

Jeśli zadanie nie było rozwiązane samodzielnie, proszę o podanie źródła lub osoby, z która zadanie było rozwiązywane.

* oznacza zadania ciekawsze.

Zestaw 2: Relacje i funkcje

Przypomnienie z wykładu: Dla danych zbiorów A i B relacją dwuargumentową nazywamy dowolny podzbiór R iloczynu kartezjańskiego $A \times B$. Jeśli relacja dwuargumentowa określona jest na zbiorze $A \times A$, to mówimy w skrócie, że jest to relacja dwuargumentowa *na zbiorze* A . Elementy $x \in A$ i $y \in B$ będące w relacji, czyli należące do zbioru R , oznaczamy jako xRy , lub jako parę uporządkowaną (x, y) . Relacja dwuargumentowa określona na zbiorze A jest

- zwrotna (Z), jeśli $\forall x \in A : xRx$
- przeciwzwrotna (PZ), jeśli $\forall x \in A : \sim xRx$
- symetryczna (S), jeśli $\forall x \in A, y \in A : xRy \Rightarrow yRx$
- antysymetryczna (AS), jeśli $\forall x \in A, y \in A : xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$
- przechodnia (P), jeśli $\forall x, y, z \in A : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

Wykresem relacji dwuargumentowej określonej na zbiorze A jest diagram, w którym pary będące w relacji xRy połączone są strzałką biegnącą od x do y .

[Niektórzy autorzy określają relację (AS) jako *ślabo antysymetryczną*.]

1. Wypisz jawnie wszystkie relacje dwuargumentowe, które można określić na zbiorach A i B , gdzie $A = \{a, b\}$ i $B = \{-1, 0, 1\}$.
2. Narysuj *wykresy relacji* dwuargumentowych określonych na zbiorze $S = \{0, 1, 2, 3\}$ w poniższy sposób:

(a) $(m, n) \in R \iff m + n = 3$

(b) $(m, n) \in R \iff mn = 4$

(c) $(m, n) \in R \iff m - n$ jest podzielne przez 2

(d) $(m, n) \in R \iff m \leq n$

(e) $(m, n) \in R \iff m + n \leq 4$

(f) $(m, n) \in R \iff \max(m, n) = 3$

Określ, które cechy (Z, PZ, S, AS, P) posiadają relacje z punktu 2

3. * Rozważ (a) *relację pustą*, określoną jako pusty podzbiór iloczynu kartezjańskiego niepustego zbioru A , oraz (b) *relację uniwersalną*, określoną jako największy (pełny) podzbiór $A \times A$ (każdy element A jest w relacji z wszystkimi elementami A). Które cechy (Z, PZ, S, AS, P) posiadają te relacje? Załóż, że A jest zbiorem czteroelementowym. Narysuj wykresy relacji pustej oraz uniwersalnej.

4. Podaj dowolny przykład "z życia" relacji równoważności i związanej z nią klas abstrakcji.
5. Udowodnij, że jeśli $a \neq b$, to $[a] \cap [b] = \emptyset$.
6. R_1 i R_2 oznaczają relacje dwuargumentowe określone na zbiorze A .
 - (a) Pokaż, że $R_1 \cap R_2$ jest zwrotna, jeśli R_1 i R_2 są zwrotne.
 - (b) Pokaż, że $R_1 \cap R_2$ jest symetryczna, jeśli R_1 i R_2 są symetryczne.
 - (c) Pokaż, że $R_1 \cap R_2$ jest przechodnia, jeśli R_1 i R_2 są przechodnie.
 - (d) Czy jeśli R_1 i R_2 są zwrotne, to $R_1 \cup R_2$ musi być zwrotna?
 - (e) Czy jeśli R_1 i R_2 są przechodnie, to $R_1 \cup R_2$ musi być przechodnia?
7. Niech $n|x$ oznacza, że x jest podzielne przez n (n dzieli x bez reszty). Podaj klasy abstrakcji relacji dwuargumentowej określonej na zbiorze N jako $xRy \iff 3|(x-y)$.
 [Przypomnienie: resztą z dzielenia x przez m nazywamy najmniejszą liczbę $r \in N \cup \{0\}$, dla której $x = km + r$, $x, k, m \in N$.]
8. Przeciwbrazy. Udowodnij, że $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. [UWAGA: Zapis $f(Z)$ i $f^{-1}(Z')$, gdzie $Z \subset Df$ i $Z' \subset Df^{-1}$ są zbiorami, oznacza obraz i przeciwbraz tych zbiorów. Nie należy tego mylić z zapisem wartości funkcji, $f(x)$, gdzie x jest elementem dziedziny.]
9. * Wiemy, że obrazy spełniają własność $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Znajdź kontrprzykład dla stwierdzenia $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$. Wskazówka: próbuj funkcje niemonotoniczne.
10. Wyznacz $f([0, \frac{1}{2}])$ oraz $f^{-1}((0, \frac{\pi}{2}))$ dla $f(x) = \frac{\pi}{2} + 2 \arcsin(x)$.
11. Podziel wielomiany $(x^4 + 3x^2 - 7) : (x^3 - 1)$.
12. Znajdź pierwiastki zespolone równania $x^2 + x + 1 = 0$.
13. Niech $f(x) = \operatorname{tg}(x)$, $g(x) = e^{-x}$, $h(x) = \sqrt{x}$. Podaj wzory na złożenia $f \circ g \circ h$, $g \circ h \circ f$, $h \circ f \circ g$, $g \circ f \circ h$, $h \circ g \circ f$, oraz $f \circ h \circ g$.
14. Narysuj (tj. naszkicuj) wykres dowolnej funkcji $f(x)$, a następnie wykres funkcji $f(x+a) + b$ dla kilku wartości liczb a i b . Zapamiętaj regułę!
15. Narysuj wykres dowolnej funkcji $f(x)$, a następnie wykres funkcji $af(bx)$ dla kilku wartości liczb a i b . Opisz znalezione regułę.
16. Podaj dziedzinę i przeciwdziedzinę funkcji $R \rightarrow R$
 - (a) $\sin(x + \frac{1}{x})$
 - (b) $\sqrt{\sin(\frac{1}{x})}$
 - (c) $\sin(\arcsin(x))$
 - (d) $\arcsin(\sin(x))$

