Zestaw powtórkowy po pierwszym semestrze - fizyka

(Nie należy oddawać niniejszego zestawu! Oczywiście, należy też umieć rozwiązywać zadania z dotychczasowych zestawów!)

1. Sprawdź przy pomocy matrycy logicznej, czy następujące zdanie jest tautologią: $((p \Rightarrow q) \wedge \sim q) \Rightarrow \sim p$. Napisz zdanie odwrotne oraz zdanie przeciwstawne (kontrapozycję) do powyższego zdania.

2. Wyraź koniunkcję za pomocą negacji i alternatywy.

3. Udowodnij, że $B \subset (A \cup B)$.

4. Przy pomocy trójkąta Pascala rozwiń $(a - b)^{12}$.

5. Przy pomocy indukcji matematycznej udowodnij, że $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

6. Doprowadź $\frac{2+i}{2-i}$ do postaci $a + ib$, gdzie a i b są rzeczywiste.

7. Narysuj na płaszczyźnie zespolonej figurę określoną przez $|z| \leq 3 \wedge Re(z) \leq 0$. Opisz tę figurę słowami. Stwierdź bez dowodu, czy powstały zbiór jest a) otwarty b) domknięty c) ograniczony.

8. Znajdź wszystkie pierwiastki zespolone równania $z^2 + z + 1 = 0$.

9. Niech $f(x) = \log x$, $g(x) = 1/x^2$, $h(x) = \cos x$. Podaj wzór na złożenie funkcji $h \circ f \circ g$, tzn. $h(f(g(x))) = \ldots$, a także na $g \circ h \circ f$ i $h \circ g \circ f$ (nie podawać dziedziny).

10. Niech $n|x$ oznacza, że x jest podzielne przez n (n dzieli x bez reszty). Podaj *klasy abstrakcji* relacji dwuargumentowej określonej na zbiorze N jako $xRy \iff 5|(x-y)$.

11. Jaka jest funkcja odwrotna do $f(x) = \sqrt{1-x^2}$? Podaj wzór i dziedzinę. (Uwaga: wiele osób ma zwykle problemy z poprawnym podaniem dziedziny funkcji odwrotnej.)

12. Czy funkcja $f : R \to R$ o wzorze $f(x) = x^7$ jest a) injekcją b) bijekcją c) surjekcją, czy jest d) parzysta e) nieparzysta?

13. Udowodnij monotoniczność ciągu $a_n = \frac{n}{n+4}$.

14. Zbadaj ograniczoność ciągu $a_n = (2^n + \sin n)^{\frac{1}{n}}$.

15. Znajdź granicę ciągów przy $n \to \infty$:

    (a) $a_n = \frac{n^2+n+2}{n^2+1}$

    (b) $b_n = \sqrt{n^2+n} - n$

    (c) $c_n = (n^2+1)^{\frac{1}{n}}$

    (d) $d_n = (n^2 3^n + 5^n)^{\frac{1}{n}}$

(e) $e_n = \frac{n!}{n!+1}$

(f) $f_n = \frac{n^n+n^6}{2n^n+n^7}$

(g) $g_n = (n^n+2)^{\frac{1}{n}}$

(h) $h_n = (-1)^n \frac{1}{n^2} \sin(n^n)$

(i) $i_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-3n}$

16. Zbadać zbieżność i zbieżność bezwzględną szeregów

    a)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+2}$

    b)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4+2}$

    c)$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^{1/4}}$

17. Wypisać kolejne sumy częściowe szeregu i następnie znaleźć ich granicę: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$

18. Korzystając z kryterium porównawczego zbadać zbieżność szeregów

    a)$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \sin^2 \frac{2}{n}$

    b)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^2}$

19. Korzystając z kryterium d'Alemberta zbadać zbieżność szeregów

    a)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

    b)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!^2}{n^{2n}}$

    c)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!^2}$

20. Korzystając z kryterium Cauchy'ego zbadać zbieżność szeregów

    a)$\sum_{n=1}^{\infty} n(\frac{1}{2})^n$,

    b)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

21. Pokaż z kryterium porównawczego, że jeśli $a_n \geq 0$ i $\sum a_n$ jest zbieżny, to również $\sum a_n^2$ jest zbieżny.

22. Korzystając z tw. Cauchy'ego-Hadamarda, podać promień zbieżności szeregów potęgowych

    a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2+1}$

    b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{3n!}$

    c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^n z^n$

23. Znajdź równania stycznych do funcji f w punkcie x_0:

    a) $f(x) = x^2 + x + 2$, $x_0 = 1$

    b) $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$

    c) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = \frac{1}{3}$

24. Znaleźć punkty przecięcia i tangens nachylenia kąta, pod którym przecinają się krzywe

    a) $x^2 - y^2 = 3$, $x^2 + 2y^2 = 1$

    b) $y - x^2 = 2$, $y = 2x + 7$

25. Obliczyć n-te pochodne funkcji

    a) $y = e^x x^2$

    b) $y = x \sin x$

    c) $y = \ln^2 x$

    d) $y = \sqrt{x}$

26. Wypisać pierwsze dwa niezerowe wyrazy rozwinięcia Taylora dla funkcji

    a) $f(x) = \frac{1}{\cos^3 x}$ wokół $x = 0$

    b) $f(x) = 1/x^7$ wokół $x = 2$

    c) $f(x) = x^x$ wokół $x = 1$

    d) $f(x) = \sin^2 x$ wokół $x = \pi/2$

    e) $f(x) = \mathrm{ctg} x$ wokół $x = 0$

    f) $f(x) = \exp(x^3)$ wokół $x = 0$

27. Napisać szereg Taylora dla $(1 + x) \sin x^2$ wokół $x = 0$.

28. Zbadać funkcję i naszkicować jej wykres

    a) $y = \frac{x+2}{x+1}$

    b) $y = \frac{x^2-x+3}{x}$

    c) $y = \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}$

    d) $y = x + \cos x$

    e) $y = 1 - \mathrm{arcctg} x$

    f) $y = \frac{1}{\sin x}$

    g) $y = \arcsin(\sin x)$

    h) $y = \mathrm{tg}(\mathrm{arctg} x)$

    h) $y = 1/\mathrm{cosh} x$

    i) $y = \exp\left(-\frac{1}{x^2-1}\right)$