Analiza Matematyczna AŚ 2009/2010, prof. dr hab. W. Broniowski

Zestaw powtórkowy na egzamin pisemny po pierwszym semestrze - I r. fizyki

Należy też umieć rozwiązywać zadania z zestawów, można też ćwiczyć na zestawach z poprzednich lat. Należy ćwiczyć do skutku! Egzamin obejmuje materiał do badania prostych funkcji włącznie.

1. Sprawdź przy pomocy matrycy logicznej, czy następujące zdanie jest tautologią: $((p \Rightarrow q) \wedge \sim q) \Rightarrow \sim p$. Napisz zdanie odwrotne oraz zdanie przeciwstawne (kontrapozycję) do powyższego zdania.

2. Sprawdź przy pomocy matrycy logicznej, czy następujące zdanie jest tautologią: $((p \Rightarrow q) \wedge \sim q) \Rightarrow \sim p$. Napisz zdanie odwrotne oraz zdanie przeciwstawne (kontrapozycję) do powyższego zdania.

3. Wyraź koniunkcję za pomocą negacji i alternatywy.

4. Udowodnij, że $B \subset (A \cup B)$.

5. Przy pomocy trójkąta Pascala rozwiń $(a-b)^{10}$.

6. Przy pomocy indukcji matematycznej udowodnij, że $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

7. Narysuj na płaszczyźnie zespolonej figurę określoną przez $|z| \leq 3 \wedge Re(z) \leq 0$. Opisz tę figurę słowami. Stwierdź bez dowodu, czy powstały zbiór jest a) otwarty b) domknięty c) doskonały d) ograniczony.

8. Znajdź wszystkie pierwiastki zespolone równania $z^3 + z^2 + z = 0$.

9. Niech $f(x) = \log x$, $g(x) = 1/x^2$, $h(x) = \cos x$. Podaj wzór na złożenie funkcji $h \circ f \circ g$, tzn. $h(f(g(x))) = \ldots$, a także na $g \circ h \circ f$ i $h \circ g \circ f$ (nie podawać dziedziny).

10. Niech $f(x) = \log x$, $g(x) = 1/x$, $h(x) = \sin x$. Podaj wzór na złożenie funkcji $h \circ f \circ g$, tzn. $h(f(g(x))) = \ldots$, a także na $g \circ h \circ f$ i $h \circ g \circ f$ (nie podawać dziedziny).

11. Niech $n|x$ oznacza, że x jest podzielne przez n (n dzieli x bez reszty). Podaj *klasy abstrakcji* relacji dwuargumentowej określonej na zbiorze N jako $xRy \Longleftrightarrow 5|(x-y)$.

12. Jaka jest funkcja odwrotna do $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, gdzie $x \in (-1, 1)$? Podaj wzór i dziedzinę. (Uwaga: wiele osób ma zwykle problemy z poprawnym podaniem dziedziny funkcji odwrotnej.)

13. Powyższe zadanie dla $f(x) = x^2$, gdzie $x \in [0, 1)$.

14. Czy funkcja $f : R \to R$ o wzorze $f(x) = x^3$ jest a) injekcją b) bijekcją c) surjekcją, czy jest d) parzysta e) nieparzysta?

15. Udowodnij monotoniczność ciągu $a_n = \frac{n}{n+2}$.

16. Zbadaj ograniczoność ciągu $a_n = (3^n + \sin n)^{\frac{1}{n}}$.

17. Znajdź granicę ciągów przy $n \to \infty$:

   (a) $a_n = \frac{n^2+n+2}{n^2+1}$

   (b) $b_n = \sqrt{n^2 - n} - n$

   (c) $c_n = (n^2 + 1)^{\frac{1}{n}}$

   (d) $d_n = (n^2 3^n + 5^n)^{\frac{1}{n}}$

   (e) $e_n = \frac{n!}{n!+1}$

   (f) $f_n = \frac{n^n+n^6}{2n^n+n^7}$

   (g) $g_n = (n^n + 2)^{\frac{1}{n}}$

   (h) $h_n = (-1)^n \frac{1}{n^2} \sin(n^n)$

   (i) $i_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-3n}$

18. Zbadać zbieżność i zbieżność bezwzględną szeregów

   a)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+2}$

   b)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4+2}$

   c)$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^{1/4}}$

19. Wypisać kolejne sumy częściowe szeregu i następnie znaleźć ich granicę: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$

20. Korzystając z kryterium porównawczego zbadać zbieżność szeregów

   a)$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \sin^2 \frac{2}{n}$

   b)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^2}$

21. Korzystając z kryterium d'Alemberta zbadać zbieżność szeregów

   a)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

   b)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!^2}{n^{2n}}$

   c)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!^2}$

22. Korzystając z kryterium Cauchy'ego zbadać zbieżność szeregów

   a)$\sum_{n=1}^{\infty} n(\frac{1}{2})^n$,

   b)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

23. Pokaż z kryterium porównawczego, że jeśli $a_n \geq 0$ i $\sum a_n$ jest zbieżny, to również $\sum a_n^2$ jest zbieżny.

24. Korzystając z tw. Cauchy'ego-Hadamarda, podać promień zbieżności szeregów potęgowych

    a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^3+1}$

    b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{2n!}$

    c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^n z^n$

25. Obliczyć pochodną funkcji $\cos(\log(\sin(e^{1+x^2})))$.

26. Zbadać funkcję i naszkicować jej wykres (na egzaminie po pierszym semestrze będą proste funkcje, w drugim semestrze wrócimy do funkcji bardziej zaawansowanych)

    a) $y = \frac{x+2}{x-1}$

    b) $y = \frac{x^2-x+3}{x}$

    c) $y = \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}$

    d) $y = x\mathrm{ln}x$

    e) $y = xe^x$

    f) $y = x + \cos x$

    g) $y = 1 - \mathrm{arcctg}x$

    h) $y = \frac{1}{\sin x}$

    i) $y = \arcsin(\sin x)$

    j) $y = \mathrm{tg}(\mathrm{arctg}x)$

    k) $y = e^{-x^2}$