > e > (1 + \frac{1}{n})^n$
  - b)  $\forall n \in N : \frac{1}{n+1} < \ln(1 + \frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$
7. Dla danego ciągu liczbowego  $(a_n)$  definiujemy iloczyn skończony poprzez symbol  $\Pi$  jako  $I_n = \prod_{k=1}^n a_k = a_1 a_2 \dots a_n$ . Iloczynem nieskończonym ciągu  $(a_n)$  nazywamy granicę  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ , co oznaczamy symbolem  $\prod_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 a_2 a_3 \dots$ . Pokazać, że

  - a)  $\prod_{k=1}^n (1 + \frac{1}{k}) = n+1$  (rozpisać jawnie dla kilku początkowych  $n$  i zauważyć prawidłowość)

$$\text{b) } \prod_{k=2}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \frac{n+1}{2}$$

$$\text{c) } \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n}$$

$$\text{d) } \prod_{k=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{1}{2} \text{ (skorzystaj z b) i c)}$$

8. Pokaż, że z pomocą funkcji log badanie iloczynów nieskończonych można zamienić na badanie szeregów. Następnie napisz warunek konieczny zbieżności iloczynu nieskończonego.

9. Obliczyć sumy częściowe podanych szeregów i następnie zbadać ich zbieżność

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

$$\text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \text{ (zrobione na wykładzie)}$$

$$\text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} \text{ (podobnie do b)}$$

$$\text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$$

$$\text{e) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3^n + 4^n}{5^n}$$

$$\text{f) } \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \text{ (wzór na sumę logarytmów i zad. (7))}$$

$$\text{g) } \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

$$\text{h) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (2n - 1)$$

10. Korzystając z kryterium porównawczego zbadać zbieżność szeregów

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$$

$$\text{b) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+2}$$

$$\text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}$$

$$\text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$$

$$\text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} n^4 \sin \frac{1}{n^5} \text{ (skorzystać z zad. (3))}$$

$$\text{f) } \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin \frac{1}{n^4}$$

$$\text{g) } \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \sin^2 \frac{1}{n}$$

$$\text{h) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n n}$$

$$\text{i) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3} \text{ (skorzystać z zad. (5))}$$

$$\text{j) } \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}^2 \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\text{k) } \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n}$$

$$\text{l) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3n^4+1} \cos \frac{1}{n}$$

$$\text{m) } \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cos^2 \frac{1}{n}$$

$$\text{n) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{n^3}$$

$$\text{o) } \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2+1}{n^2}$$

$$\text{p) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$$

$$\text{q) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{n^3+1} \cos \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$r) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^4+n+1}$$

$$s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!+1}{(n+5)!}$$

11. Korzystając z kryterium d'Alemberta zbadać zbieżność szeregów

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n n!^2}{n^{2n}}$$

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n n!}$$

$$e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

$$f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{5^n - 4^n}$$

$$g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)5^n}{2^n 3^{n+2}}$$

12. Korzystając z kryterium Cauchy'ego zbadać zbieżność szeregów

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{5}{3}\right)^n,$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \arctg\left(\cos\frac{1}{n}\right) \right]^{2n}$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$$

$$e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}$$

$$f) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{3^n}$$

$$g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}$$

$$h) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\arctg(n)}{\pi}\right)^n$$

13. Zbadać zbieżność i bezwzględną zbieżność szeregów

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^\alpha}, \alpha > 0$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{5^{n-1}},$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}},$$

$$e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{n^2+1},$$

$$f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{n^2},$$

$$g) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln(n+1)},$$

$$h) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-2n}{3n+5}\right)^n,$$

$$i) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{tg} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}},$$

$$j) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n+3}}{n+1},$$

- k)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} \cos \sqrt{n}}{n^4}$   
 l)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} \sin \sqrt{n}}{n^3}$   
 m)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^3(\pi(n+1))}{n^{\frac{5}{3}}}$   
 n)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^5(\frac{1}{2}\pi(2n+1))}{\sqrt{n}}$   
 o)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\ln n}{n}$

14. W niektórych przypadkach wygodne jest *kryterium zagęszczające*, mówiące, że jeśli  $a_n \geq a_{n+1} \geq 0$ , to zbieżność szeregu  $\sum_n a_n$  jest równoważna zbieżności szeregu  $\sum_k 2^k a_{2^k}$ . W oparciu o to kryterium zbadaj zbieżność

- a)  $\sum_{n=1}^{\infty} n^\beta$ ,  $\beta \in R$   
 b)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ ,  $\alpha \in R$   
 c)  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)(\ln \ln n)}$   
 d)  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)(\ln \ln n)^2}$

15. Pokaż, że jeśli  $a_n \geq 0$  i  $\sum a_n$  jest zbieżny, to również  $\sum a_n^2$  jest zbieżny.

16. Dla jakich  $x \in R$  są zbieżne szeregi

- a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(3x)^n}$   
 b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n^3}$   
 c)  $\sum_{n=1}^{\infty} (x^2 - 3x + 1)^n$

17. Podać promień zbieżności szeregów potęgowych

- a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2+1}$   
 b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{nn^n}$   
 c)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n!}$

18. Czy szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2[1+(nx)^2]}$  jest zbieżny jednostajnie dla  $x \in R$ ? (kryterium Weierstrassa)