Wojciech Broniowski, Instytut Fizyki, UJK

Mechanika kwantowa - zadania 5 (2007/2008)

1 Spin

1. (powtórka wykładu) Rozważ funkcję wektorową

$$\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} v_x(x,y,z) \\ v_y(x,y,z) \\ v_z(x,y,z) \end{pmatrix}.$$

Oznaczmy obrót wokół osi $\hat{\phi}$ o kąt $-\phi$ jako R (znak odpowiada obrotowi układu współrzędnych o kąt $+\phi$). Obrót ten działa na v a także na współrzędne, tj. pod jego działaniem

$$\vec{v}(\vec{x}) \to R\vec{v}(R\vec{x}). \tag{1}$$

(a) Weź $\hat{\phi} = \hat{z}$, czyli obrót wokół osi z. Macierz odpowiadająca obrotowi R ma postać

$$R = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}.$$

Napisz postać infinitezymalną tej macierzy. Następnie podstaw tę postać do wzoru (1) i rozwiń do wyrazów rzędu ϕ. Przekonaj się, że wynik mozna zapisać jako

$$\vec{v} \to (1 - i\phi(L_z + S_z)),$$

gdzie

$$S_z = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Napisz (bez przeliczania) analogiczne wyrażenia dla S_x i S_y (skorzystaj z faktu, że można cyklicznie zmienić osie). Sprawdź, że $[S_x, S_y] = iS_z$ (i cyklicznie).

(c) Sprawdź, że $S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = 2$.

(d) Na podstawie dwóch powyższych punktów skonkluduj, że v ma spin 1.

(e) Znajdź wartości własne S_z.

(f) Sprawdź jeszcze, że S_i komutuje z L_j, zatem $J_i = S_i + L_i$ ma również odpowiednie reguły komutacji.

2. Spin połówkowy

(a) Rozważ macierze Pauliego σ_i z wykładu. Pokaż, że spełniają reguły komutacji dla momentu pędu.

(b) Pokaż, że antykomutator wynosi $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}$, oraz że

$$\sigma_k \sigma_l = i\epsilon_{klm}\sigma_m + \delta_{kl}.$$

Następnie sprawdź, że

$$\vec{A} \cdot \vec{\sigma} \vec{B} \cdot \vec{\sigma} = \vec{A} \cdot \vec{B} + i(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{\sigma}$$

(c) Sprawdź, że $\frac{1}{4}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) = \frac{3}{4}$.

(d) Znajdź wartości wektory własne macierzy $S_z = \frac{1}{2}\sigma_z$.

(e) Z powyższych wyników wywnioskuj, że wektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ odpowiadają stanom o spinie 1/2 i rzucie spinu na oś z równym 1/2 i $-1/2$.

2 Składanie momentu pędu

1. Przelicz strony 378-380 Shankara. Zidentyfikuj współczynniki Clebscha-Gordana dla składania spinów $1/2 \otimes 1/2$.

2. Korzystając z metody z operatorami obniżania (wykład, Shankar s. 383-385) znajdź współczynniki Clebsha-Gordana dla złożenia spinów $1 \otimes 1/$ oraz $1 \otimes 1$.

3. Naucz się korzystać z tablic współczynników Clebsha-Gordana, rys. 1. Elementy tabeli zawierają znak, natomiast nad liczbą należy postawić pierwiastek. Sprawdź z pomocą tabeli powyższe rachunki.

