Zestaw powtórkowy na egzamin pisemny po pierwszym semestrze - fizyka i informatyka

Nie należy oddawać niniejszego zestawu! Oczywiście, należy też umieć rozwiązywać zadania z dotychczasowych zestawów, można też ćwiczyć na zestawach z poprzednich lat. Należy ćwiczyć do skutku! Egzamin obejmuje materiał do badania funkcji włącznie, co będziemy omawiać w styczniu (4 zajęcia).

1. Sprawdź przy pomocy matrycy logicznej, czy następujące zdanie jest tautologią: $((p \Rightarrow q) \wedge \sim q) \Rightarrow \sim p$. Napisz zdanie odwrotne oraz zdanie przeciwstawne (kontrapozycję) do powyższego zdania.

2. Wyraź koniunkcję za pomocą negacji i alternatywy.

3. Udowodnij, że $(A \cap B) \subset B$.

4. Przy pomocy trójkąta Pascala rozwiń $(a-b)^{10}$.

5. Przy pomocy indukcji matematycznej udowodnij, że $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

6. Doprowadź $\frac{2+i}{2-i}$ do postaci $a + ib$, gdzie a i b są rzeczywiste.

7. Narysuj na płaszczyźnie zespolonej figurę określoną przez $|z| \leq 3 \wedge Re(z) < 0$. Opisz tę figurę słowami. Stwierdź bez dowodu, czy powstały zbiór jest a) otwarty b) domknięty c) ograniczony.

8. Znajdź wszystkie pierwiastki zespolone równania $z^2 - z + 1 = 0$.

9. Niech $f(x) = \log x$, $g(x) = 1/x$, $h(x) = \sin x$. Podaj wzór na złożenie funkcji $h \circ f \circ g$, tzn. $h(f(g(x))) = \ldots$, a także na $g \circ h \circ f$ i $h \circ g \circ f$ (nie podawać dziedziny).

10. Niech $n|x$ oznacza, że x jest podzielne przez n (n dzieli x bez reszty). Podaj *klasy abstrakcji* relacji dwuargumentowej określonej na zbiorze N jako $xRy \iff 5|(x-y)$.

11. Jaka jest funkcja odwrotna do $f(x) = \sqrt{1-x^2}$? Podaj wzór i dziedzinę. (Uwaga: wiele osób ma zwykle problemy z poprawnym podaniem dziedziny funkcji odwrotnej.)

12. Czy funkcja $f : R \to R$ o wzorze $f(x) = x^5$ jest a) injekcją b) bijekcją c) surjekcją, czy jest d) parzysta e) nieparzysta?

13. Udowodnij monotoniczność ciągu $a_n = \frac{n}{n+2}$.

14. Zbadaj ograniczoność ciągu $a_n = (3^n + \sin n)^{\frac{1}{n}}$.

15. Znajdź granicę ciągów przy $n \to \infty$:

    (a) $a_n = \frac{n^2+n+2}{n^2+1}$

(b) $b_n = \sqrt{n^2 - n} - n$

(c) $c_n = (n^2 + 1)^{\frac{1}{n}}$

(d) $d_n = (n^2 3^n + 5^n)^{\frac{1}{n}}$

(e) $e_n = \frac{n!}{n!+1}$

(f) $f_n = \frac{n^n + n^6}{2n^n + n^7}$

(g) $g_n = (n^n + 2)^{\frac{1}{n}}$

(h) $h_n = (-1)^n \frac{1}{n^2} \sin(n^n)$

(i) $i_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-3n}$

16. Zbadać zbieżność i zbieżność bezwzględną szeregów

    a)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+2}$

    b)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4+2}$

    c)$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^{1/4}}$

17. Wypisać kolejne sumy częściowe szeregu i następnie znaleźć ich granicę: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$

18. Korzystając z kryterium porównawczego zbadać zbieżność szeregów

    a)$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \sin^2 \frac{2}{n}$

    b)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^2}$

19. Korzystając z kryterium d'Alemberta zbadać zbieżność szeregów

    a)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

    b)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!^2}{n^{2n}}$

    c)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!^2}$

20. Korzystając z kryterium Cauchy'ego zbadać zbieżność szeregów

    a)$\sum_{n=1}^{\infty} n(\frac{1}{2})^n$,

    b)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

21. Pokaż z kryterium porównawczego, że jeśli $a_n \geq 0$ i $\sum a_n$ jest zbieżny, to również $\sum a_n^2$ jest zbieżny.

22. Korzystając z tw. Cauchy'ego-Hadamarda, podać promień zbieżności szeregów potęgowych

    a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^3+1}$

    b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{2n!}$

    c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^n z^n$

23. Obliczyć pochodną funkcji $\cos(\log(\sin(e^{1+x^2})))$.

24. Obliczyć n-te pochodne funkcji

a) $y = e^x x$

b) $y = x \cos x$

c) $y = \ln^2 x$

d) $y = \sqrt{x}$

25. Zbadać funkcję i naszkicować jej wykres

a) $y = \frac{x+2}{x+1}$

b) $y = \frac{x^2-x+3}{x}$

c) $y = \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}$

d) $y = x + \cos x$

e) $y = 1 - \mathrm{arcctg} x$

f) $y = \frac{1}{\sin x}$

g) $y = \arcsin(\sin x)$

h) $y = \mathrm{tg}(\mathrm{arctg} x)$

i) $y = \exp\left(-\frac{1}{x^2-1}\right)$

j) $y = xe^x$