

Zestaw 15 - fizyka / 13 - informatyka (termin oddania - 7 VI)

Całki krzywoliniowe i powierzchniowe

(zadania częściowo na podstawie R. Rudnicki, "Wykłady z analizy matematycznej", oraz W. Krywicki, L. Włodarski, "Analiza Matematyczna w zadaniach, cz. 2".)

1. Rozwiąż równania różniczkowe, zakładając warunek początkowy $y(0) = y_0$:

(a) $y'(x) = \lambda y(x)$, gdzie $\lambda \in \mathbb{R}$

(b) $2x^2 y' = y$

(c) $x^2 + (y')^2 = 1$

(d) $x'(t) = A \cos(\omega t)$, gdzie $A, \omega \in \mathbb{R}$

(e) $y' = \cos^2 y$

(f) $y' = y\sqrt{1 - y^2}$

2. Rozwiąż równania różniczkowe typu $y' = f(ax + by + c)$:

(a) $y' = 3x + 2y + 4$

(b) $y' = (x + y)^2$

(c) $y' = \frac{1}{(x+y)^2}$

3. Rozwiąż równania jednorodne względem x i y :

(a) $(x + y)y' + 2y = 0$

(b) $y' + \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x}$

4. Rozwiązać równania liniowe:

(a) $y' = \frac{1}{x^2} y$

(b) $y' = y \cos x$

(c) $y' = y + 1$

(d) $y' = \frac{2y}{1+x} + (1+x)^3$

5. Znaleźć krzywą całkową równania $y' - 2y + 3 = 0$ przechodzącą przez punkt $(0, 1)$.

6. Sprowadź do równania rzędu pierwszego i rozwiąż:

- (a) $y'' = 1(y')^2$
- (b) $y'' = x^2$
- (c) $xy'' + y' = 2x$

7. Rozwiąż równania o współczynnikach stałych:

- (a) $y'' = 0$
- (b) $y'' + 2y' + y = 0$
- (c) $y'' = 9y$
- (d) $y'' - 2y' + 3y = x + 1$
- (e) $y'' + y = \exp x$
- (f) $y'' + 9y = \sin x$

8. Rozwiąż układy równań:

- (a) $x'(t) = x(t) + 5y(t), y'(t) = -x(t) - y(t)$
- (b) $x'(t) + y(t) = 0, y'(t) + 4x(t) = 0$
- (c) $x'(t) + 2x(t) + 4y(t) = 4t + 1, y'(t) + x(t) - y(t) = \frac{3}{2}t^2$

9. Rozwiń $f(x)$ w szereg Fouriera i wyznacz wartość szeregu dla $x = \pm\pi$:

- (a) $f(x) = x, x \in [-\pi, \pi]$
- (b) $f(x) = x^2, x \in [-\pi, \pi]$
- (c) $f(x) = \sin(ax), x \in (-\pi, \pi), a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ (dowolna liczba niecałkowita)
- (d) $f(x) = -1$ dla $x \in [-\pi, 0), f(x) = 1$ dla $x \in (0, \pi]$