Analiza Matematyczna AŚ 2008/2009, prof. dr hab. W. Broniowski

Zestaw powtórkowy na egzamin pisemny po pierwszym semestrze - I r. fizyka i informatyka

Należy też umieć rozwiązywać zadania z zestawów 1-6, można też ćwiczyć na zestawach z poprzednich lat. Należy ćwiczyć do skutku! Egzamin obejmuje materiał do badania funkcji włącznie, co będziemy omawiać w styczniu (4 zajęcia).

1. Sprawdź przy pomocy matrycy logicznej, czy następujące zdanie jest tautologią: $((p \Rightarrow q) \wedge \sim q) \Rightarrow \sim p$. Napisz zdanie odwrotne oraz zdanie przeciwstawne (kontrapozycję) do powyższego zdania.

2. Przy pomocy trójkąta Pascala rozwiń $(a-b)^{10}$.

3. Przy pomocy indukcji matematycznej udowodnij, że $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

4. Niech $f(x) = \log x$, $g(x) = 1/x$, $h(x) = \sin x$. Podaj wzór na złożenie funkcji $h \circ f \circ g$, tzn. $h(f(g(x))) = \ldots$, a także na $g \circ h \circ f$ i $h \circ g \circ f$ (nie podawać dziedziny).

5. Niech $n|x$ oznacza, że x jest podzielne przez n (n dzieli x bez reszty). Podaj *klasy abstrakcji* relacji dwuargumentowej określonej na zbiorze N jako $xRy \Longleftrightarrow 5|(x-y)$.

6. Jaka jest funkcja odwrotna do $f(x) = \sqrt{1-x^2}$? Podaj wzór i dziedzinę. (Uwaga: wiele osób ma zwykle problemy z poprawnym podaniem dziedziny funkcji odwrotnej.)

7. Czy funkcja $f: R \to R$ o wzorze $f(x) = x^3$ jest a) injekcją b) bijekcją c) surjekcją, czy jest d) parzysta e) nieparzysta?

8. Udowodnij monotoniczność ciągu $a_n = \frac{n}{n+2}$.

9. Zbadaj ograniczoność ciągu $a_n = (3^n + \sin n)^{\frac{1}{n}}$.

10. Znajdź granicę ciągów przy $n \to \infty$:

    (a) $a_n = \frac{n^2+n+2}{n^2+1}$

    (b) $b_n = \sqrt{n^2-n} - n$

    (c) $c_n = (n^2+1)^{\frac{1}{n}}$

    (d) $d_n = (n^2 3^n + 5^n)^{\frac{1}{n}}$

    (e) $e_n = \frac{n!}{n!+1}$

    (f) $f_n = \frac{n^n+n^6}{2n^n+n^7}$

    (g) $g_n = (n^n+2)^{\frac{1}{n}}$

    (h) $h_n = (-1)^n \frac{1}{n^2} \sin(n^n)$

    (i) $i_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-3n}$

11. Zbadać zbieżność i zbieżność bezwzględną szeregów

a)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+2}$

b)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4+2}$

c)$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^{1/4}}$

12. Wypisać kolejne sumy częściowe szeregu i następnie znaleźć ich granicę: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$

13. Korzystając z kryterium porównawczego zbadać zbieżność szeregów

a)$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \sin^2 \frac{2}{n}$

b)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^2}$

14. Korzystając z kryterium d'Alemberta zbadać zbieżność szeregów

a)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

b)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!^2}{n^{2n}}$

c)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!^2}$

15. Korzystając z kryterium Cauchy'ego zbadać zbieżność szeregów

a)$\sum_{n=1}^{\infty} n(\frac{1}{2})^n$,

b)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

16. Pokaż z kryterium porównawczego, że jeśli $a_n \geq 0$ i $\sum a_n$ jest zbieżny, to również $\sum a_n^2$ jest zbieżny.

17. Korzystając z tw. Cauchy'ego-Hadamarda, podać promień zbieżności szeregów potęgowych

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^3+1}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{2n!}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^n z^n$

18. Obliczyć pochodną funkcji $\cos(\log(\sin(e^{1+x^2})))$.

19. Obliczyć n-te pochodne funkcji, korzystając ze wzoru Leibniza

a) $y = e^x x$

b) $y = x \cos x$

c) $y = \ln^2 x$

d) $y = \sqrt{x}$

20. Zbadać funkcję i naszkicować jej wykres

a) $y = \frac{x+2}{x+1}$

b) $y = \frac{x^2-x+3}{x}$

c) $y=\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}$

d) $y=x+\cos x$

e) $y=1-\mathrm{arcctg} x$

f) $y=\frac{1}{\sin x}$

g) $y=\arcsin(\sin x)$

h) $y=\mathrm{tg}(\mathrm{arctg} x)$

i) $y=\exp\left(-\frac{1}{x^2-1}\right)$

j) $y=xe^x$