Analiza Matematyczna - FIZYKA
Akademia Świętokrzyska, 2005-2006
dr hab. prof. AŚ Wojciech Broniowski

Zestaw powtórkowy po pierwszym semestrze - fizyka

1. Sprawdź przy pomocy matrycy logicznej, czy następujące zdanie jest tautologią: $((p \Rightarrow q) \wedge \sim q) \Rightarrow \sim p$. Napisz zdanie przeciwstawne (kontrapozycję) do tego zdania.
2. Określ koniunkcję za pomocą negacji i alternatywy.
3. Udowodnij, że $B \subset (A \cup B)$.
4. Przy pomocy trójkąta Pascala rozwiń $(a-b)^8$.
5. Przy pomocy indukcji matematycznej pokaż, że $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$.
6. Doprowadź $\frac{1+i}{1-i}$ do postaci $a + ib$, gdzie a i b są rzeczywiste.
7. Narysuj na płaszczyźnie zespolonej figurę określoną przez $|z| \leq 2 \wedge Im(z) \leq 0$. Opisz tę figurę słowami. Stwierdź bez dowodu, czy powstały zbiór jest a) otwarty b) domknięty c) ograniczony.
8. Znajdź pierwiastki zespolone równania $z^2 + z + 1 = 0$.
9. Niech $f(x) = \log x$, $g(x) = 1/x$, $h(x) = \sin x$. Podaj wzór na złożenie funkcji $h \circ f \circ g$, tzn. $h(f(g(x))) = \ldots$, a także na $g \circ h \circ f$ i $h \circ g \circ f$ (nie podawać dziedziny).
10. Jaka jest funkcja odwrotna do $f(x) = \sqrt{1-x^2}$? Podaj wzór i dziedzinę.
11. Czy funkcja $f : R \to R$ o wzorze $f(x) = x^3$ jest a) injekcją b) bijekcją c) surjekcją, czy jest d) parzysta e) nieparzysta?
12. Udowodnij monotoniczność ciągu $a_n = \frac{n}{n+4}$.
13. Zbadaj ograniczoność ciągu $a_n = (2^n + \sin n)^{\frac{1}{n}}$.
14. Znajdź granicę ciągów przy $n \to \infty$:
    (a) $a_n = \frac{n^2+n+2}{n^2+1}$
    (b) $b_n = \sqrt{n^2+n} - n$
    (c) $c_n = (n^2+1)^{\frac{1}{n}}$
    (d) $d_n = (n^2 3^n + 5^n)^{\frac{1}{n}}$
    (e) $e_n = \frac{n!}{n!+1}$
    (f) $f_n = \frac{n^n+n^6}{2n^n+n^7}$
    (g) $g_n = (n^n+2)^{\frac{1}{n}}$
    (h) $h_n = (-1)^n \frac{1}{n^2} \sin(n^n)$
    (i) $i_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-3n}$
15. Zbadać zbieżność i zbieżność bezwzględną szeregów
    a)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+2}$
    b)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4+2}$
    c)$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^{1/3}}$

16. Wypisać kolejne sumy częściowe szeregu i następnie znaleźć ich granicę: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$

17. Korzystając z kryterium porównawczego zbadać zbieżność szeregów

    a)$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \sin^2 \frac{2}{n}$

    b)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^2}$

18. Korzystając z kryterium d'Alemberta zbadać zbieżność szeregów

    a)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

    b)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!^2}{n^{2n}}$

    c)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!^2}$

19. Korzystając z kryterium Cauchy'ego zbadać zbieżność szeregów

    a)$\sum_{n=1}^{\infty} n(\frac{1}{2})^n$,

    b)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

20. Pokaż zkryterium porównawczego, że jeśli $a_n \geq 0$ i $\sum a_n$ jest zbieżny, to również $\sum a_n^2$ jest zbieżny.

21. Korzystając z tw. Cauchy'ego-Hadamarda, podać promień zbieżności szeregów potęgowych

    a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2+1}$

    b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{3n!}$

    c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^n z^n$

22. Znajdź równania stycznych do funcji f w punkcie x_0:

    a) $f(x) = x^2 + x + 2$, $x_0 = 1$

    b) $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$

    c) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = \frac{1}{3}$

23. Zlaleźć punkty przecięcia i tyangens nachylenia kąta, pod którym przecinają się krzywe

    a) $x^2 - y^2 = 3$, $x^2 + 2y^2 = 1$

    b) $y - x^2 = 2$, $y = 2x + 7$

24. Obliczyć n-te pochodne funkcji

    a) $y = e^x x^2$

    b) $y = x \sin x$

    c) $y = \ln^2 x$

    d) $y = \sqrt{x}$

25. Zbadać i naszkicować wykres funkcji

    a) $y = \frac{x+2}{x+1}$

    b) $y = \frac{x^2-x+3}{x}$

    c) $y = \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}$

    d) $y = x + \cos x$

    e) $y = 1 - \mathrm{arcctg} x$

    f) $y = \frac{1}{\sin x}$