Jeśli zadanie nie było rozwiązane samodzielnie, proszę o podanie źródła lub osoby, z która zadanie było rozwiązywane.

Zestaw 2: Relacje i funkcje

Przypomnienie z wykładu: Dla danych zbiorów A i B *relacją dwuargumentową* nazywamy dowolny podzbiór R iloczynu kartezjańskiego $A \times B$. Jeśli relacja dwuargumentowa określona jest na zbiorze $A \times A$, to mówimy w skrócie, że jest to relacja dwuargumentowa *na zbiorze* A. Elementy $x \in A$ i $y \in B$ będące w relacji, czyli należące do zbioru R, oznaczamy jako xRy, lub jako parę uporządkowaną (x, y). Relacja dwuargumentowa określona na zbiorze A jest

- zwrotna (Z), jeśli $\forall x \in A : xRx$
- przeciwzwrotna (PZ), jeśli $\forall x \in A : \sim xRx$
- symetryczna (S), jeśli $\forall x \in A, y \in A : \ xRy \Rightarrow yRx$
- antysymetryczna (AS), jeśli $\forall x \in A, y \in A : \ xRy \ \wedge \ yRx \Rightarrow x = y$
- przechodnia (P), jeśli $\forall x, y, z \in A : \ xRy \ \wedge \ yRz \Rightarrow xRz$

Wykresem relacji dwuargumentowej określonej na zbiorze A jest diagram, w którym pary będące w relacji xRy połączone są strzałką biegnąca od x do y.

[Niektórzy autorzy określają relację (AS) jako *słabo antysymetryczną*.]

1. Wypisz jawnie wszystkie relacje dwuargumentowe, które można określić na zbiorach A i B, gdzie $A = \{a, b\}$ i $B = \{0, 1, 2\}$.

2. Narysuj *wykresy relacji* dwuargumentowych określonych na zbiorze $S = \{0, 1, 2, 3\}$ w poniższy sposób:

   (a) $(m, n) \in R \iff m + n = 3$

   (b) $(m, n) \in R \iff mn = 4$

   (c) $(m, n) \in R \iff m - n$ jest podzielne przez 2

   (d) $(m, n) \in R \iff m \leq n$

   (e) $(m, n) \in R \iff m + n \leq 4$

   (f) $(m, n) \in R \iff \max(m, n) = 3$

   Określ, które cechy (Z, PZ, S, AS, P) posiadają relacje z punktu 2

3. * Rozważ (a) *relację pustą*, określoną jako pusty podzbiór iloczynu kartezjańskiego niepustego zbioru A, oraz (b) *relację uniwersalną*, określoną jako największy (pełny) podzbiór $A \times A$ (każdy element A jest w relacji z wszystkimi elementami A). Które cechy (Z, PZ, S, AS, P) posiadają te relacje? Załóż, że A jest zbiorem czteroelementowym. Narysuj wykresy relacji pustej oraz uniwersalnej.

4. Podaj dowolny przykład “z życia” relacji równoważności i związanej z nią klas abstrakcji.

5. Udowodnij, że jeśli $a \neq b$, to $[a] \cap [b] = \emptyset$.

6. R_1 i R_2 oznaczają relacje dwuargumentowe określone na zbiorze A.

   (a) Pokaż, że $R_1 \cap R_2$ jest zwrotna, jeśli R_1 i R_2 są zwrotne.

   (b) Pokaż, że $R_1 \cap R_2$ jest symetryczna, jeśli R_1 i R_2 są symetryczne.

   (c) Pokaż, że $R_1 \cap R_2$ jest przechodnia, jeśli R_1 i R_2 są przechodnie.

   (d) Czy jeśli R_1 i R_2 są zwrotne, to $R_1 \cup R_2$ musi być zwrotna?

   (e) Czy jeśli R_1 i R_2 są przechodnie, to $R_1 \cup R_2$ musi być przechodnia?

7. Niech $n|x$ oznacza, że x jest podzielne przez n (n dzieli x bez reszty). Podaj *klasy abstrakcji* relacji dwuargumentowej określonej na zbiorze N jako $xRy \iff 3|(x-y)$.