(e) $\log \log(x + 1)$

(f) x^x

[UWAGA: $\log x = \ln x$ oznacza najczęściej w notacji fizyki logarytm naturalny. Tak też należy rozumieć ten zapis w zadaniach i wykładach. Logarytm dziesiętny będziemy pisać jako $\log_{10} x$.]

17. Pokaż, że funkcja $\frac{ax+b}{cx+d}$, gdzie $x \in R$, oraz $ad \neq bc$, jest iniekcją.

18. Znajdź przeciwobraz przedziału $[1/2, 2)$ względem funkcji sinus.

19. Znajdź funkcje odwrotne do

(a) $y = 1 - 2 \arccos \frac{x-1}{x+1}$ dla $x > 0$

(b) $y = 3^{x+2}$

(c) $y = \sqrt{x + \frac{1}{x}}$ dla $x \geq 1$

[UWAGA: Praktyka mówi, że trudności sprawia określenie dziedziny funkcji odwrotnej. Dziedzina ta jest po prostu obrazem dziedziny funkcji wyjściowej, tj. $Df^{-1} = f(Df)$. Pomocny jest tu szkic wykresu.]

20. Znajdź obraz zbioru liczb rzeczywistych w złożeniu funkcji $\arcsin \circ \sin$

21. Rozważ funkcję f zadaną wzorem $f(x + af^{-1}(x)) = x$ dla $x \in R$. Wyraż $f(x)$ w postaci "zwykłego" wzoru, podającego $f(x)$ jako wyrażenie zawierające jedynie x i a . Dla jakich a zadanie ma sens?

22. Pokaż, że $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$. Sprawdź na przykładzie.

23. Pokaż, że wykresy funkcji $y = f(x)$ i $y = f^{-1}(x)$ są symetryczne względem osi $y = x$.

24. Narysuj wykres funkcji $3\cos(3x)$ dla $x \in [0, \pi/3]$, a następnie wykres funkcji odwrotnej.

25. Funkcje cyklotometryczne. Narysuj wykres funkcji

(a) $\arccos(\cos x)$

(b) $\arctg(\tg x)$

(c) $\cos(\arccos x)$

(d) $\tg(\arctg x)$

dla x należącego do dziedziny funkcji wewnętrznej.

26. Wyznacz dziedziny funkcji $R \times R \rightarrow R$:

(a) $f(x, y) = \log xy$

(b) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

(c) $z = \arccos \frac{y-1}{x+2}$

27. Naszkicuj wykres funkcji (możesz sprawdzić kalkulatorem, ale chodzi o umiejętność narysowania “z głowy”)

(a) $y = x - 3$

(b) $y = |x - 3|$

(c) $y = ||x - 3| - 1|$

(d) $y = x^2 - 1$

(e) $y = |x^2 - 1|$

(f) $y = \log x$ (tj. $\ln x$)

(g) $y = |\log x|$

(h) $y = 2^{x-1}$

(i) $y = 2^{|x-1|}$

(j) $y = \sin |x|$

(k) $y = \sin(x^2)$

(l) $\sqrt{1 - x^2}$

[UWAGA: to zadanie należy powtarzać w różnych wariantach tak długo, aż nie sprawia kłopotu.]