3 Zastosowania współczynników Clebscha-Gordana

1. Przedyskutuj rozszczepienie widma atomu helu z uwzględnieniem odziaływań nadsubtelnych $A\vec{S_1} \cdot \vec{S_2}$.

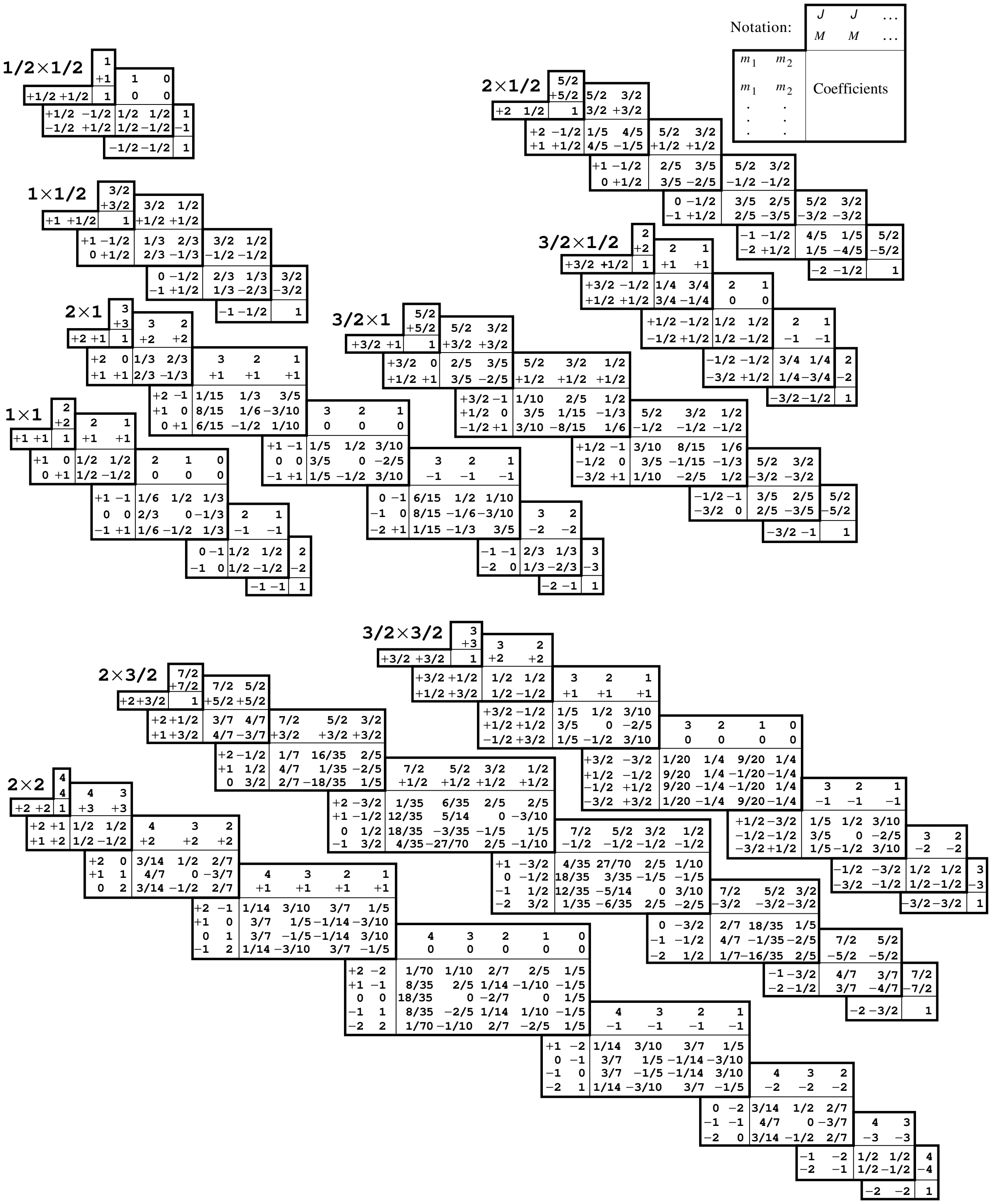
2. W świecie cząstek elementarnych istnieje liczba kwantowa o nazwie izospin, I, zachowująca się tak samo jak spin (w sensie algebry, składania, itp.), choć nie majaca interpretacji przetrzennej. Cząstka ρ^0 jest stanem $|I, I_3\rangle = |1, 0\rangle$. Rozpada się ona na piony, przy czym $\pi^+ = |1, 1\rangle$ (naładowany dodatnio), $\pi^0 = |1, 0\rangle$ (neutralny) i $\pi^- = |1, -1\rangle$ (naładowany ujemnie). Prawdopodobieństwo rozpadu ρ^0 na parę pionów jest proporcjonalne do $|\langle\rho^0|V|\pi^a\pi^b\rangle|^2$, gdzie V nie zalezy od izospinu. Jakie a i b są możliwe? Jaki jest stosunek rozpadu na naładowane piony do rozpadu na piony neutralne?

3. Reguły wyboru. Wykorzystaj tw. Wignera-Ecckarta do wyprowadzenia reguł wyboru dla przejść związanych z emisją grawitonu. Spin grawitonu wynosi 2, a jego rzut ± 2.

4. Oblicz z pomocą tw. Wignera-Ecckarta zależność całki

$$\int d\cos\theta d\phi Y_{2,m}^*(\theta, \phi) \cos\theta \, Y_{1,m'}(\theta, \phi)$$

od m i m'.



Rysunek 1: Współczynniki Clebscha-Gordana.