Wojciech Broniowski
Instytut Fizyki, Akademia Świetokrzyska

Mechanika kwantowa - zadania 3 (2007/2008)

1 Proste zagadnienia jednowymiarowe, c.d.

1. Shankar, zad. 5.2.6, 5.3.1
2. Potencjał $\delta(x)$

   Rozważ potencjał $V(x) = a\delta(x)$.

   (a) Wyprowadź warunki zszycia, które w tym przypadku dają ciągłość funkcji falowej w $x = 0$ oraz skok jej pierwszej pochodnej proporcjonalny do a. W celu znalezienia współczynnika scałkuj obie strony bezczasowego r. Schrödingera od $x = -\epsilon$ do $x = \epsilon$.

   (b) Załóż, że po lewej stronie bariery mamy padającą i odbitą falę płaską, a po prawej stronie falę przechodzącą. Oblicz współczynnik odbicia R i przejścia T. Przedyskutuj zależność od a.

2 Oscylator harmoniczny

1. Wyprowadź z "zamkniętymi oczami" wzór na widmo oscylatora harmonicznego z pomocą metody szeregu potęgowego oraz metody algebraicznej z operatorami kreacji i anihilacji.
2. Sprawdź wzory rekurencyjne dla kilku początkowych wielomianów Hermite'a.
3. Shankar, zad. 7.3.4-7.3.6

3 Układy o wielu stopniach swobody

1. Shankar, zad. 7.4.8, 10.1.3, 10.2.1-3
2. Cząstki identyczne

   Rozważ układ dwóch *identycznych* cząstek w jednowymiarowej prostokątnej studni potencjału $V(x) = V_0$ dla $0 \leq x \leq L$. Niech cząstki zajmują stany jednocząstowe $|1\rangle$ i $|2\rangle$, przy czym

$$\langle x|1\rangle = \psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), \quad \langle x|2\rangle = \psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right).$$

   (a) Skonstruuj odpowiednio zsymetryzowaną i zantysymetryzowaną funkcję falową dla układu dwóch identycznych cząstek, $\Psi(x_1, x_2)$, dla przypadku, gdy cząstki są bozonami (B) lub fermionami (F). Dobierz odpowiednią normalizację tak, aby zachodził warunek $\int dx_1 dx_2 |\Psi(x_1, x_2)|^2 = 1$. Oczywiście, dla przypadku cząstek rozróżnialnych (R) $\Psi(x_1, x_2) = \psi_1(x_1)\psi_2(x_2)$

(b) Sprawdź jawnym rachunkiem, że dla wszystkich przypadków R, B, F prawdopodobieństwo znalezienia jednej cząstki w lewej części studni (tzn. w obszarze $x < L/2$), bez pomiaru położenia drugiej cząstki, wynosi 1/2. Wskazówka: po prostu trzeba obliczyć

$$\int_0^{L/2} dx_1 \int_0^L dx_2 |\Psi(x_1, x_2)|^2.$$

(c) Znajdź prawdopodobieństwo P, że w wyniku pomiaru obydwie cząstki zostaną znalezione w lewej części studni. Odpowiedź: R: $1/4$, B: $1/4+16/(9\pi^2)$, F: $1/4-16/(9\pi^2)$. Przedyskutuj wynik, w szczególności odstępstwo od przypadku R dla czastek B i F, oraz znak.

(d) Z pomocą poprzedniego wyniku znajdź (bez liczenia całek) prawdopobobieństwo zarejestrowania jednej cząstki w lewej a drugiej cząstki w prawej części studni.

(e) Powtórz zadanie dla przypadku $\psi_1(x) = \psi_2(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ (obie cząstki w stanie podstawowym). Przedyskutuj wynik.

(f) * Powtórz zadanie dla przypadku dowolnych stanów jednocząstowych, tj.

$$\langle x|1\rangle = \psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right), \quad \langle x|2\rangle = \psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Oblicz prawdopodobieństwo P zarejestrowania obu cząstek w lewej części studni.

Użyteczne wzory: $\sin^2(n\pi/2) = (1-(-1)^n)/2$, $\cos^2(n\pi/2) = (1+(-1)^n)/2$.

Odpowiedź: Dla $m+n$ parzystego $P = 1/4$ niezależnie od statystyki cząstek. Dla $m+n$ nieparzystego

$$P = \frac{1}{4} + \frac{\epsilon}{\pi^2}\left(\frac{1}{|m-n|} + \frac{1}{m+n}\right)^2,$$

gdzie $\epsilon = 0, 1, -1$ odpowiednio dla przypadków R, B, F.

(g) Przedyskutuj wynik z powyższego podpunktu. Kiedy można zaniedbać poprawkę od statystyki?

3. Shankar zad. 10.3.2-4

4 Symetrie, obroty

1. Shankar, zad. 11.4.1, 12.3.3, 12.3.5-7

2. Sprawdź reguły komutacji dla operatorów L_i dwoma sposobami: wykorzystując reguły komutacji dla operatorów X_i i P_i oraz jawnym rachunkiem w reprezentacji położeń (kartezjańskich).