   [Przypomnienie: resztą z dzielenia x przez m nazywamy najmniejszą liczbę $r \in N \cup \{0\}$, dla której $x = km + r$, $x, k, m \in N$.]

8. Przeciwobrazy. Udowodnij, że $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

9. * Wiemy, że obrazy spełniają własność $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Znajdź kontrprzykład dla stwierdzenia $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$. Wskazówka: próbuj funkcje niemonotoniczne.

10. Wyznacz $f([0, \frac{1}{2}]$ oraz $f^{-1}((0, \frac{\pi}{2})$ dla $f(x) = \frac{\pi}{2} + 2 \arcsin(x)$.

11. Niech $f(x) = \cos(x)$, $g(x) = e^x$, $h(x) = \sqrt{x}$. Podaj wzory na złożenia $f \circ g \circ h$, $g \circ h \circ f$, $h \circ f \circ g$, $g \circ f \circ h$, $h \circ g \circ f$, oraz $f \circ h \circ g$.

12. Narysuj (tj. naszkicuj) wykres dowolnej funkcji $f(x)$, a następnie wykres funkcji $f(x+a)+b$ dla kilku wartości liczb a i b.

13. Narysuj wykres dowolnej funkcji $f(x)$, a następnie wykres funkcji $af(bx)$ dla kilku wartości liczb a i b.

14. Podaj dziedzinę i przeciwdziedzinę funkcji $R \to R$

   (a) $\sin(x + \frac{1}{x})$

   (b) $\sqrt{\sin(\frac{1}{x})}$

   (c) $\sin(\arcsin(x))$

   (d) $\arcsin(\sin(x))$

   (e) $\log \log(x+1)$

   (f) x^x

   [$\log x = \ln x$ oznacza logarytm naturalny.]

15. Pokaż, że funkcja $\frac{ax+b}{cx+d}$, gdzie $x \in R$, oraz $ad \neq bc$, jest injekcją.

16. Znajdź przeciwobraz przedziału $[1/2, 2)$ względem funkcji sinus.

17. Znajdź funkcje odwrotne do
    (a) $y = 1 - 2\arccos\frac{x-1}{x+1}$ dla $x > 0$
    (b) $y = 3^{x+2}$
    (c) $y = \sqrt{x + \frac{1}{x}}$ dla $x \geq 1$

18. Rozważ funkcję f zadaną wzorem $f(x + af^{-1}(x)) = x$ dla $x \in R$. Wyraź $f(x)$ w postaci "zwykłego" wzoru, podającego $f(x)$ jako wyrażenie zawierające jedynie x i a. Dla jakich a zadanie ma sens?

19. Pokaż, że $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$. Sprawdź na przykładzie.

20. Pokaż, że wykresy funkcji $y = f(x)$ i $y = f^{-1}(x)$ są symetryczne względem osi $y = x$.

21. Narysuj wykres funkcji $2cos(2x)$ dla $x \in [0, \pi/2]$, a nastepnie wykres funkcji odwrotnej.

22. Funkcje cyklometryczne. Narysuj wykres funkcji
    (a) $\arcsin(\sin x)$
    (b) $\mathrm{arctg}(\mathrm{tg} x)$
    (c) $\sin(\arcsin x)$
    (d) $\mathrm{tg}(\mathrm{arctg} x)$

23. Wyznacz dziedziny funkcji $R \times R \to R$:
    (a) $f(x, y) = \log xy$
    (b) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
    (c) $z = \arccos\frac{y-1}{x+2}$

24. Naszkicuj wykres funkcji
    (a) $y = x - 1$
    (b) $y = |x - 1|$
    (c) $y = x^2 - 1$
    (d) $y = |x^2 - 1|$
    (e) $y = \log x$
    (f) $y = |\log x|$
    (g) $y = 2^{x-1}$
    (h) $y = 2^{|x-1|}$
    (i) $|1 + |x - 1||$
    (j) $1 + |x - 1| + |1 - |x - 1||$
    (k) $\sqrt{1 - x^2}$